ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIEME SERIE

TOME LXXI — ANNÉE 1954

(90e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, EDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1954

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΡΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-ET-ONZIÈME — ANNÉE 1954

(90e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—

1954

Copyright by Gauthier-Villars, 1954.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ITÉRATION DES TRANSFORMATIONS ANALYTIQUES DANS LE BICERCLE-UNITÉ

PAR M. MICHEL HERVÉ.

1. RAPPEL DES RÉSULTATS CLASSIQUES SUR L'ITÉRATION D'UNE TRANSFORMATION ANALYTIQUE DANS LE CERCLE-UNITÉ ([1]). — On peut itérer, dans le cercle-unité $|z|<1$, une transformation analytique t de la forme $z_1=f(z)$, où $f(z)$ est une fonction holomorphe, et de module inférieur à 1, pour $|z|<1$: la $n^{\text{ième}}$ itérée t_n est la transformation $z_n=f_n(z)$, la fonction $f_n(z)$ étant définie par $f_1(z)\equiv f(z)$ et par la formule de récurrence

$$f_{n+1}(z)\equiv f[f_n(z)];$$

on a d'ailleurs plus généralement

$$f_{n+p}(z)\equiv f_n[f_p(z)]$$

quels que soient les entiers positifs n et p. Les t_n forment une famille normale pour $|z|<1$.

La transformation t peut admettre un point double intérieur au cercle-unité : c'est un point z_0 tel que $|z_0|<1$ et $f(z_0)=z_0$; si un tel point existe, on a nécessairement $|f'(z_0)|\leq 1$; si $|f'(z_0)|=1$, c'est-à-dire $f'(z_0)=e^{i\gamma}$, t est une transformation homographique du cercle-unité en lui-même, définie par la formule

$$\frac{z_1-z_0}{1-\bar{z}_0 z_1}=e^{i\gamma}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},$$

([1]) La bibliographie, à laquelle renvoient les chiffres entre crochets, est placée à la fin; les résultats rappelés ici sont principalement ceux des travaux numérotés [3] et [7].

et les transformations limites de suites partielles t_{n_k} (où les n_k croissent indéfiniment) sont de la même forme; si en particulier $f'(z_0)=1$, t est la transformation identique. Si, au contraire, $|f'(z_0)|<1$, $f_n(z)\to z_0$ uniformément sur tout compact : on dit alors que z_0 est point double attractif de t.

Si t n'admet pas de point double intérieur au cercle-unité, il existe un point $e^{i\alpha}$ de la circonférence tel que, pour tout z de module inférieur à 1, le point $f(z)$ soit intérieur, au sens large (2), au cercle passant par le point z et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité. La fonction $f(z)$ a en ce point une dérivée angulaire λ telle que $0<\lambda\leq 1$: cette dérivée est la limite, quand $z\to e^{i\alpha}$, avec $|\arg(1-e^{-i\alpha}z)|\leq\theta<\frac{\pi}{2}$, à la fois de $\frac{e^{i\alpha}-f(z)}{e^{i\alpha}-z}$ et de $\frac{1-|f(z)|}{1-|z|}$. Inversement, si cette condition est remplie, pourvu que t ne soit pas la transformation identique, $f_n(z)\to e^{i\alpha}$ uniformément sur tout compact : on dit encore que $e^{i\alpha}$ est point double attractif de t.

Ainsi, un point double attractif de t est, soit un point z_0 intérieur au cercle-unité tel que $f(z_0)=z_0$ et $|f'(z_0)|<1$, soit un point $e^{i\alpha}$ de la circonférence tel que, pour tout z de module inférieur à 1, le point $f(z)$ soit distinct de z et intérieur, au sens large, au cercle passant par le point z et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité. La transformation identique mise à part, toute transformation t admet, ou bien un point double intérieur au cercle-unité et un seul, ou bien un point double attractif situé sur la circonférence et un seul, l'existence de l'un de ces points excluant celle de l'autre.

2. Itération, dans le cercle-unité, d'une transformation analytique dépendant d'un paramètre. — Soit, dans le cercle-unité $|x|<1$, une transformation analytique $t^1(y)$ de la forme $x_1=f(x,y)$, où $f(x,y)$ est une fonction holomorphe, et de module inférieur à 1, des deux variables x, y pour $|x|<1$, $|y|<1$; cette transformation porte seulement sur la variable x, y jouant le rôle d'un paramètre qui reste constant dans l'itération de $t^1(y)$, c'est-à-dire que, si la $n^{\text{ième}}$ itérée $t_n^1(y)$ est notée $x_n=f_n^1(x,y)$, on a entre les fonctions f_n^1 la relation

$$f_{n+p}^1(x,y)\equiv f_n^1[f_p^1(x,y),y]$$

quels que soient les entiers positifs n et p. Les fonctions $f_n^1(x,y)$ forment une famille normale sur le bicercle $|x|<1$, $|y|<1$.

Nous démontrerons simultanément les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Étant donné la transformation $t^1(y)$, il existe, ou bien un point $e^{i\alpha}$ tel que, pour tout x et tout y de modules inférieurs à 1, le point $f(x,y)$ soit intérieur, au sens large, au cercle passant par le point x et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité, ou bien une fonction $\xi(y)$, holomorphe et de module inférieur à 1 pour $|y|<1$, telle que $f[\xi(y),y]\equiv\xi(y)$; pourvu que $t^1(y)$ ne soit pas la trans-*

(2) Le point $f(z)$ peut être, en effet, non pas intérieur à ce cercle, mais situé sur sa circonférence.

formation identique quel que soit y, les deux cas s'excluent mutuellement et, dans le second, $f(x, y) = x$, avec $|x| < 1$, $|y| < 1$, entraîne inversement $x = \xi(y)$.

THÉORÈME 2. — *Ou bien $t^1(y)$ est une transformation homographique du cercle-unité en lui-même indépendante de y, ou bien $t^1(y)$ n'est, pour aucun y, une transformation homographique du cercle-unité en lui-même.*

Soit $\varphi(x, y)$ la limite d'une suite convergente $f^1_{n_k}(x, y)$ (les n_k croissant indéfiniment); comme $|\varphi(x, y)| \leq 1$, ou bien φ est une constante de module 1, ou bien $|\varphi(x, y)| < 1$.

Supposons d'abord $\varphi(x, y) \equiv e^{i\alpha}$; en appliquant à $t^1(y)$ les résultats rappelés au n° 1, on voit que, quel que soit y, $e^{i\alpha}$ est point double attractif de $t^1(y)$: c'est le premier des deux cas prévus par le théorème 1. Pour étudier ce premier cas, chaque fois qu'il se présentera dans la suite, nous utiliserons une correspondance homographique entre le cercle $|x| < 1$ et le demi-plan $\mathrm{Re}X > 0$, correspondance choisie de manière que les points $x = e^{i\alpha}$ et $X = \infty$ soient homologues :

$$X = \frac{e^{i\alpha} + x}{e^{i\alpha} - x}, \qquad x = e^{i\alpha}\frac{X - 1}{X + 1};$$

en posant

$$F(X, y) \equiv \frac{e^{i\alpha} + f\left(e^{i\alpha}\dfrac{X-1}{X+1}, y\right)}{e^{i\alpha} - f\left(e^{i\alpha}\dfrac{X-1}{X+1}, y\right)},$$

et de même pour $F^1_n(X, y)$, on définit une transformation $T^1(y)$ et ses itérées $T^1_n(y)$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}X > 0$; le fait que le point $f(x, y)$ est intérieur, au sens large, au cercle passant par le point x et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité, se traduit simplement par $\mathrm{Re}F(X, y) \geq \mathrm{Re}X$ quels que soient X et y ($\mathrm{Re}X > 0$, $|y| < 1$).

Dans ce premier cas, si $t^1(y_0)$ est une transformation homographique du cercle-unité en lui-même, cette transformation admet le point double $e^{i\alpha}$, donc $T^1(y_0)$ est une transformation homographique du demi-plan $\mathrm{Re}X > 0$ en lui-même, admettant le point double ∞ : $F(X, y_0) \equiv aX + ib$, a et b étant réels, $a \geq 1$ puisque

$$\mathrm{Re}F(X, y_0) \geq \mathrm{Re}X.$$

Si X_p est une suite de points du demi-plan $\mathrm{Re}X > 0$ tendant vers un point ic à distance finie de la droite $\mathrm{Re}X = 0$, les $F(X_p, y)$, fonctions holomorphes de y dont les parties réelles sont positives, forment une famille normale pour $|y| < 1$, et toute suite convergente extraite de cette famille a pour limite une fonction de partie réelle ≥ 0, qui vaut $i(ac + b)$ pour $y = y_0$, donc est la constante imaginaire pure $i(ac + b)$; ainsi, pour y fixe,

$$F(X_p, y) \to i(ac + b);$$

cela étant vrai pour toute suite X_p,

$$F(X, y) - F(X, y_0) \to 0$$

pour y fixe, quand $\mathrm{Re}X \to 0$, $\mathrm{Im}X$ restant borné. Si maintenant l'on considère $F(X, y) - F(X, y_0)$ comme fonction de X, y restant fixe, cela exige

$$F(X, y) - F(X, y_0) \equiv 0, \qquad \text{donc} \quad F(X, y) \equiv aX + ib$$

quels que soient X et y, ce qui démontre le théorème 2 dans ce premier cas.

3. Supposons maintenant $|\varphi(x, y)| < 1$ et $f(x, y) \not\equiv x$; choisissons un nombre complexe y_0 ($|y_0| < 1$) tel que $f(x, y_0) \not\equiv x$; puisque $|\varphi(x, y_0)| < 1$, la transformation $t^1(y_0)$ ne peut avoir de point double attractif sur la circonférence-unité; d'après les résultats rappelés au n° 1, elle a un point double x_0 intérieur au cercle-unité et un seul; on a donc $f(x_0, y_0) = x_0$. *A priori*, puisque $f(x, y_0) - x \not\equiv 0$, les zéros de la fonction $f(x, y) - x$, dans un voisinage assez petit du point (x_0, y_0), sont ceux d'un polynome distingué en $(x - x_0)$:

$$(x - x_0)^n + a_1(y)(x - x_0)^{n-1} + \ldots + a_n(y),$$

dont les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions de y holomorphes et nulles au point y_0; on peut, en outre, supposer que les facteurs irréductibles de ce polynome [dans l'anneau des polynomes en $(x - x_0)$ dont les coefficients sont des fonctions de y holomorphes au point y_0] sont deux à deux distincts; alors, pour y assez voisin de y_0 mais distinct de y_0, le polynome a n racines distinctes, c'est-à-dire que $t^1(y)$ a n points doubles distincts intérieurs au cercle-unité; si $n > 1$, nous avons donc $f(x, y) \equiv x$ pour y assez voisin de y_0 mais distinct de y_0, qui est incompatible avec l'hypothèse $f(x, y_0) \not\equiv x$.

Ainsi $n = 1$, c'est-à-dire (en changeant de notations) que les zéros de la fonction $f(x, y) - x$, dans un voisinage assez petit du point (x_0, y_0), sont ceux d'une fonction de la forme $x - \xi(y)$, $\xi(y)$ étant holomorphe pour $|y - y_0| < \rho$, $\xi(y_0) = x_0$; puisque $\xi(y)$ est point double de $t^1(y)$, on a (n° 1)

$$|f'_x[\xi(y), y]| \leq 1 \qquad \text{pour} \quad |y - y_0| < \rho;$$

mais $f'_x[\xi(y), y]$ est fonction holomorphe de y pour $|y - y_0| < \rho$, donc, ou bien c'est une constante de module 1, ou bien

$$|f'_x[\xi(y), y]| < 1 \qquad \text{pour} \quad |y - y_0| < \rho.$$

Si $f'_x[\xi(y), y] \equiv e^{i\gamma}$, on a (n° 1)

$$\frac{f(x, y) - \xi(y)}{1 - \overline{\xi(y)} f(x, y)} \equiv e^{i\gamma} \frac{x - \xi(y)}{1 - \overline{\xi(y)} x} \qquad \text{pour} \quad |y - y_0| < \rho;$$

en particulier, en donnant à x une valeur numérique x_1 autre que x_0 :

$$\frac{1 - \overline{\xi(y)} x_1}{1 - \overline{\xi(y)} f(x_1, y)} \equiv e^{i\gamma} \frac{x_1 - \xi(y)}{f(x_1, y) - \xi(y)},$$

relation d'où l'on peut tirer $\overline{\xi(\gamma)}$ pourvu que $f(x_1, \gamma) \not\equiv x_1$, c'est-à-dire pour γ assez voisin de γ_0 puisque $f(x_1, \gamma_0) \not\equiv x_1$; on trouve ainsi pour $\overline{\xi(\gamma)}$ une fonction méromorphe de γ, ce qui exige que $\xi(\gamma)$ soit la constante x_0; on a $f(x_0, \gamma) \equiv x_0$ pour γ voisin de γ_0, donc aussi pour $|\gamma| < 1$, ce qui démontre le théorème 1 avec $\xi(\gamma) \equiv x_0$; on a de plus

$$\frac{f(x, \gamma) - x_0}{1 - \bar{x}_0 f(x, \gamma)} \equiv e^{i\gamma} \frac{x - x_0}{1 - \bar{x}_0 x},$$

c'est-à-dire que $t^1(\gamma)$ est une transformation homographique du cercle-unité en lui-même indépendante de γ.

Si, au contraire, $|f'_x[\xi(\gamma), \gamma]| < 1$ pour $|\gamma - \gamma_0| < \rho$, $\xi(\gamma)$ est point double attractif de $t^1(\gamma)$ pour $|\gamma - \gamma_0| < \rho$; toutes les fonctions limites de suites partielles $f^1_{n_k}(x, \gamma)$ coïncident, pour $|\gamma - \gamma_0| < \rho$, avec $\xi(\gamma)$; comme ces fonctions sont holomorphes pour $|x| < 1$, $|\gamma| < 1$, elles sont identiques à une même fonction de γ, holomorphe et de module inférieur à 1 pour $|\gamma| < 1$, et qui peut être notée $\xi(\gamma)$; l'identité $f[\xi(\gamma), \gamma] \equiv \xi(\gamma)$ est donc étendue à $|\gamma| < 1$, ainsi que l'inégalité $|f'_x[\xi(\gamma), \gamma]| < 1$, d'où résulte que $t^1(\gamma)$ n'est, pour aucun γ, une transformation homographique du cercle-unité en lui-même.

Si enfin $f(x_1, \gamma_1) = x_1$, avec $x_1 \not\equiv \xi(\gamma_1)$, la transformation $t^1(\gamma_1)$, qui admet deux points doubles distincts, x_1 et $\xi(\gamma_1)$, intérieurs au cercle-unité, est la transformation identique, donc aussi $t^1(\gamma)$ pour tout γ.

4. Rappel de résultats antérieurs sur l'itération a deux variables (*cf.* [2], [4], [5]). — Dans un domaine D, borné, univalent, de l'espace rapporté à deux variables complexes x, γ, on peut itérer une transformation analytique t de la forme

$$x_1 = f(x, \gamma), \qquad \gamma_1 = g(x, \gamma),$$

où f et g sont deux fonctions holomorphes sur D et telles que $(x, \gamma) \in D$ entraîne $(x_1, \gamma_1) \in D$; la $n^{\text{ième}}$ itérée t_n (avec $t_1 \equiv t$) étant notée

$$x_n = f_n(x, \gamma), \qquad \gamma_n = g_n(x, \gamma),$$

on a entre les fonctions f_n, g_n les relations

$$f_{n+p}(x, \gamma) \equiv f_n[f_p(x, \gamma), g_p(x, \gamma)],$$
$$g_{n+p}(x, \gamma) \equiv g_n[f_p(x, \gamma), g_p(x, \gamma)],$$

quels que soient les entiers positifs n et p. Les t_n forment une famille normale sur D.

La transformation t peut admettre un point double intérieur à D : c'est un point $(x_0, \gamma_0) \in D$ tel que

$$f(x_0, \gamma_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad g(x_0, \gamma_0) = \gamma_0;$$

en un tel point, les valeurs propres s_1, s_2 du déterminant fonctionnel de t sont

nécessairement de modules au plus égaux à 1; si $|s_1|=|s_2|=1$, t est une transformation biunivoque de D en lui-même [2] ainsi que les transformations limites de suites partielles t_{n_k} (où les n_k croissent indéfiniment). Si $|s_1|<1$, $|s_2|<1$, alors

$$f_n(x, y)\to x_0, \qquad g_n(x, y)\to y_0$$

uniformément sur tout compact [5], le point (x_0, y_0) est point double attractif de t. Si enfin $|s_1|=1$, $|s_2|<1$, il existe une variété analytique E dans D, irréductible globalement, passant par le point (x_0, y_0) mais non réduite à ce point, transformée biunivoquement en elle-même par t et aussi par toute transformation τ limite d'une suite partielle t_{n_k} [4].

Ce dernier résultat implique que τ transforme certains points de D (à savoir ceux de E) en des points de D; cela n'exclut pas que τ transforme d'autres points de D en des points de la frontière de D, du moins si D est quelconque. Il existe néanmoins des domaines bornés univalents, que nous noterons D_0, tels que, si τ est limite, uniforme sur tout compact, de transformations analytiques t_n changeant les points de D_0 en des points de D_0, ou bien τ change tout point de D_0 en un point de D_0, ou bien τ change tout point de D_0 en un point de la frontière de D_0; cette propriété s'applique en particulier aux transformations τ limites de suites partielles d'itérées t_{n_k}. Les domaines D_0 comprennent, d'une part les bicylindres $d_1\times d_2$, d_1 et d_2 étant deux domaines plans bornés, d'autre part les domaines bornés limités par des hypersurfaces régulières vérifiant l'inégalité stricte de E. Levi [6].

Plaçons-nous désormais dans un domaine D_0 : revenant au cas d'un point double de t intérieur au domaine, avec $|s_1|=1$, $|s_2|<1$, on peut affirmer, outre les propriétés énoncées ci-dessus dans le cas général, que E est l'image de D_0 par toute transformation limite d'une suite partielle t_{n_k}. Si t n'admet pas de point double intérieur à D_0, ou bien la frontière de D_0 contient l'image de D_0 par toute transformation limite d'une suite partielle t_{n_k}, ou bien il existe une variété analytique E dans D_0, irréductible et non ponctuelle, transformée biunivoquement en elle-même par t et par les transformations limites de suites partielles t_{n_k}, et qui enfin est l'image de D_0 par chacune de ces transformations limites. A noter, en outre, que certaines de ces transformations limites conservent E point par point [4].

5. Théorème 3. — *Si l'on itère, dans un domaine* D_0 *linéairement simplement connexe, une transformation analytique t dépourvue de point double intérieur au domaine, toute transformation limite d'une suite partielle* t_{n_k} *change un point du domaine en un point de sa frontière.*

Précisions sur l'énoncé. — Les domaines D_0 ont été définis au n° 4; un domaine D_0 est linéairement simplement connexe si toute courbe fermée tracée dans D_0 est réductible à un point de D_0 par déformation continue dans D_0,

c'est-à-dire si, étant donné deux fonctions continues $x(u)$, $y(u)$ de la variable réelle $u(0 \leq u \leq 1)$ telles que

$$[x(u), y(u)] \in D_0, \qquad x(1) = x(0), \qquad y(1) = y(0),$$

on peut trouver deux fonctions continues $x(u, v)$, $y(u, v)$ du couple de variables réelles (u, v) $(0 \leq u, v \leq 1)$ telles que

$$[x(u, v), y(u, v)] \in D_0, \qquad x(1, v) \equiv x(0, v), \qquad y(1, v) \equiv y(0, v),$$
$$x(u, 0) \equiv x(u), \qquad y(u, 0) \equiv y(u), \qquad x(u, 1) \equiv x_0, \qquad y(u, 1) \equiv y_0.$$

Le théorème s'applique donc, entre autres, au bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$ ou à la boule $|x|^2 + |y|^2 < 1$; mais deux exemples simples montrent la nécessité des hypothèses faites sur le domaine.

Dans le domaine obtenu en retranchant l'origine du bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$, la transformation

$$(t) \qquad x_1 = e^{i\alpha} x \quad (e^{i\alpha} \neq 1), \qquad y_1 = sy \quad (0 < |s| < 1)$$

est dépourvue de point double intérieur au domaine; toutes les transformations limites de suites partielles t_{n_k} sont de la forme

$$(\tau) \qquad x_1 = e^{i\beta} x, \qquad y_1 = 0$$

et seuls les points du plan $x = 0$ sont changés par τ en points de la frontière du domaine; or ce domaine est linéairement simplement connexe, mais ce n'est pas un domaine D_0.

Le théorème ne s'applique pas non plus à la même transformation t dans le bicylindre $0 < |x| < 1$, $|y| < 1$; celui-ci est un domaine D_0, mais n'est pas linéairement simplement connexe.

Démonstration du théorème. — Dans un domaine D_0 linéairement simplement connexe, soit t une transformation analytique dépourvue de point double intérieur à D_0 et telle que toute transformation limite d'une suite partielle t_{n_k} change les points de D_0 en des points de D_0; il existe alors une variété analytique E dans D_0 possédant les propriétés rappelées à la fin du n° 4; je dis que cette variété est elle-même linéairement simplement connexe.

Soit, en effet, C une courbe fermée tracée sur E, lieu du point $[x(u), y(u)]$; par hypothèse elle est réductible à un point (x_0, y_0) de D_0 par une déformation continue dans D_0, définie par les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$; soit, d'autre part, τ une transformation, limite d'une suite partielle t_{n_k}, qui conserve E point par point :

$$(\tau) \qquad x_1 = \varphi(x, y), \qquad y_1 = \psi(x, y);$$

les fonctions $\varphi[x(u, v), y(u, v)]$, $\psi[x(u, v), y(u, v)]$ définissent une nouvelle déformation continue, réduisant C à un point, non plus seulement dans D_0, mais sur E puisque E est l'image de D_0 par τ.

La variété analytique E est une surface de Riemann étalée sur le plan complexe x (ou sur le plan complexe y), qui ne peut être fermée, car E, considérée comme ensemble de points, a des points d'accumulation sur la frontière de D_0; cette surface de Riemann, étant simplement connexe et ouverte, est, d'après un théorème classique de Kœbe, isomorphe à un disque plan $|Z|<R$, dont le rayon R peut être ∞. La transformation t, considérée sur E, a pour image dans le plan Z une transformation biunivoque du disque en lui-même, telle qu'une suite d'itérées de cette transformation ait la transformation identique pour limite. Une telle transformation doit avoir un point double, donc t également.

6. Objet du présent travail; plan de l'étude; principaux résultats. — Nous nous proposons d'étudier, dans le bicercle-unité $|x|<1$, $|y|<1$, les transformations τ limites de suites partielles t_{n_k} d'itérées d'une transformation analytique

$$(t) \qquad x_1=f(x,y), \qquad y_1=g(x,y),$$

où $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont deux fonctions holomorphes, et de modules inférieurs à 1, pour $|x|<1$, $|y|<1$; le cas où t admet un point double intérieur au bicercle étant couvert par les résultats rappelés au n° 4, nous supposerons t *dépourvue de point double intérieur au bicercle*; le théorème 3 permet alors d'affirmer que les transformations τ présentent l'une des formes

$$(\tau) \qquad \begin{cases} x_1=e^{i\alpha}, & y_1=\psi(x,y), & \text{avec } |\psi(x,y)|\leq 1, \\ x_1=\varphi(x,y), & y_1=e^{i\beta}, & \text{avec } |\varphi(x,y)|\leq 1. \end{cases}$$

Il s'agit d'étudier, t étant donnée, l'ensemble des transformations τ; comme on pouvait le prévoir, les faits sont beaucoup plus compliqués que dans le cas d'une variable z, où l'absence de point double intérieur (*cf.* n° 1) entraîne la convergence de la suite t_n, c'est-à-dire l'unicité de τ. Nous verrons qu'ici le seul théorème d'unicité que l'on puisse énoncer est celui-ci :

Théorème 4. — *Étant donné la transformation analytique t dépourvue de point double intérieur au bicercle, on peut lui faire correspondre, ou bien* un nombre $e^{i\alpha}$ *tel que* toutes *les transformations limites* τ *soient de la forme*

$$x_1=e^{i\alpha}, \qquad y_1=\psi(x,y), \qquad \textit{avec} \quad |\psi(x,y)|\leq 1,$$

ou bien un nombre $e^{i\beta}$ *tel que* toutes *les* τ *soient de la forme*

$$x_1=\varphi(x,y), \qquad y_1=e^{i\beta}, \qquad \textit{avec} \quad |\varphi(x,y)|\leq 1.$$

Nous verrons, par contre, que la fonction ψ ou φ, suivant le cas, n'est pas unique; par exemple (*cf.* n^{os} 11 et 15) on peut choisir t de manière que les transformations τ comprennent, d'une part la transformation

$$x_1=e^{i\alpha}, \qquad y_1=e^{i\beta},$$

d'autre part des transformations de la forme

$$x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = \psi(x, y), \qquad \text{avec} \quad |\psi(x, y)| < 1.$$

A la transformation t, qui porte sur les deux variables x et y, nous associerons, d'une part une transformation $t^1(y)$ portant seulement sur la variable x, y jouant le rôle d'un paramètre, d'autre part une transformation $t^2(x)$ portant seulement sur la variable y, x jouant le rôle d'un paramètre :

$$[t^1(y)] \quad x_1 = f(x, y); \qquad [t^2(x)] \quad y_1 = g(x, y).$$

On traite immédiatement le cas où $t^2(x)$ est la transformation identique quel que soit x, car alors l'itération de t conserve y et, en ce qui concerne x, se ramène à l'itération de $t^1(y)$; comme, par hypothèse, t n'a pas de point double intérieur au bicercle, $t^1(y)$ n'a, pour aucun y, de point double intérieur au cercle $|x| < 1$; alors (*cf.* n^{os} 1 et 2) $t^1(y)$ admet un point double attractif $e^{i\alpha}$ indépendant de y; la suite des itérées de t converge donc, uniformément sur tout compact, vers la transformation

$$x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = y.$$

7. *Nous écarterons désormais* le cas où $t^2(x)$ est la transformation identique pour tout x, et celui où $t^1(y)$ est la transformation identique pour tout y; le théorème 1 (n° 2) nous conduit alors à étudier successivement les trois cas suivants qui s'excluent mutuellement :

1er *cas.* — Il existe un point $e^{i\alpha}$ tel que, pour tout x et tout y de modules inférieurs à 1, le point $f(x, y)$ soit intérieur, au sens large, au cercle passant par le point x et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité et, d'autre part, une fonction $\eta(x)$, holomorphe et de module inférieur à 1 pour $|x| < 1$, telle que les relations

$$g(x, y) = y \qquad \text{et} \qquad y = \eta(x)$$

soient équivalentes pour $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Dans ce cas, nous verrons (n^{os} 9 à 11) que toutes les transformations limites τ sont de la forme $x_1 = e^{i\alpha}$, $y_1 = \psi(x, y)$, la fonction ψ n'étant pas en général unique.

2^e *cas.* — Il existe deux points $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ tels que, pour tout x et tout y de modules inférieurs à 1, le point $f(x, y)$ soit intérieur, au sens large, au cercle passant par le point x et tangent en $e^{i\alpha}$ au cercle-unité, et le point $g(x, y)$ au cercle passant par le point y et tangent en $e^{i\beta}$ au cercle-unité.

Nous verrons alors (n^{os} 12 à 15) que, ou bien toutes les transformations τ sont de la forme $x_1 = e^{i\alpha}$, $y_1 = \psi(x, y)$, ou bien toutes les τ sont de la forme $x_1 = \varphi(x, y)$, $y_1 = e^{i\beta}$, la fonction ψ ou φ n'étant pas en général unique.

3^e *cas.* — Il existe deux fonctions $\xi(y)$ et $\eta(x)$, holomorphes et de modules

inférieurs à 1, la première pour $|y|<1$, la seconde pour $|x|<1$, telles que les relations

$$f(x, y)=x \quad \text{et} \quad x=\xi(y), \quad \text{d'une part,}$$
$$g(x, y)=y \quad \text{et} \quad y=\eta(x), \quad \text{d'autre part,}$$

soient équivalentes pour $|x|<1$, $|y|<1$.

Compte tenu de l'hypothèse que t n'a pas de point double intérieur au bicercle, nous montrerons alors (n^{os} 16 à 20) l'existence de deux points $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ tels que la suite de *toutes les itérées* t_n converge vers la transformation $x_1=e^{i\alpha}$, $y_1=e^{i\beta}$; ce 3^e cas est donc le seul où la convergence de la suite t_n, c'est-à-dire l'unicité de τ, soit générale.

8. Notations communes aux trois cas. — Nous considérerons un point particulier (u, v) du bicercle, qui sera en général l'origine, et noterons (u_n, v_n) son image par la $n^{\text{ième}}$ itérée t_n de la transformation t. Comme t est supposée sans point double intérieur au bicercle, d'après le théorème 3 la suite des points (u_n, v_n) a tous ses points d'accumulation sur la frontière du bicercle, c'est-à-dire que

$$(1-|u_n|)(1-|v_n|)\to 0.$$

$\mathrm{E}(z_1, z_2)$ désignera la distance non euclidienne dans le cercle-unité $|z|<1$:

$$\mathrm{E}(z_1, z_2)=\arg\operatorname{th}\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|;$$

dans plusieurs calculs, on posera

$$z_1=r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2=r_2 e^{i\theta_2},$$

et on utilisera la formule

$$1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|^2=\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}{1-2r_1 r_2\cos(\theta_1-\theta_2)+(r_1 r_2)^2}. \tag{8.1}$$

Le lieu des points z tels que $\mathrm{E}(z_1, z)=\rho$ sera appelé cercle de pseudo-centre z_1 et de pseudo-rayon ρ; deux cercles de même pseudo-rayon seront dits pseudo-égaux.

D'après l'extension à deux variables du lemme de Schwarz [1], on a

$$\mathrm{E}[f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)]\leq\operatorname{Max}[\mathrm{E}(x_1, x_2), \mathrm{E}(y_1, y_2)] \tag{8.2}$$

pourvu que $|x_1|$, $|x_2|$, $|y_1|$, $|y_2|<1$, et de même pour g; en particulier, en posant

$$d=\operatorname{Max}[\mathrm{E}(u_1, u), \mathrm{E}(v_1, v)], \tag{8.3}$$

et appliquant (8.2) aux points (u_1, v_1) et (u, v) et à la fonction f_n ou g_n, on a $\mathrm{E}(u_{n+1}, u_n)$ et $\mathrm{E}(v_{n+1}, v_n)\leq d$, *a fortiori*

$$\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}<\frac{1-|u_{n+1}|}{1-|u_n|} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-|v_{n+1}|}{1-|v_n|}<\frac{1+\operatorname{th} d}{1-\operatorname{th} d}. \tag{8.4}$$

LEMME *commun aux deux cas* (1er *et* 3e) *où la fonction* $\eta(x)$ *existe. — Dans ces deux cas, on peut trouver deux nombres positifs* a *et* b, *dépendant de* u, v, *tels que les inégalités*

$$\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|}<a \qquad \text{et} \qquad \frac{1-|v_{n+1}|}{1-|v_n|}<1+b$$

soient incompatibles.

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite d'entiers n_k, croissant indéfiniment, tels que

$$\lim \frac{1-|v_{n_k}|}{1-|u_{n_k}|}=0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\,\frac{1-|v_{n_k+1}|}{1-|v_{n_k}|}\leq 1;$$

en se bornant au besoin à une suite partielle, on peut supposer en outre, d'une part que $\frac{1-v_{n_k+1}}{1-v_{n_k}}$ a une limite ≤ 1, d'autre part que la suite $g_{n_k}(x, y)$ converge; les hypothèses faites, jointes à $(1-|u_{n_k}|)(1-|v_{n_k}|)\to 0$, entraînent $|v_{n_k}|\to 1$, $|v_{n_k+1}|\to 1$; la limite de la suite $g_{n_k}(x, y)$ est alors une constante $e^{i\beta}$, et en particulier

$$v_{n_k}=g_{n_k}(u, v)\to e^{i\beta}, \qquad v_{n_k+1}=g_{n_k}(u_1, v_1)\to e^{i\beta}.$$

En appliquant (8.1) aux couples (x, u_{n_k}) et (y, v_{n_k}), on a

$$1-\left|\frac{x-u_{n_k}}{1-\bar{x}u_{n_k}}\right|^2\geq(1-|u_{n_k}|)\frac{1-|x|}{1+|x|}, \qquad 1-\left|\frac{y-v_{n_k}}{1-\bar{y}v_{n_k}}\right|^2<2(1-|v_{n_k}|)\frac{1+|y|}{1-|y|};$$

puisque $\frac{1-|v_{n_k}|}{1-|u_{n_k}|}\to 0$, on peut écrire pour n_k assez grand, x et y étant donnés :

$$1-\left|\frac{x-u_{n_k}}{1-\bar{x}u_{n_k}}\right|^2>1-\left|\frac{y-v_{n_k}}{1-\bar{y}v_{n_k}}\right|^2,$$

c'est-à-dire $E(x, u_{n_k})<E(y, v_{n_k})$; la formule (8.2) donne alors

$$E[g(x, y), v_{n_k+1}]\leq E(y, v_{n_k});$$

en utilisant à nouveau (8.1) et faisant croître n_k indéfiniment, il vient

$$\frac{|e^{i\beta}-g(x, y)|^2}{1-|g(x, y)|^2}\leq\frac{|e^{i\beta}-y|^2}{1-|y|^2},$$

c'est-à-dire que, quels que soient x et y, $g(x, y)$ est intérieur, au sens large, au cercle passant par le point y et tangent en $e^{i\beta}$ au cercle-unité; or (*cf.* th. 1, n° 2) ce résultat est incompatible avec les hypothèses faites : $t^2(x)$ n'est pas la transformation identique quel que soit x, et la fonction $\eta(x)$ existe.

9. ÉTUDE DU PREMIER CAS. — Dans ce cas, comme au n° 2, nous posons

$$X=\frac{e^{i\alpha}+x}{e^{i\alpha}-x}, \qquad x=e^{i\alpha}\frac{X-1}{X+1},$$

et nous remplaçons la transformation

$$(t) \qquad x_1 = f(x, y), \qquad y_1 = g(x, y),$$

opérant dans le bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$, par la transformation

$$(T) \qquad X_1 = F(X, y), \qquad y_1 = G(X, y),$$

opérant dans le domaine D : $\mathrm{Re}\,X > 0$, $|y| < 1$. Par hypothèse, $\mathrm{Re}\,F(X, y) \geqq \mathrm{Re}\,X$, donc la suite des itérées T_n vérifie $\mathrm{Re}\,F_{n+1}(X, y) \geqq \mathrm{Re}\,F_n(X, y)$; la suite non décroissante des fonctions harmoniques $\mathrm{Re}\,F_n(X, y)$ a pour limite, uniforme sur tout compact, soit la constante $+\infty$, soit une fonction harmonique $\delta(X, y)$ positive et finie. Dans le 1er cas, $F_n(X, y) \to \infty$, donc $f_n(x, y) \to e^{i\alpha}$ quels que soient x et y.

Supposons donc $\delta(X, y) < +\infty$, et posons

$$F_n(X, y) = A_n(X, y) + iB_n(X, y);$$

on a

$$B_{n+1}(X, y) = B_n(X_1, y_1);$$

si $c = a + ib$ est une variable complexe auxiliaire, on a

$$\mathrm{Re}[(1 - c)X + cX_1] > 0 \qquad \text{et} \qquad |(1 - c)y + cy_1| < 1$$

pour c réel compris entre 0 et 1, donc, le point (X, y) étant pris dans un compact $K \subset D$ et $\varepsilon > 0$ convenablement choisi, pour $-\varepsilon \leqq a \leqq 1 + \varepsilon$, $|b| \leqq \varepsilon$, conditions qui définissent dans le plan complexe c un domaine (d); dans ce domaine,

$$A_n[(1 - c)X + cX_1, (1 - c)y + cy_1] \qquad \text{et} \qquad B_n[(1 - c)X + cX_1, (1 - c)y + cy_1]$$

sont deux fonctions harmoniques associées de la variable complexe c; on a donc

$$B_n(X_1, y_1) - B_n(X, y) = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial b} A_n[(1 - c)X + cX_1, (1 - c)y + cy_1]\, dc,$$

intégrale prise le long du segment $(0, 1)$. Or,

$$A_n[(1 - c)X + cX_1, (1 - c)y + cy_1] \to \delta[(1 - c)X + cX_1, (1 - c)y + cy_1]$$

uniformément pour $(X, y) \in K$, $c \in (d)$, donc

$$\frac{\partial}{\partial b} A_n[(1 - c)X + cX_1, (1 - c)y + cy_1] \to \frac{\partial}{\partial b} \delta[(1 - c)X + cX_1, (1 - c)y + cy_1]$$

uniformément pour $(X, y) \in K$, c réel compris entre 0 et 1; de là résulte que

$$B_{n+1}(X, y) - B_n(X, y) = B_n(X_1, y_1) - B_n(X, y)$$

a une limite $\sigma(X, y)$ uniformément pour $(X, y) \in K$; alors

$$F_{n+1}(X, y) - F_n(X, y) \to i\sigma(X, y)$$

uniformément sur tout compact, donc $\sigma(X, y)$ est une constante σ ([3]).

Si $\sigma \neq 0$, le fait que $B_{n+1}(X, y) - B_n(X, y) \to \sigma$ entraîne $B_n(X, y)$ infiniment grand équivalent à $n\sigma$, donc de nouveau

$$F_n(X, y) \to \infty, \qquad f_n(x, y) \to e^{i\alpha}.$$

10. Soit donc à étudier le cas $\sigma = 0$; posons (*cf.* n° 8) $u = v = 0$ et, de même que

$$f_n(0, 0) = u_n, \qquad F_n(1, 0) = U_n = P_n + iQ_n;$$

alors

$$P_n \to \delta(1, 0), \qquad Q_{n+1} - Q_n \to 0.$$

D'autre part,

$$u_n = e^{i\alpha} \frac{U_n - 1}{U_n + 1} \quad \text{entraîne} \quad 1 - |u_n|^2 = \frac{4P_n}{(P_n + 1)^2 + Q_n^2};$$

pour toute suite d'entiers croissants n_k telle que Q_{n_k} ait une limite, ou bien elle est finie, alors c'est aussi la limite de Q_{n_k+1}, donc $|u_{n_k}|$ et $|u_{n_k+1}|$ ont la même limite inférieure à 1, ou bien elle est infinie, Q_{n_k} et Q_{n_k+1} sont infiniment grands asymptotes, $1 - |u_{n_k}|$ et $1 - |u_{n_k+1}|$ sont infiniment petits équivalents.

Ainsi $\frac{1 - |u_{n+1}|}{1 - |u_n|} \to 1$; considérons seulement les n assez grands pour que

$$\frac{1 - |u_{n+1}|}{1 - |u_n|} < 1 + b' < 1 + b,$$

a et b étant les deux nombres positifs qui vérifient le lemme du n° 8; d'après ce lemme,

$$\frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|} < a \quad \text{entraîne} \quad \frac{1 - |v_{n+1}|}{1 - |u_{n+1}|} > \frac{1 + b}{1 + b'} \frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|}$$

et, d'autre part, d'après (8.4),

$$\frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|} \geq a \quad \text{entraîne} \quad \frac{1 - |v_{n+1}|}{1 - |u_{n+1}|} > a\left(\frac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^2;$$

ainsi, le rapport $\frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|}$ croît, au moins en progression géométrique, tant qu'il n'a pas dépassé la valeur a et, s'il l'a dépassée, il ne peut retomber au-dessous de la valeur $a\left(\frac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^2$; celle-ci est donc une borne inférieure du rapport pour n assez grand.

Le résultat obtenu :

$$\varliminf \frac{1 - |v_n|}{1 - |u_n|} > 0,$$

([3]) Ce qui précède est l'extension d'un raisonnement employé par M. Wolff [8] pour l'itération dans un demi-plan; même remarque un peu plus loin (n° 13).

joint à

$$\lim[(1-|u_n|)(1-|v_n|)]=0,$$

entraîne $|u_n|\to 1$; comme tous les points u_n sont intérieurs, au sens large, au cercle dont un diamètre a pour extrémités o et $e^{i\alpha}$, on doit avoir $u_n\to e^{i\alpha}$, et toutes les transformations limites τ sont de la forme

$$x_1=e^{i\alpha}, \qquad y_1=\psi(x,y).$$

Remarque. — Dans le cas particulier où la fonction $\eta(x)$ est une constante y_0, c'est-à-dire $g(x,y_0)\equiv y_0$, on peut écrire

$$\mathrm{E}[g_{n+1}(x,y),y_0]\leq \mathrm{E}[g_n(x,y),y_0],$$

en appliquant (8.2) aux points $[f_n(x,y),g_n(x,y)]$, $[f_n(x,y),y_0]$ et à la fonction g; ainsi $\mathrm{E}[g_n(x,y),y_0]$ a une limite pour x,y donnés; si donc il existe deux transformations limites :

$$(\tau) \qquad x_1=e^{i\alpha}, \qquad y_1=\psi(x,y);$$

$$(\tau') \qquad x_1=e^{i\alpha}, \qquad y_1=\psi'(x,y),$$

on a

$$\mathrm{E}[\psi'(x,y),y_0]=\mathrm{E}[\psi(x,y),y_0]$$

et, par suite,

$$\frac{\psi'(x,y)-y_0}{1-\overline{y}_0\psi'(x,y)}\equiv e^{i\omega}\frac{\psi(x,y)-y_0}{1-\overline{y}_0\psi(x,y)}.$$

Ainsi, dans ce cas particulier, les fonctions $\psi(x,y),\psi'(x,y)$ qui définissent deux transformations limites τ,τ' se déduisent l'une de l'autre par une substitution homographique conservant le cercle-unité; le 2e exemple ci-dessous va nous montrer qu'il n'en est plus ainsi dans le cas général.

11. Exemples du premier cas. — 1° Soit la transformation

$$(t) \qquad \frac{x_1-1}{x_1+1}=\lambda\frac{x-1}{x+1}\ (0<\lambda<1), \qquad y_1=e^{i\gamma}xy,$$

pour laquelle $e^{i\alpha}=1$, $\eta(x)\equiv 0$: c'est un exemple du cas particulier qui vient d'être étudié; on a, à la $n^{\text{ième}}$ itération :

$$y_n=e^{in\gamma}xx_1\dots x_{n-1}y;$$

comme $\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}\to\lambda$, $xx_1\dots x_n$ a pour limite une fonction $\pi(x)$ holomorphe et $\not\equiv 0$; si $\frac{\gamma}{\pi}$ est irrationnel, les transformations limites τ sont toutes les transformations

$$x_1=1, \qquad y_1=e^{i\omega}y\,\pi(x).$$

2° Soit, dans le plan de la variable y, un domaine univalent Δ, contenu dans

le cercle $|y|<1$, admettant un bout premier E tel que, C étant un cercle plein fermé centré en un point quelconque de E, chaque composante connexe de l'ensemble ouvert $\Delta - C$ ait une frontière sans point commun avec E : un tel domaine Δ se construit aisément, en prenant pour E un segment de droite ou un arc de cercle par exemple, par pliage indéfini, le long de E, d'une bande en accordéon. Soit $y=\eta(x)$ une correspondance conforme entre le cercle $|x|<1$ et le domaine Δ, dans laquelle le point $x=1$ ait pour image E, et considérons la transformation

$$(t) \qquad \frac{x_1-1}{x_1+1}=\lambda\frac{x-1}{x+1}\ (0<\lambda<1), \qquad y_1=\frac{y+\eta(x)}{2},$$

pour laquelle $e^{i\alpha}=1$ et $\eta(x)$ a le sens donné à cette notation depuis le n° 7. u étant choisi arbitrairement dans le cercle $|x|<1$, soit A l'arc de cercle d'extrémités ± 1 qui passe par u.

D'après le théorème de Faber sur les fonctions univalentes, pour tout point x_0 du cercle $|x|<1$, le domaine Δ contient le cercle

$$|y-\eta(x_0)|<\frac{(1-|x_0|^2)\,|\eta'(x_0)|}{4};$$

par suite

$$(1-|x|)\,\eta'(x)\to 0 \quad \text{quand} \quad x\to 1;$$

en particulier le maximum de $|\eta'(x)|$ sur l'arc u_nu_{n+1} de A est $o\left(\frac{1}{1-|u_{n+1}|}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{|u_{n+1}-u_n|}\right)$ puisque

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{1-u_{n+1}}\to\frac{1-\lambda}{\lambda};$$

ainsi l'arc tracé dans Δ qui est l'image, par la transformation $y=\eta(x)$, de l'arc de A d'extrémités u_n, u_{n+1} a une longueur infiniment petite quand $n\to+\infty$.

L'ensemble d'accumulation de la suite des points $\eta(u_n)$, qui *a priori* est une partie de E, est E lui-même : si, en effet, un point y_0 de E n'était pas point d'accumulation de cette suite, on aurait

$$|\eta(u_n)-y_0|>\varepsilon>0$$

quel que soit n, donc on pourrait choisir n_0 tel que l'arc image, par $y=\eta(x)$, de l'arc de A d'extrémités u_{n_0}, 1 soit disjoint au cercle C : $|y-y_0|\leq\frac{\varepsilon}{2}$, donc tracé dans l'une des composantes connexes de l'ensemble ouvert $\Delta - C$, ce qui est absurde puisque la frontière de cette composante est sans point commun avec E.

D'autre part, on peut écrire

$$v_{n+1}-\eta(u_{n+1})=\frac{v_n-\eta(u_n)}{2}+[\eta(u_n)-\eta(u_{n+1})];$$

comme le crochet est un infiniment petit, si la suite des nombres $\varphi_n - \eta(u_n)$ admet ω comme point d'accumulation, elle admet aussi comme points d'accumulation $\frac{\omega}{2}$, 2ω et, en recommençant le même raisonnement, $2^k\omega$ quel que soit l'entier k; or elle est bornée, donc $\omega = 0$, c'est-à-dire que $\varphi_n - \eta(u_n) \to 0$.

Ainsi la suite φ_n a les mêmes points d'accumulation que la suite $\eta(u_n)$: ces points forment l'ensemble E; les transformations limites τ sont donc de la forme $x_1 = 1$, $y_1 = \psi(x, y)$, avec une infinité de fonctions ψ distinctes, E étant le lieu des points $\psi(u, v)$. Pour qu'une fonction ψ soit une constante de module 1, il faut et il suffit que $|\psi(u, v)| = 1$; or on peut choisir pour E un arc de la circonférence $|y| = 1$, ou une corde de cette circonférence, etc.

On peut ajouter que, dans cet exemple, toutes les fonctions ψ sont des constantes, car l'ensemble E n'a pas de point intérieur.

12. Étude du second cas. — Dans ce cas, nous posons, non seulement

$$X = \frac{e^{i\alpha} + x}{e^{i\alpha} - x}, \qquad x = e^{i\alpha}\frac{X - 1}{X + 1},$$

mais aussi

$$Y = \frac{e^{i\beta} + y}{e^{i\beta} - y}, \qquad y = e^{i\beta}\frac{Y - 1}{Y + 1},$$

et nous remplaçons la transformation t, opérant dans le bicercle $|x| < 1$, $|y| < 1$, par la transformation

$$(T) \qquad X_1 = F(X, Y), \qquad Y_1 = G(X, Y),$$

opérant dans le domaine D : $\mathrm{Re}X > 0$, $\mathrm{Re}Y > 0$. Par hypothèse

$$\mathrm{Re}F(X, Y) \geqq \mathrm{Re}X \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Re}G(X, Y) \geqq \mathrm{Re}Y,$$

donc $\mathrm{Re}F_n(X, Y)$ et $\mathrm{Re}G_n(X, Y)$ forment deux suites non décroissantes de fonctions harmoniques; si l'une ou l'autre a pour limite $+\infty$,

$$f_n(x, y) \to e^{i\alpha} \qquad \text{ou} \qquad g_n(x, y) \to e^{i\beta}.$$

Supposons donc que les deux suites aient pour limites deux fonctions harmoniques $\delta(X, Y)$, $\delta'(X, Y)$ positives et finies; le raisonnement du n° 9 montre que

$$F_{n+1}(X, Y) - F_n(X, Y) \to i\sigma, \qquad G_{n+1}(X, Y) - G_n(X, Y) \to i\sigma',$$

σ et σ' étant deux constantes, et que, si l'une d'elles n'est pas nulle, on a de nouveau

$$f_n(x, y) \to e^{i\alpha} \qquad \text{ou} \qquad g_n(x, y) \to e^{i\beta}.$$

Montrons par l'absurde que l'une de ces conclusions est valable.

Sinon, il existerait deux suites partielles d'entiers croissants n_k, p_k telles que

$$f_{n_k}(x, y) \to \varphi(x, y), \qquad g_{p_k}(x, y) \to \psi(x, y),$$

avec

$$|\varphi(x, y)| < 1, \qquad |\psi(x, y)| < 1,$$

ou, en passant dans le domaine D :

$$F_{n_k}(X, Y) \to \Phi(X, Y), \qquad G_{p_k}(X, Y) \to \Psi(X, Y),$$

les fonctions Φ et Ψ étant finies; cela exige, d'une part, que

$$\delta(X, Y) = \mathrm{Re}\,\Phi(X, Y) \qquad \text{et} \qquad \delta'(X, Y) = \mathrm{Re}\,\Psi(X, Y)$$

soient finies, d'autre part, que $\sigma = \sigma' = 0$ et, par conséquent,

$$\Phi[F(X, Y), G(X, Y)] \equiv \Phi(X, Y), \qquad \Psi[F(X, Y), G(X, Y)] \equiv \Psi(X, Y).$$

13. Cela étant, posons $u = v = 0$ et, en conséquence,

$$F_n(1, 1) = U_n, \qquad G_n(1, 1) = V_n;$$

soit S_n le « segment de droite » qui joint, dans le domaine D, les points de coordonnées (U_n, V_n) et (U_{n+1}, V_{n+1}), c'est-à-dire le lieu, pour $0 \leq t \leq 1$, du point de coordonnées $(1-t)U_n + tU_{n+1}$, $(1-t)V_n + tV_{n+1}$, et soit

$$M_n = \sup_{S_n} \delta(X, Y).$$

Si $\Omega(X, Y)$ est holomorphe sur D et $\mathrm{Re}\,\Omega(X, Y) > 0$, on a

$$\left|\frac{\Omega(X', Y) - \Omega(X, Y)}{\Omega(X', Y) + \overline{\Omega(X, Y)}}\right| \leq \left|\frac{X' - X}{X' + X}\right|$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{\Omega(X', Y) - \Omega(X, Y)}{X' - X}\right| \leq \left|\frac{\Omega(X', Y) + \overline{\Omega(X, Y)}}{X' + X}\right|,$$

d'où, en faisant tendre X' vers X :

$$|\Omega'_X| \leq \frac{\mathrm{Re}\,\Omega}{\mathrm{Re}\,X} \qquad \text{et, de même,} \qquad |\Omega'_Y| \leq \frac{\mathrm{Re}\,\Omega}{\mathrm{Re}\,Y}.$$

Dans ces inégalités, on peut poser $\Omega = \Phi$, d'où

$$(13.1) \qquad |\Phi'_X(X, Y)| \leq \frac{M_n}{\mathrm{Re}\,U_n}, \qquad |\Phi'_Y(X, Y)| \leq \frac{M_n}{\mathrm{Re}\,V_n} \qquad \text{pour} \quad (X, Y) \in S_n;$$

on peut aussi poser $\Omega = \Phi - F$, d'où

$$(13.2) \qquad \left|\frac{\partial(\Phi - F)}{\partial X}(X, Y)\right| \leq \frac{\delta(X, Y) - \mathrm{Re}\,X}{\mathrm{Re}\,X}, \qquad \left|\frac{\partial(\Phi - F)}{\partial Y}(X, Y)\right| \leq \frac{\delta(X, Y) - \mathrm{Re}\,X}{\mathrm{Re}\,Y}.$$

De (13.1) résulte que

$$\left|\frac{d}{dt}\Phi[(1-t)U_n + tU_{n+1}, (1-t)V_n + tV_{n+1}]\right| \leq M_n\left(\frac{|U_{n+1} - U_n|}{\mathrm{Re}\,U_n} + \frac{|V_{n+1} - V_n|}{\mathrm{Re}\,V_n}\right)$$

et, par suite, pour $(X, Y) \in S_n$:

$$\delta(X, Y) - \delta(U_n, V_n) \leq |\Phi(X, Y) - \Phi(U_n, V_n)| \leq M_n \left(\frac{|U_{n+1} - U_n|}{\operatorname{Re} U_n} + \frac{|V_{n+1} - V_n|}{\operatorname{Re} V_n} \right);$$

comme

$$\delta(U_n, V_n) = \lim_{p = +\infty} \operatorname{Re} F_{n+p}(U, V) = \delta(U, V),$$

comme d'autre part

$$U_{n+1} - U_n \to 0, \qquad V_{n+1} - V_n \to 0,$$

tandis que $\operatorname{Re} U_n \geq 1$, $\operatorname{Re} V_n \geq 1$, on a

$$\delta(U, V) \leq M_n \leq \frac{\delta(U, V)}{1 - \dfrac{|U_{n+1} - U_n|}{\operatorname{Re} U_n} - \dfrac{|V_{n+1} - V_n|}{\operatorname{Re} V_n}}, \qquad \text{donc} \quad M_n \to \delta(U, V).$$

On a ensuite, pour $(X, Y) \in S_n$:

$$\delta(X, Y) - \operatorname{Re} X \leq M_n - \operatorname{Re} U_n = \varepsilon_n$$

[différence de deux quantités dont $\delta(U, V)$ est la limite commune]; de (13.2) résulte que

$$\left| \frac{d}{dt} (\Phi - F)[(1-t) U_n + t U_{n+1}, (1-t) V_n + t V_{n+1}] \right| \leq (M_n - \operatorname{Re} U_n) \left(\frac{|U_{n+1} - U_n|}{\operatorname{Re} U_n} + \frac{|V_{n+1} - V_n|}{\operatorname{Re} V_n} \right);$$

enfin

$$U_{n+2} - U_{n+1} = F(U_{n+1}, V_{n+1}) - F(U_n, V_n) = -(\Phi - F)(U_{n+1}, V_{n+1}) + (\Phi - F)(U_n, V_n)$$

donc

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \varepsilon_n (|U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|);$$

un raisonnement analogue, où Φ est remplacé par Ψ et F par G, donne

$$V_{n+2} - V_{n+1} \leq \varepsilon'_n (|U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|),$$

d'où

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| + |V_{n+2} - V_{n+1}| \leq (\varepsilon_n + \varepsilon'_n)(|U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|);$$

ainsi $|U_{n+1} - U_n| + |V_{n+1} - V_n|$ est le terme général d'une série convergente, donc U_n et V_n ont des limites finies, c'est-à-dire que le point (u_n, v_n) a pour limite un point intérieur au bicercle (3); ce résultat est en contradiction avec le théorème 3 (n° 5) et l'hypothèse, faite depuis le n° 6, que t est dépourvue de point double intérieur au bicercle. La propriété annoncée au n° 7 est donc établie.

14. Remarques sur le second cas. — 1° Pour chaque y, $f(x, y)$, considérée comme fonction de x seul, a au point $e^{i\alpha}$ une dérivée angulaire $\lambda(y)$ comprise entre 0 et 1 (*cf.* n° 1); comme le point $f(re^{i\alpha}, y)$ $(0 < r < 1)$ est intérieur, au

sens large, au cercle qui a pour extrémités d'un diamètre les points $re^{i\alpha}$ et $e^{i\alpha}$, on a

$$|e^{i\alpha} - f(re^{i\alpha}, y)| \leq 1 - r \quad \text{quel que soit } y;$$

ainsi les fonctions $\frac{e^{i\alpha} - f(re^{i\alpha}, y)}{e^{i\alpha}(1-r)}$, holomorphes pour $|y| < 1$, sont bornées dans leur ensemble et $\lambda(y)$, limite de ces fonctions pour $r \to 1$, est holomorphe pour $|y| < 1$; c'est donc une constante λ. On montrerait de même que $g(x, y)$, considérée comme fonction de y seul, a pour dérivée angulaire au point $e^{i\beta}$ une constante μ comprise entre 0 et 1.

En passant dans le domaine D, on a

$$\mathrm{Re}F(X, Y) \geq \frac{\mathrm{Re}X}{\lambda}, \qquad \mathrm{Re}G(X, Y) \geq \frac{\mathrm{Re}Y}{\mu};$$

si donc $\lambda < 1$ et $\mu < 1$, on peut affirmer plus qu'il n'a été dit au n° 7 pour ce 2° cas, à savoir que

$$f_n(x, y) \to e^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad g_n(x, y) \to e^{i\beta}.$$

Mais il n'en est plus toujours ainsi (contrairement au cas d'une variable z) si l'une au moins des dérivées angulaires λ, μ est égale à 1, comme le montrent les exemples ci-dessous (n° 15).

2° Si une suite d'itérées de t a pour limite

$$(\tau) \qquad x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = \psi(x, y), \qquad \text{avec} \quad |\psi(x, y)| < 1,$$

on a

$$\delta'(X, Y) = \mathrm{Re}\Psi(X, Y) < +\infty;$$

même conclusion avec une autre transformation limite :

$$(\tau') \qquad x_1 = e^{i\alpha}, \qquad y_1 = \psi'(x, y), \qquad \psi'(x, y) < 1,$$

donc $\Psi'(X, Y) - \Psi(X, Y)$ est une constante imaginaire pure, τ et τ' se déduisent l'une de l'autre par une substitution homographique conservant le cercle-unité, à savoir une substitution parabolique dont $e^{i\beta}$ est le point double. L'ensemble d'accumulation de la suite v_n, c'est-à-dire le lieu des points $\psi(u, v)$, est donc porté par une circonférence tangente en $e^{i\beta}$ au cercle-unité.

On a, d'autre part, dans le cas qui nous occupe, $\sigma' = 0$, c'est-à-dire

$$V_{n+1} - V_n \to 0, \qquad \text{d'où} \qquad v_{n+1} - v_n \to 0;$$

l'ensemble d'accumulation de la suite v_n est un continu, donc un arc (extrémités comprises) d'un cercle tangent en $e^{i\beta}$ au cercle-unité; cet arc ne peut admettre $e^{i\beta}$ comme point intérieur à moins d'être le cercle tout entier. Le deuxième des exemples ci-dessous montre qu'à part cette restriction il est quelconque.

15. Exemples du second cas. — 1° Soit la transformation t qui a pour image dans le domaine D :

$$(T) \qquad X_1 = X + 2\sqrt{XY} + 1, \qquad Y_1 = Y + \frac{1}{X},$$

où $|\arg\sqrt{XY}| < \frac{\pi}{2}$, ce qui définit une fonction holomorphe sur D puisque l'on a toujours $|\arg(XY)| < \pi$. Considérons alors les nombres réels

$$U_n = F_n(1, 1), \qquad V_n = G_n(1, 1),$$

qui forment deux suites croissantes, et montrons par récurrence que $U_n \geq (n+1)^2$: c'est vrai pour $U_1 = 4$ et, si c'est vrai pour U_n, comme $V_n > 1$, on a

$$U_{n+1} > (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+2)^2; \qquad \text{alors} \quad V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_n} \leq \frac{1}{(n+1)^2},$$

la suite V_n converge. Grâce à la 2e remarque ci-dessus, on peut affirmer que $G_n(X, Y)$ a une limite finie, tandis que $F_n(X, Y) \to \infty$.

Sur cet exemple, les deux dérivées angulaires λ, μ sont égales à 1 ; en effet, on a, quel que soit Y,

$$\frac{1}{\lambda} = \inf_{\mathrm{Re}\,X > 0} \frac{\mathrm{Re}\,X_1}{\mathrm{Re}\,X}$$

et, quel que soit X,

$$\frac{1}{\mu} = \inf_{\mathrm{Re}\,Y > 0} \frac{\mathrm{Re}\,Y_1}{\mathrm{Re}\,Y};$$

dans l'exemple qui suit, au contraire, $\lambda < 1$ et $\mu = 1$.

2° Soit, dans le plan de la variable Y, un domaine univalent Δ, contenu dans la bande $0 < \mathrm{Re}\,Y < a$, admettant un bout premier E tel que, C étant un cercle plein fermé centré en un point quelconque de E, chaque composante connexe de l'ensemble ouvert $\Delta - C$ ait une frontière sans point commun avec E; on suppose, en outre, d'une part, que E est un segment (dont une extrémité, ou les deux, peuvent être rejetées à l'infini) de la droite $\mathrm{Re}\,Y = a$, d'autre part que la frontière de Δ se compose de E et d'un arc simple de Jordan Γ, lieu du point $Y = H(t)$ ($|t| < 1$), la fonction $\mathrm{Re}\,H(t)$ étant décroissante pour $t < 0$, croissante pour $t > 0$ et tendant vers a quand $t \to \pm 1$. Soit $Y = \Theta(X)$ une correspondance conforme entre le demi-plan $\mathrm{Re}\,X > 0$ et le domaine Δ, dans laquelle le point $X = \infty$ ait pour image E et le point $X = 0$ pour image $Y = H(0)$, et considérons la transformation t qui a pour image dans D :

$$(T) \qquad X_1 = \frac{X}{\lambda} \; (0 < \lambda < 1), \qquad Y_1 = Y + \Theta\left(\frac{X}{\lambda}\right) - \Theta(X).$$

Le point $i\varpi$ (ϖ réel fini) a pour image, par $Y = \Theta(X)$, un point de Γ dont le paramètre $t = h(\varpi)$ est fonction croissante de ϖ, $h(0) = 0$; quand $X \to i\varpi$,

$$\Theta\left(\frac{X}{\lambda}\right) - \Theta(X) \to H\left[h\left(\frac{\varpi}{\lambda}\right)\right] - H[h(\varpi)],$$

dont la partie réelle est positive pour $w \neq 0$, nulle pour $w = 0$; si $X \to \infty$, $\mathrm{Re}\Theta(X) \to a$, ainsi que $\mathrm{Re}\Theta\left(\frac{X}{\lambda}\right)$; on a donc

$$\mathrm{Re}\left[\Theta\left(\frac{X}{\lambda}\right) - \Theta(X)\right] > 0 \qquad \text{pour} \quad \mathrm{Re}X > 0,$$

et la transformation t relève de notre second cas. Pour la $n^{\text{ième}}$ itérée, on a

$$X_n = \frac{X}{\lambda^n}, \qquad Y_n = Y + \Theta\left(\frac{X}{\lambda^n}\right) - \Theta(X);$$

le raisonnement fait au n° 11 (ex. 2) montre que E est, pour X donné, l'ensemble d'accumulation de la suite des points $\Theta\left(\frac{X}{\lambda^n}\right)$; X et Y étant donnés, l'ensemble d'accumulation de la suite Y_n se déduit de E par la translation $Y - \Theta(X)$; avec les notations du n° 7, les fonctions $\psi(x, y)$ ne sont pas des constantes, $e^{i\beta}$ exceptée.

16. Étude du troisième cas.

Lemme 1. — *Il existe deux nombres $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ de module 1 et deux nombres positifs λ, μ possédant la propriété suivante : quels que soient les nombres ρ, ρ' compris entre ± 1 et tels que $\lambda\frac{1+\rho}{1-\rho} = \mu\frac{1+\rho'}{1-\rho'}$, si le point x est intérieur, au sens large, au cercle qui a pour extrémités d'un diamètre les points $e^{i\alpha}$, $\rho e^{i\alpha}$, et si le point y est intérieur, au sens large, au cercle qui a pour extrémités d'un diamètre les points $e^{i\beta}$, $\rho' e^{i\beta}$, alors les points $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont respectivement intérieurs, au sens large, à ces deux cercles.*

Considérons, dans le cercle-unité $|x| < 1$, la transformation analytique $x_1 = \xi[\eta_1(x)]$: si elle admettait un point double x_0 intérieur au cercle-unité, le point $[x_0, \eta_1(x_0)]$ serait un point double de t intérieur au bicercle, hypothèse écartée depuis le n° 6; dans ces conditions (*cf.* n° 1), la fonction $\xi[\eta_1(x)]$ admet, en un point $e^{i\alpha}$ de la circonférence-unité, une dérivée angulaire λ telle que $0 < \lambda \leq 1$: quand $x \to e^{i\alpha}$, avec

$$|\arg(1 - e^{-i\alpha}x)| \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

on a

$$\frac{1 - |\xi[\eta(x)]|}{1 - |x|} \to \lambda, \quad \xi[\eta(x)] \to e^{i\alpha}.$$

D'autre part, les inégalités

$$\left|\frac{\eta(x) - \eta(0)}{1 - \overline{\eta(0)}\,\eta(x)}\right| \leq |x|, \qquad \left|\frac{\xi(y) - \xi(0)}{1 - \overline{\xi(0)}\,\xi(y)}\right| \leq |y|$$

entraînent

$$1 - |\eta(x)| \geq \frac{1 - |\eta(0)|}{1 + |\eta(0)|}(1 - |x|), \qquad 1 - |\xi[\eta(x)]| \geq \frac{1 - |\xi(0)|}{1 + |\xi(0)|}[1 - |\eta(x)|],$$

donc $\frac{1-|\eta(x)|}{1-|x|}$ a des limites d'indétermination positives et finies quand $x \to e^{i\alpha}$ dans l'angle $|\arg(1-e^{-i\alpha}x)| \leq \theta$; choisissons dans cet angle une suite de points $x_k \to e^{i\alpha}$ tels que

$$\frac{1-|\xi[\eta(x_k)]|}{1-|x_k|} \to \lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{1-|\eta(x_k)|}{1-|x_k|} \to \mu,$$

μ étant positif et fini;

$$\xi[\eta(x_k)] \to e^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad |\eta(x_k)| \to 1;$$

en nous bornant à une suite partielle (notée encore x_k), nous pouvons supposer que $\eta(x_k) \to e^{i\beta}$.

$e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, λ, μ étant ainsi définis, soient C et C′ deux cercles répondant à l'énoncé du lemme, x et y deux points respectivement intérieurs, strictement, à ces deux cercles; pour k assez grand, x est intérieur au cercle de pseudo-centre $\xi[\eta(x_k)]$ passant par le point $\rho\xi[\eta(x_k)]$, y est intérieur au cercle de pseudo-centre $\eta(x_k)$ passant par le point $\rho'\eta(x_k)$; si l'on pose

$$\rho_k = \frac{(1-\rho)\,|\xi[\eta(x_k)]|}{1-\rho\,|\xi[\eta(x_k)]|^2}, \qquad \rho'_k = \frac{(1-\rho')\,|\eta(x_k)|}{1-\rho'\,|\eta(x_k)|^2},$$

les pseudo-rayons de ces deux cercles sont respectivement $\operatorname{arg\,th}\rho_k$, $\operatorname{arg\,th}\rho'_k$; soit encore

$$\delta_k = \operatorname{Max}(\operatorname{arg\,th}\rho_k, \operatorname{arg\,th}\rho'_k);$$

les inégalités

$$\mathrm{E}\{x, \xi[\eta(x_k)]\} < \delta_k, \qquad \mathrm{E}[y, \eta(x_k)] < \delta_k$$

entraînent, d'après (8.2),

$$\mathrm{E}\{f(x,y), \xi[\eta(x_k)]\} < \delta_k.$$

Or, quand $k \to +\infty$, on a

$$1-\rho_k \sim \frac{1+\rho}{1-\rho}\{1-|\xi[\eta(x_k)]|\} \sim \lambda\frac{1+\rho}{1-\rho}(1-|x_k|),$$

$$1-\rho'_k \sim \frac{1+\rho'}{1-\rho'}[1-|\eta(x_k)|] \sim \mu\frac{1+\rho'}{1-\rho'}(1-|x_k|);$$

ainsi $1-\rho'_k \sim 1-\rho_k$, donc aussi $1-\operatorname{th}\delta_k \sim 1-\rho_k$, d'où résulte que le cercle de pseudo-centre $\xi[\eta(x_k)]$, pseudo-rayon δ_k, cercle auquel le point $f(x,y)$ est intérieur, a pour limite C; ainsi le point $f(x,y)$ est intérieur, au sens large, à C.

D'autre part, pour k assez grand, x est aussi intérieur au cercle de pseudo-centre x_k passant par le point ρx_k; le pseudo-rayon de ce cercle est $\operatorname{arg\,th}\rho''_k$, en posant

$$\rho''_k = \frac{(1-\rho)\,|x_k|}{1-\rho\,|x_k|^2},$$

d'où résulte

$$1-\rho_k'' \sim \frac{1+\rho}{1-\rho}(1-|x_k|) \sim \frac{1-\rho_k'}{\lambda};$$

comme $\lambda \leq 1$, si $\delta_k' = \operatorname{Max}(\operatorname{arg\,th}\rho_k'', \operatorname{arg\,th}\rho_k')$, on a

$$1-\operatorname{th}\delta_k' \sim 1-\rho_k'.$$

Or les inégalités

$$E(x, x_k) < \delta_k', \qquad E[y, \eta(x_k)] < \delta_k'$$

entraînent, d'après (8.2),

$$E[g(x, y), \eta(x_k)] < \delta_k';$$

le point $g(x, y)$, étant intérieur au cercle de pseudo-centre $\eta(x_k)$, pseudo-rayon δ_k', qui a pour limite C', est intérieur, au sens large, à C'.

17. Les points e'^2, e'^3 étant ainsi choisis, effectuons le même changement de variables qu'au 2e cas (n° 12) et considérons la transformation

$$(T) \qquad X_1 = F(X, Y), \qquad Y_1 = G(X, Y),$$

opérant dans le domaine D : $\operatorname{Re}X > 0$, $\operatorname{Re}Y > 0$. Les cercles dont parle l'énoncé du lemme 1 ont pour images, dans les demi-plans $\operatorname{Re}X > 0$ et $\operatorname{Re}Y > 0$ respectivement, deux droites

$$\operatorname{Re}X = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re}Y = \text{const.},$$

ces deux constantes étant inversement proportionnelles à λ et μ; le lemme 1 se traduit donc par l'inégalité

$$\min[\lambda \operatorname{Re}F(X, Y), \mu \operatorname{Re}G(X, Y)] \geqq \min(\lambda \operatorname{Re}X, \mu \operatorname{Re}Y),$$

d'où résulte par itération que la suite $\min[\lambda \operatorname{Re}F_n(X, Y), \mu \operatorname{Re}G_n(X, Y)]$ est non décroissante; soit $\delta(X, Y)$ sa limite.

Lemme 2. — *A tout point (u, v) du bicercle on peut associer un nombre $c(u, v) > 0$ tel que, pour les m vérifiant la condition $\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|} < c$, on ait*

$$\lambda \operatorname{Re}F_m(U, V) \to \delta(U, V).$$

[(U, V) est l'image dans D du point (u, v); le lemme est vide, d'une part si la condition $\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|} < c$ n'est remplie que pour un nombre fini de m, d'autre part si $\delta(U, V) = +\infty$].

D'après le lemme du n° 8, il existe deux nombres positifs $a(u, v)$, $b(u, v)$ tels que

$$\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|}<a \qquad \text{entraîne} \qquad \frac{1-|v_{n+1}|}{1-|v_n|}\geqq 1+b\,;$$

si l'on pose $c=a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2$, d étant défini par (8.3), alors, d'après (8.4),

$$\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|}<c \qquad \text{entraîne} \qquad \frac{1-|v_{m-1}|}{1-|u_{m-1}|}<a,$$

donc

$$\frac{1-|v_m|}{1-|v_{m-1}|}\geqq 1+b.$$

D'autre part,

$$(1-|u_m|)(1-|v_m|)\to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1-|v_m|}{1-|u_m|}<c \qquad \text{entraînent} \qquad |v_m|\to 1\,;$$

de même $|v_{m-1}|\to 1$. Nous supposons désormais la condition $\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|}<c$ remplie pour une infinité de m et nous considérons seulement, parmi ces m, ceux qui sont assez grands pour que $\frac{1-|v_m|^2}{1-|v_{m-1}|^2}\geqq 1+b'$, $b'>0$; soit $\delta(U, V)$ fini.

Si l'on pose $G_m(U, V)=V_m=P'_m+iQ'_m$, on a donc

$$\frac{P'_m}{(P'_m+1)^2+Q'^2_m}\,\frac{(P'_{m-1}+1)^2+Q'^2_{m-1}}{P'_{m-1}}\geqq 1+b'\,;$$

d'autre part, l'inégalité $E(v_m, v_{m-1})\leqq d$ se traduit dans le demi-plan $\operatorname{Re} Y>0$ par

$$\left|\frac{V_m-V_{m-1}}{V_m+\overline{V}_{m-1}}\right|\leqq \operatorname{th} d,$$

d'où résulte

$$\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}P'_{m-1}\leqq P'_m\leqq \frac{1+\operatorname{th} d}{1-\operatorname{th} d}P'_{m-1}, \qquad |Q'_m-Q'_{m-1}|\leqq \frac{2\operatorname{th} d}{1-\operatorname{th}^2 d}P'_{m-1}.$$

Enfin, puisque tous les v_n sont intérieurs, au sens large, à un même cercle tangent en $e^{i\beta}$ au cercle-unité,

$$|v_m|\to 1, \quad |v_{m-1}|\to 1 \qquad \text{entraîne} \qquad v_m\to e^{i\beta}, \quad v_{m-1}\to e^{i\beta},$$

c'est-à-dire

$$V_m\to\infty, \qquad V_{m-1}\to\infty.$$

Cela étant, supposons que, pour les m considérés ici, on ait

$$\underline{\lim} P'_m=\frac{\delta(U, V)}{\mu};$$

pour une suite partielle m_k,

$$P'_{m_k}\to\frac{\delta(U, V)}{\mu};$$

P'_{m_k} étant borné, P'_{m_k-1} l'est aussi, Q'_{m_k} et Q'_{m_k-1} sont infiniment grands, mais leur différence est bornée; alors

$$\frac{(P'_{m_k-1}+1)^2+Q'^2_{m_k-1}}{(P'_{m_k}+1)^2+Q'^2_{m_k}}\to 1, \qquad \underline{\lim}\,\frac{P'_{m_k}}{P'_{m_k-1}}\geq 1+b', \qquad \overline{\lim}\,P'_{m_k-1}<\frac{\delta(U,V)}{\mu},$$

ce qui est contraire à la définition de $\delta(U, V)$. Ainsi, pour les m considérés ici,

$$\underline{\lim}[\mu \operatorname{Re} G_m(U,V)]>\delta(U,V),$$

ce qui entraîne

$$\lim[\lambda \operatorname{Re} F_m(U,V)]=\delta(U,V).$$

18. Supposons désormais qu'une suite partielle $f_{n_k}(x, y)$ a une limite de module <1 : quel que soit le choix du point (u, v), u_{n_k} a une limite de module <1; comme

$$(1-|u_{n_k}|)(1-|v_{n_k}|)\to 0, \qquad |v_{n_k}|\to 1,$$

donc, pour k assez grand $[k\geq k_0(u,v)]$, $\frac{1-|v_{n_k}|}{1-|u_{n_k}|}$ est inférieur au nombre $c(u, v)$ fourni par le lemme 2; d'après ce lemme

$$\lambda \operatorname{Re} F_{n_k}(X,Y)\to\delta(X,Y)$$

quels que soient X et Y; comme la famille de fonctions harmoniques $\operatorname{Re} F_n(X, Y)$ est normale, cette convergence est uniforme sur tout compact et $\delta(X, Y)$ est harmonique. On a aussi

$$\lambda \operatorname{Re} F_{n_k-1}(X,Y)\to\delta(X,Y), \qquad \text{car} \quad \delta[F(X,Y),G(X,Y)]=\delta(X,Y).$$

Le point (u, v) étant choisi une fois pour toutes, reprenons les nombres a et b fournis par le lemme du n° 8; le nombre c du lemme 2 (n° 17) est, on l'a vu,

$$c=a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2<a;$$

considérons donc, en supposant qu'il y en ait une infinité, les m vérifiant

$$a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^4\leq\frac{1-|v_m|}{1-|u_m|}<a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2. \tag{18.1}$$

Soit m_k une suite de tels m pour laquelle la suite de fonctions harmoniques $\operatorname{Re} F_{m_k}(X, Y)$ converge uniformément sur tout compact; la limite de cette suite est une fonction harmonique (ou $\equiv+\infty$)

$$\gamma(X,Y)\geq\frac{\delta(X,Y)}{\lambda};$$

mais, d'après le lemme 2,

$$\gamma(U,V)=\frac{\delta(U,V)}{\lambda};$$

alors, d'après le principe du maximum, la fonction harmonique

$$\gamma(X, Y) - \frac{\delta(X, Y)}{\lambda} \equiv 0.$$

Comme la famille des fonctions harmoniques $\operatorname{Re} F_m(X, Y)$ est normale, pour les m considérés

$$\lambda \operatorname{Re} F_m(X, Y) \to \delta(X, Y)$$

uniformément sur tout compact, donc aussi

$$\lambda \operatorname{Re} F_{m+1}(X, Y) \to \delta(X, Y).$$

Le raisonnement du n° 9 montre alors que $F_{m+1}(X, Y) - F_m(X, Y)$ a une limite constante imaginaire pure $i\sigma$.

En particulier, en posant

$$F_m(U, V) = U_m = P_m + iQ_m,$$

on a

$$P_m \to \frac{\delta(U, V)}{\lambda}, \qquad P_{m+1} \to \frac{\delta(U, V)}{\lambda}, \qquad Q_{m+1} - Q_m \to \sigma;$$

(18.1) et $(1 - |u_m|)(1 - |v_m|) \to 0$ entraînent $|u_m| \to 1$, donc

$$u_m \to e^{i\alpha}, \qquad U_m \to \infty, \qquad |Q_m| \to +\infty;$$

$$1 - |u_m|^2 = \frac{4P_m}{(P_m + 1)^2 + Q_m^2} \qquad \text{et} \qquad 1 - |u_{m+1}|^2$$

sont infiniment petits équivalents, $\frac{1 - |u_{m+1}|}{1 - |u_m|} \to 1$; considérons seulement, parmi les m vérifiant (18.1), ceux qui sont assez grands pour que

$$\frac{1 - |u_{m+1}|}{1 - |u_m|} < 1 + b.$$

Comme, d'autre part, d'après le lemme du n° 8,

$$\frac{1 - v_{m+1}}{1 - v_m} \geqq 1 + b,$$

on a

$$\frac{1 - v_{m+1}}{1 - u_{m+1}} > \frac{1 - v_m}{1 - u_m};$$

ainsi, à partir d'une valeur m considérée ici, le rapport $\frac{1 - v_n}{1 - u_n}$ croît tant qu'il vérifie (18.1), c'est-à-dire tant qu'il n'a pas dépassé la valeur $a\left(\frac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^2$; et, s'il l'a dépassée, d'après (8.4) il ne peut retomber au-dessous de la valeur $a\left(\frac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^4$; on a donc

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \geqq a\left(\frac{1 - \operatorname{th} d}{1 + \operatorname{th} d}\right)^4 \qquad \text{pour} \quad n \geqq m;$$

ce résultat, joint à $(1-|u_n|)(1-|v_n|) > 0$, entraîne $|u_n| > 1$, alors que, depuis le n° 18, nous supposons qu'une suite partielle $f_{n_k}(x, y)$ a une limite de module < 1.

19. Il était donc absurde de supposer la condition (18.1) remplie pour une infinité de m : pour n assez grand, le rapport $\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|}$ ne vérifie pas (18.1), mais, d'après (8.1), deux valeurs consécutives de ce rapport ne peuvent être, l'une inférieure à $a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^4$, l'autre au moins égale à $a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2$; on a donc, ou bien

$$\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|} \geq a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^2$$

pour n assez grand, ce qui est impossible pour la raison donnée à la fin du n° 18, ou bien, pour n assez grand,

$$\frac{1-|v_n|}{1-|u_n|} < a\left(\frac{1-\operatorname{th} d}{1+\operatorname{th} d}\right)^4 < a,$$

donc, d'après le lemme du n° 8,

$$\frac{1-|v_{n+1}|}{1-|v_n|} \geq 1+b, \qquad \text{d'où} \qquad 1-|v_n| > +\infty,$$

ce qui est absurde. C'est donc l'hypothèse faite au début du n° 18 qui est absurde : $f_n(x, y) \to e^{i\alpha}$, et de même $g_n(x, y) \to e^{i\beta}$. La propriété annoncée au n° 7 est donc établie, et du même coup le théorème 4 (n° 6).

Remarque. — De là résulte l'unicité des nombres $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ répondant au lemme 1 : on a vu (n° 16) que $e^{i\alpha}$ est le point double attractif de la transformation $x_1 = \xi[\eta_1(x)]$; $e^{i\beta}$ est donc le point double attractif de la transformation $y_1 = \eta_1[\xi(y)]$. Par contre, λ et μ ne jouent pas le même rôle : d'après la définition de λ et μ au n° 16 et les théorèmes classiques sur la dérivée angulaire,

$$\frac{e^{i\beta}-\eta(x)}{e^{i\alpha}-x} \to e^{i(\beta-\alpha)}\mu \qquad \text{quand} \quad x \to e^{i\alpha}, \qquad |\arg(1-e^{-i\alpha}x)| \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{e^{i\alpha}-\xi(y)}{e^{i\beta}-y} \to e^{i(\alpha-\beta)}\frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{quand} \quad y \to e^{i\beta}, \qquad |\arg(1-e^{-i\beta}y)| \leq \theta' < \frac{\pi}{2}.$$

λ est donc aussi la dérivée angulaire de la fonction $\eta_1[\xi(y)]$ au point $e^{i\beta}$.

20. Exemples du troisième cas. — 1° Soit la transformation t qui a pour image dans D :

$$(T) \qquad X_1 = Y + \frac{1}{X}, \qquad Y_1 = X + \frac{1}{Y}.$$

T n'a pas de point double dans D, car un tel point vérifierait

$$X - Y = \frac{1}{X} = -\frac{1}{Y};$$

la transformation $T^1(Y)$ (pour cette notation, *cf.* n° 2) admet le point double

$$\Xi(Y)=\frac{Y+\sqrt{Y^2+4}}{2},$$

le radical étant positif pour Y réel positif, $T^2(X)$ admet le point double

$$H(X)=\frac{X+\sqrt{X^2+4}}{2};$$

la définition de λ et μ donnée dans la remarque ci-dessus montre que $\lambda=\mu=1$. Pour $X=Y$, on a, quel que soit n, $X_n=Y_n$ obtenu par itération, dans le demi-plan $\mathrm{Re}X>0$, de la transformation $X_1=X+\frac{1}{X}$; dans cette itération, $\mathrm{Re}X_n\to+\infty$ [8]. Nous avons donc ici $\mathrm{Re}\,F_n(X,Y)\to+\infty$ pour $X=Y$, donc quels que soient X et Y puisque les $\mathrm{Re}\,F_n(X,Y)$ forment une famille normale : $\delta(X,Y)$ est la constante $+\infty$.

2° Posons, au contraire,

$$(T)\qquad X_1=Y+\frac{1}{X}+i,\qquad Y_1=X+\frac{1}{Y}+i.$$

Si l'on itère, dans le demi-plan $\mathrm{Re}X>0$, la transformation

$$X_1=X+\frac{1}{X}+i,$$

$\mathrm{Re}X_n$ a une limite finie [8]; ici

$$\delta(X,Y)<+\infty.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] C. Carathéodory, *Math. Ann.*, t. 97, 1927, p. 76.
[2] H. Cartan, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 10, 1931, p. 1 et *Math. Zeit.*, t. 35, 1932, p. 760.
[3] A. Denjoy, *C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 255.
[4] M. Hervé, *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951, p. 125, chap. IV.
[5] S. Lattès, *Bull. Soc. math. France*, t. 39, 1911, p. 309.
[6] E. Lévi, *Annali di Mat.*, 3e série, t. 17, 1909, p. 61 et 18, 1911, p. 69.
[7] G. Valiron, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 55, 1931, p. 105.
[8] J. Wolff, *Bull. Soc. math. France*, t. 57, 1929, p. 195.

LES SURFACES DÉRIVABLES
RELATIVEMENT A UNE RÈGLE DE MULTIPLICATION

PAR M. MAURICE FRÉCHET

INTRODUCTION

Dans une série de Notes et de Mémoires commencée en 1952, nous avons utilisé la notion de nombres hypercomplexes pour donner une définition générale (1) de la dérivabilité (à distinguer de la différentiabilité) des fonctions hypercomplexes à n dimensions d'une variable hypercomplexe à n dimensions.

Ces fonctions dérivables possèdent un certain nombre de propriétés (2) des fonctions analytiques classiques à deux dimensions d'une variable complexe à deux dimensions. Le nombre de ces propriétés communes s'est accru quand nous avons distingué parmi les fonctions dérivables, les fonctions que nous avons appelées « paraanalytiques)) (2).

Tout ceci était basé sur la règle classique de multiplication hypercomplexe où n'interviennent que des nombres hypercomplexes *à un même nombre* de dimensions.

Or les résultats obtenus nous ont encouragé à considérer plus généralement le cas où le nombre n de dimensions de la fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ est

(1) *Les fonctions paraanalytiques à n dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1832-1834).

(2) *Propriétés des fonctions paraanalytiques à n dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2191-2194) ; *Formes canoniques des fonctions paraanalytiques à deux et à trois dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2364-2366).

Les Notes précédentes ont été développées dans trois Mémoires :

Determinado de la plej ĝeneralaj planaj paraanalitikaj funkcioj (*Annali di Matematica*, t. XXXV, 1953, p. 255-258).

La paraanalitikaj funkcioj en n dimensioj (*J. Reine u. Angew. Math.*, 1954).

La kanonaj formoj de la 2, 3, 4 dimensiaj paraanalitikaj funkcioj (rédigé, à paraître).

différent du nombre de dimensions de la variable hypercomplexe w. Ce qui conduit naturellement à une règle de multiplication hypercomplexe plus générale que la règle classique.

Il y avait un intérêt analytique évident à s'assurer si au moins quelques-unes des propriétés obtenues quand $n = p$ subsistent sans trop de modification quand $n \neq p$. Et, malgré la disparition de certaines propriétés, c'est ce que l'on constate en effet. Mais — au moins dans le présent Mémoire — nous nous sommes surtout intéressé à l'*interprétation géométrique* des résultats, interprétation notablement différente quand $n = p$ et quand $n \neq p$.

On peut employer, dans le cas général, un *langage* géométrique emprunté à la théorie des espaces à n et à p dimensions. Mais le cas de beaucoup le plus intéressant est celui où $n = 3$ et $p = 2$, cas où *toute fonction hypercomplexe correspond à une représentation paramétrique d'une surface de la géométrie classique*. C'est donc ce cas que nous avons examiné plus particulièrement au cours de deux Mémoires (3) dont celui-ci est le second.

Afin d'en rendre la lecture indépendante du Mémoire préliminaire (4), nous rappellerons dans la suite les résultats de celui-ci.

Le présent Mémoire est divisé en deux parties : *Exposé analytique*, *Interprétation géométrique*.

PREMIÈRE PARTIE

Exposé analytique.

Fonction hypercomplexe dérivable relativement à une règle de multiplication.

Notation. — La généralisation au cas où n et p sont des entiers quelconques, de notre définition antérieurement donnée dans le cas où $n = p$, est immédiate.

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ des vecteurs unitaires portés sur p axes ; $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des vecteurs unitaires portés sur n axes.

$$w = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p, \tag{1}$$

$$W = X_1 f_1 + \ldots + X_n f_n. \tag{2}$$

W sera une fonction $\Phi(w)$ de w quand $X_1, \ldots, X_n$ seront des fonctions de $x_1, \ldots, x_p$.

---

(3) Ces deux Mémoires sont le développement des deux Notes suivantes :

Les fonctions hypercomplexes à n dimensions d'une variable hypercomplexe à p dimensions (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1053-1055).

Sur les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication hypercomplexe (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 633-636).

(4) *Les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication* (en deux Mémoires). Mémoire préliminaire : *Sur certains systèmes d'équation aux dérivées partielles et sur certaines familles de surfaces* (*Verhandelingen koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 1954).

Nous allons *distinguer les notions de dérivabilité et de différentiabilité* de la manière suivante.

Différentiabilité. — Conformément à notre définition générale de la différentiabilité dans les espaces de Banach-Wiener-Hahn (1), nous dirons que $\Phi(w)$ *est différentiable pour*

$$w = w_0 = \sum_r x_{r_0} e_r$$

s'il existe une fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(\Delta w)$ de Δw (dans le même espace que $\Phi(w)$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}(\Delta w) = \sum_k \mathcal{L}_k(\Delta w) f_k,$$

où $\mathcal{L}_k(\Delta w)$ est une fonctionnelle linéaire de Δw), telle que

$$\boxed{\Delta\Phi(w) - \mathcal{L}(\Delta w) = \| \Delta w \| \varepsilon,} \tag{3}$$

où $\| \Delta w \|$ est une norme de Δw, par exemple :

$$\| \Delta w \| = \sqrt{\sum_r (\Delta x_r)^2},$$

ou

$$\| \Delta w \| = \sum_r | \Delta x_r |,$$

ou

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et où

$$\| \varepsilon \| \to 0, \qquad \text{avec} \quad \| \Delta w \|.$$

Et alors nous dirons que $\mathcal{L}(\Delta w)$, *est la différentielle* $d\Phi$ de $\Phi(w)$ pour $w = w_0$.

Le premier membre de (3) est de la forme

$$\Sigma [\Delta X_k - \mathcal{L}_k(\Delta w)] f_k,$$

Donc

$$\varepsilon = \Sigma \varepsilon_k f_k,$$

avec

$$\begin{cases} \Delta X_k - \mathcal{L}_k(\Delta w) = \varepsilon_k \| \Delta w \| \\ \text{où} \lim_{\| \Delta w \| \to 0} \varepsilon_k = 0 \\ \text{et où } \mathcal{L}_k \text{ est une fonctionnelle linéaire de } \Delta w. \end{cases} \tag{4}$$

C'est dire que chacun des $X_k(x_1, \dots, x_p)$ est différentiable pour

(1) *La notice de différentielle dans l'Analyse générale* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 42, 1925, p. 297-301).

$x_1 = x_{10}, \ldots, x_p = x_{p0}$, mais différentiable au sens de Stolz-Young, qui par les relations (4) impose à $X_k(x_1, \ldots, x_p)$ *une condition plus forte* que l'existence de ses dérivées partielles au point considéré.

C'est dire aussi que

$$\mathcal{L}_k(\Delta w) = dX_k$$

et que, par suite,

$$d\Phi = \sum_k dX_k f_k.$$

La réciproque est vraie. On peut donc dire : pour que $\Phi(w) = \Sigma X_k f_k$ soit différentiable pour $w = w_0$, il faut et il suffit que chaque $X_k(x_1, \ldots, x_p)$ soit différentiable (au sens de Stolz-Young) pour $w = w_0$. Et alors

$$d\Phi = \sum_k dX_k f_k. \tag{5}$$

Dérivabilité relativement a une règle de multiplication hypercomplexe. — Partons du cas des fonctions analytiques classiques. On dit généralement qu'une fonction complexe

$$F(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

de la variable complexe $z = x + iy$ est dérivable (*ou monogène*) pour $z = z_0 = x_0 + iy_0$, si le rapport $\frac{\Delta F(z)}{\Delta z}$ [où $\Delta z = (x - x_0) + i(y - y_0)$] converge vers une limite quand $\Delta z \to 0$. Et cette limite est appelée la dérivée $F'(z_0)$ de $F(z)$ pour $z = z_0$.

Pour la généralisation que nous avons en vue, cette définition n'est pas commode. Mais nous avons fait autrefois observer (5) que cette définition *est équivalente à la suivante :*

$F(z)$ est dérivable pour $z = z_0$ si

1° $F(z)$ est différentiable pour $z = z_0$, c'est-à-dire que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au sens de Stolz-Young [rappelé plus haut par (4)] pour $x = x_0, y = y_0$;

2° le rapport $\frac{dF(z)}{dz}$ est indépendant de dz, pour $z = z_0$.

Et la valeur de ce rapport est appelée la dérivée de $F(z)$ pour $z = z_0$.

La condition 2° revient à dire qu'il existe un nombre complexe $L + iM$ tel qu'on ait

$$dP + i\,dQ = (L + iM)(dx + i\,dy)$$

quand on applique *la règle de multiplication* des nombres complexes.

(5) *Sur les conditions pour qu'une fonction* $P(x, y) + iQ(x, y)$, *soit monogène* (*Nouv. Ann. Math.*, t. 19, 1919, p. 215-219).

La définition formulée de cette manière se trouvera sous une forme immédiatement généralisable et applicable à $\Phi(w)$ pourvu que nous fassions intervenir une règle de multiplication généralisée.

Nous introduirons donc une *règle de multiplication* suivant laquelle on aura en général

$$\left(\sum_k \xi_k f_k\right)\left(\sum_r x_r e_r\right) = \sum_k \sum_r \xi_k x_r (f_k . e_r),$$

avec

$$\boxed{\mathrm{R}: \quad f_k . e_r = \sum_k a_{krh} f_h,}$$

où les a_{krh} sont des constantes (réelles) arbitrairement choisies. (On voit la différence avec la règle classique où $n = p$ et $f_k \equiv e_k$).

Nous dirons alors que *la fonction* hypercomplexe

$$\Phi(w) \equiv \mathrm{X}_1(x_1, \ldots, x_p) f_1 + \ldots + \mathrm{X}_n(x_1, \ldots, x_p) f_n \tag{6}$$

de la variable hypercomplexe

$$w = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p \tag{7}$$

est « dérivable pour $w = w_0 = x_{10} e_1 + \ldots + x_{p0} e_p$ *relativement à la règle de multiplication* R » si :

1° $d\Phi \equiv \Sigma\, d\mathrm{X}_k f_k$ *est différentiable pour* $w = w_0$;

2° $\dfrac{d\Phi}{dw}$ est, pour $w = w_0$, indépendant de dw, c'est-à-dire *s'il existe un nombre hypercomplexe*

$$\Phi'(w_0) = \Sigma \Phi'_k(w_0) f_k$$

indépendant de dw, *et un seul tel que*

$$d\Phi(w) = \Phi'(w_0)\, dw \tag{8}$$

pour $w = w_0$, *la multiplication étant effectuée suivant la règle* R.

Et alors $\Phi'(w_0)$ est appelée *la dérivée* de $\Phi(w)$, pour $w = w_0$, *relativement à la règle* R. Si $\Phi(w)$ est dérivable près de w, sa dérivée $\Phi'(w)$ est donc aussi une fonction hypercomplexe de w. Si elle est dérivable pour $w = w_0$ relativement à R, sa dérivée $\Phi''(w)$ sera appelée la dérivée seconde de $\Phi(w)$ pour $w = w_0$ relativement à R, etc.

Nous dirons que $\Phi(w) = \sum_k \mathrm{X}_k f_k$ est une fonction *paraanalytique* de w pour $w = w_0$ relativement à R, si $\Phi(w)$ est dérivable *indéfiniment* relativement à R près de $w = w_0$.

Changements de variables. — Nous appellerons ainsi, *pour abréger*, toute transformation *linéaire et biunivoque* de $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots$ en $\mathrm{X}'_1, \mathrm{X}'_2, \mathrm{X}'_3, \ldots$ ou

de $x_1, x_2, \ldots$ en $x'_1, x'_2, \ldots$. Il s'agit donc de transformations *plus générales* que les changements d'axes.

Soient deux telles transformations,

$$(9) \qquad X'_k = \sum_h \mu_{kh} X_h + a_k, \qquad x'_j = \sum_r \beta_{jr} x_r + b_j,$$

d'où

$$X_i = \sum_k \lambda_{ik} X'_k + a'_i, \qquad x_r = \sum_j \alpha_{rj} x'_j + b'_r.$$

L'identité (8) ou

$$(8\,bis) \qquad \sum_h dX_h f_h = \left(\sum_p \Phi'_p f_p\right)\left(\sum_r (dx_r e_r)\right)$$

deviendra

$$\sum_k dX'_k \left(\sum_h \lambda_{hk} f_h\right) = \left(\sum_p \Phi'_p f_p\right)\left[\sum_j (dx'_j)\left(\sum_r \alpha_{rj} e_r\right)\right]$$

que l'on pourra écrire

$$\sum_k dX'_k f'_k = \left(\sum_h \varphi_h f'_h\right)\left[\sum_j (dx'_j)\, e'_j\right]$$

en posant

$$(10) \qquad f'_k = \sum_h \lambda_{hk} f_h, \qquad e'_j = \sum_r \alpha_{rj} e_r,$$

$$\Phi'_p = \sum_h \varphi_h \lambda_{hp}.$$

D'ailleurs, le déterminant des λ_{hk} étant $\neq 0$, on pourra résoudre (10) sous la forme

$$(11) \qquad f_h = \sum_k \nu_{kh} f'_k \qquad \text{et, de même,} \qquad e_r = \sum_j \rho_{jr} e'_j.$$

On voit alors que

$$\Phi(w) \equiv \sum_h X_h f_h \equiv \sum_k X'_k f'_k$$

est une fonction hypercomplexe de

$$w = \sum_r x_r e_r = \sum_j x'_j e'$$

qui est dérivable relativement à la règle R′ définie par

$$(12) \qquad f'_k . e'_j = \sum_h \sum_r \lambda_{hk} \alpha_{rj} f_h . e_r = \sum_p \left(\sum_h \sum_r \lambda_{hk} \alpha_{rj} a_{hrp}\right)\left[\sum_q \nu_{qp} f'_q\right] = \sum_q b_{kjq} f'_q.$$

Ainsi une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ dérivable relativement à une règle R est transformée par deux changements de variables (9) en une fonction encore dérivable, mais relativement à une nouvelle règle R′.

CHANGEMENTS D'UNITÉS DE BASE. — Inversement, supposons qu'à partir d'une règle R on effectue un changement linéaire et biunivoque (10) quelconque sur les f_h et un autre (10) sur les e_r. Il en résultera une règle R′ analogue à R et définie par (12). Alors la relation (8 *bis*) deviendra

$$\sum_p \left[d\left(\sum_h \nu_{ph} X_h \right) \right] f'_p = \left[\sum_q \left(\sum_k \nu_{qk} \Phi'_k \right) f'_q \right] \left\{ \sum_l \left[d\left(\sum_r \rho_{lr} x_r \right) \right] e'_l \right\},$$

c'est-à-dire une relation

$$\sum_p (dX'_p) f'_p = \left(\sum_q \varphi'_q f'_q \right) \left[\sum_l (dx'_l) e'_l \right],$$

de même forme que (8 *bis*), où les X, Φ'_p et x ont été remplacés par les X′, φ'_p et x', obtenus par des transformations linéaires et biunivoques (les mêmes pour les X_h et les Φ'_k)

$$X'_p = \sum_h \nu_{ph} X_h, \qquad \varphi'_q = \sum_k \nu_{qk} \Phi'_k, \qquad x'_l = \sum_r \rho_{lr} x_r.$$

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE. — Quand

$$\Phi(w) = \sum_k X_k f_k$$

est, pour w voisin de w_0, une fonction hypercomplexe dérivable relativement à la règle R, on déduit de l'identité (8 *bis*) que l'on a

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_r} = \sum_k a_{krh} \Phi'_k. \tag{13}$$

Quand la règle R est « normale » c'est-à-dire quand l'un, au moins, des déterminants d'ordre n formé avec les a_{krh} est $\neq 0$ les n équations correspondantes déterminent les Φ'_k en fonction de $x_1, \ldots, x_p$ au voisinage de $x_{10}, \ldots, x_{p_0}$: la dérivée $\Phi'(w)$ est unique.

Au contraire, supposons tous ces déterminants nuls. Si l'un de leurs mineurs d'ordre $n-1$ est $\neq 0$, les équations correspondantes sont équivalentes à tout le système (13) et l'on voit qu'on peut déterminer $n-1$ des quantités Φ'_k en fonction de $x_1, \ldots, x_p$ et de la $n^{\text{ième}}$ quantité Φ'_k : il y a une infinité de déterminations de la dérivée Φ'. Il en serait de même *a fortiori* si tous les mineurs d'ordre $n-1$ étaient nuls.

Ainsi *aucune* fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ ne peut être — pour quelque valeur de w que ce soit — dérivable relativement à une règle R si les coefficients a_{krh} de cette règle ne sont pas tels que l'un au moins des déterminants d'ordre n des a_{krh} est $\neq 0$.

Mais dans ce cas, non seulement on peut tirer un système et un seul des Φ'_k de n des np relations (13), mais encore on voit en portant ces valeurs dans les $np - n = n(p-1)$ autres équations, que : *pour toute fonction hypercomplexe*

$$\Phi(w) = \Sigma X_h f_h$$

dérivable relativement à une règle R (*nécessairement normale*) *au voisinage de* w_0, *les «composantes»* $X_1, \ldots, X_n$ *de cette fonction vérifient dans ce voisinage un système de* $n(p-1)$ *équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires, homogènes, à coefficients constants et résolues par rapport à* $n(p-1)$ *des* np *quantités* $\frac{\partial X_h}{\partial x_r}$. (Nous obtenons ici la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann.)

On pourra donc écrire ce système sous la forme

$$\sigma : \quad \frac{\partial X_h}{\partial x_r} = \sum_{j=1}^{n} b_{jrh} \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}}, \tag{14}$$

où les b_{jrh} sont constants et où les n couples (h_j, r_j) et les $n(p-1)$ couples (h, r) doivent être distincts (avec $1 \leqq (h \text{ et } h_j) \leqq n$; $1 \leqq (r \text{ et } r_j) \leqq p$).

C'est donc un système d'équations aux dérivées partielles que nous pourrons appeler *un système d'équations linéairement indépendantes* en ce sens qu'elles deviennent un système d'équations linéaires linéairement indépendantes lorsqu'on y remplace les np dérivées partielles par des variables indépendantes.

Autrement dit, l'un des déterminants d'ordre $n(p-1)$ formés avec les coefficients est $\neq 0$, (à savoir ici) celui qui est formé des coefficients 1 et 0 des $\frac{\partial X_h}{\partial x_r}$ dans les premiers membres.

Rappel de résultats du Mémoire préliminaire.

Formes canoniques des fonctions dérivables. — On a vu (p. 34) que des « changements de variables » au sens précis indiqué page 33, transforment une fonction hypercomplexe dérivable relativement à une règle R en une fonction encore dérivable, mais relativement à une règle R′, en général différente de R, quoique de même forme. On peut donc espérer, en choisissant convenablement ces changements, simplifier à la fois cette fonction et cette règle et obtenir ainsi des formes canoniques simples.

C'est ce que nous avons fait ailleurs, d'abord pour $n = p = 2, 3, 4$ ([6]), puis, dans notre Mémoire préliminaire ([7]) pour $n = 3$, $p = 2$, cas particulièrement intéressant au point de vue géométrique.

Dans la suite, nous appellerons S la surface correspondant à la fonction

$$\Phi(w) = X(u, v) f_1 + Y(u, v) f_2 + Z(u, v) f_3$$

par la représentation paramétrique

$$X = X(u, v), \qquad Y = Y(u, v), \qquad Z = Z(u, v). \tag{15}$$

Quand nous dirons que S est plane ou cylindrique, cela voudra dire qu'elle

([6]) *Voir* note ([2]) de la page 29.
([7]) *Voir* note ([4]) de la page 30.

est située sur un plan ou un cylindre, qu'elle occupe totalement *ou partiellement*.

CAS DE $n=3$, $p=2$: QUELQUES FORMES CANONIQUES DES FONCTIONS DÉRIVABLES. — Nous avons indiqué ailleurs ([8]) les formes canoniques simples auxquelles on peut réduire les fonctions dérivables à trois dimensions d'une variable à trois dimensions relativement à une règle de multiplication. Pour une telle fonction

$$\Phi(w)=X_1(x_1, x_2, x_3)f_1+\ldots+X_3(x_1, x_2, x_3)f_3,$$

on doit avoir une identité de la forme

$$(16)\qquad dX_1f_1+\ldots+dX_3f_3=\left[\sum_{k=1}^{3}L_k(x_1, x_2, x_3)f_k\right]\left[\sum_{j=1}^{3}dx_je_j\right].$$

Si l'on y suppose x_3 constant, on obtient une identité de la forme (8 *bis*) avec $n=3$, $p=2$. Et puisque e_3 est le coefficient de dx_3 dans cette relation, il ne jouera plus aucun rôle quand on fera $dx_3=0$, de sorte que la règle de multiplication se réduit à la règle (R) ci-dessus, écrite aussi pour $n=3$, $p=2$.

Nous obtenons ainsi par une méthode indirecte mais sans nouveau calcul, *des* solutions simples de notre problème actuel en annulant l'une des trois variables dans chacune des formes canoniques signalées dans la dernière Note citée plus haut, page 29, et démontrée dans un Mémoire ultérieur, cité en note, page 29.

En se reportant à ce Mémoire, on obtient ainsi les solutions suivantes.

La surface S considérée peut :

1° se réduire à une courbe

$$X_h=f_h(x_1)\qquad (h=1, 2, 3);$$

2° être plane

$$X_1=\text{const.},\qquad X_2=\ldots,\qquad X_3=\ldots;$$

3° être cylindrique

$$X_1=A(x_1),\qquad X_2=B(x_1),\qquad X_3=\ldots;$$

4° avoir la représentation paramétrique

$$X_1=A(x_1),\qquad X_2=x_2A'(x_2)+B(x_1),\qquad X_3=\frac{1}{2}x_2^2A''(x_1)+x_2B'(x_1)+C(x_1).$$

Il faudrait, pour justifier ces formules, reproduire ici les formes canoniques données dans ce Mémoire. Nous ne le ferons pas pour abréger, car nous retrouverons plus loin, par une autre méthode, les résultats obtenus ainsi. Celle-ci

([8]) *Voir* note ([2]) de la page 29.

nous permettra de retrouver ces solutions *et d'autres encore* et de montrer que *toute solution peut se ramener à un nombre fini de formes canoniques.*

Système complet de formes canoniques des fonctions dérivables. — Nous allons maintenant rappeler ceux des résultats obtenus dans notre Mémoire préliminaire qui peuvent nous être utiles dans la suite.

Ce Mémoire avait été écrit sans faire appel à la notion de nombre hypercomplexe ce qui avait l'avantage de dispenser de la connaissance de la théorie de ces nombres, et, en outre, le faire mieux apparaître comme l'étude de certains systèmes particuliers d'équations aux dérivées partielles et de leur application à la théorie des surfaces.

Nous allons en reproduire les tableaux, mais en les interprétant dans la notation des fonctions hypercomplexes, en y substituant souvent aux notations X_1, X_2, X_3, x_1, x_2, les notations usuelles de la théorie des surfaces X, Y, Z, u, v et en remplaçant Φ'_1, Φ'_2, Φ'_3 par L_1, L_2, L_3 ou par L, M, N.

Théorème. — *Toute fonction hypercomplexe*

$$\Phi(w) = \Phi(u e_1 + v e_2) = X(u, v) f_1 + Y(u, v) f_2 + Z(u, v) f_3$$

qui est dérivable au voisinage de $w_0 = u_0 e_2 + v_0 e_1$, *relativement à une règle de multiplication* R, *peut être ramenée au moyen de transformations linéaires et biunivoques effectuées sur* X, Y, Z *d'une part, sur* u, v *d'autre part, à l'une des formes canoniques du tableau* I *qui suit.*

Tableau I.

I. S est *plane*. $\begin{cases} I_a : \Phi(w) = c f_1 + \dfrac{\partial G(u, v)}{\partial u} f_2 + \dfrac{\partial G(u, v)}{\partial v} f_3 ; \\ I_b : \Phi(w) = c f_1 + A(u) f_2 + D(u, v) f_3 ; \end{cases}$

II. S est *cylindrique*. $\Phi(w) = A(u) f_1 + B(u) f_2 + \begin{cases} II_a : C(v) f_3 ; \\ II_b : [v A'(u) + C(u)] f_3 ; \\ II_c : C(u) f_3 ; \text{ ici S est curviligne} ; \end{cases}$

III. $\Phi(w) = A(u) f_1 + B(v) f_2 + C(u + v) f_3 ;$

IV. $\Phi(w) = A(u) f_1 + [v A'(u) + B(u)] f_2 + C(v) f_3 ;$

V. $\Phi(w) = A(u) f_1 + [v A'(u) + B(u)] f_2 + \left[\frac{1}{2} A''(u) v^2 + B'(u) v + C(u)\right] f_3 ;$

VI. $\begin{cases} \Phi(w) = A(u) f_1 + P(u, v) f_2 + Q(u, v) f_3, \\ \text{où } P + iQ = f(u + iv), f(u + iv) \text{ étant} \\ \quad \text{une fonction de } u + iv \text{ analytique pour } u + iv = u_0 + iv_0 ; \end{cases}$

VII. $\Phi(w) = (cu + c_1) f_1 + (cv + c_2) f_2 + H(u, v) f_3.$

Dans ce tableau, c, c_1, c_2 sont des constantes et chacune des fonctions $\dfrac{\partial G(u, v)}{\partial u}$, ..., $C(u)$, ..., $D(u, v)$, $H(u, v)$ est une fonction différentiable au voisinage de u_0, v_0.

THÉORÈME. — *Le système* σ *d'équations aux dérivées partielles du premier ordre auquel sont soumises les composantes d'une fonction hypercomplexe* $\Phi(w)$ *dérivable près de* w_0, *relativement à une règle* R, *prend pour chaque forme canonique de* $\Phi(w)$ *figurant dans le tableau* I, *la forme canonique correspondante du tableau* II *qui suit.*

Réciproquement, chaque forme du tableau I détermine la solution générale du système correspondant du tableau II.

La vérification de ce théorème, par comparaison des formules correspondantes des tableaux I et II est immédiate.

TABLEAU II.

$$\frac{\partial X}{\partial v}=0 \begin{cases} \text{I.} \quad \dfrac{\partial X}{\partial u}=0 \begin{cases} \text{I}_a: \quad \dfrac{\partial Y}{\partial v}-\dfrac{\partial Z}{\partial u}=0; \\ \text{I}_b: \quad \dfrac{\partial Y}{\partial v}=0; \end{cases} \\ \text{II.} \quad \dfrac{\partial Y}{\partial v}=0 \begin{cases} \text{II}_a: \quad \dfrac{\partial Z}{\partial u}=0; \\ \text{II}_b: \quad \dfrac{\partial Z}{\partial v}-\dfrac{\partial X}{\partial u}=0; \\ \text{II}_c: \quad \dfrac{\partial Z}{\partial v}=0; \end{cases} \\ \text{III.} \quad \dfrac{\partial Y}{\partial u}=\dfrac{\partial Z}{\partial u}-\dfrac{\partial Z}{\partial v}=0; \\ \text{IV.} \quad \dfrac{\partial Z}{\partial u}=\dfrac{\partial Y}{\partial v}-\dfrac{\partial X}{\partial u}=0; \\ \text{V.} \quad \dfrac{\partial Y}{\partial v}-\dfrac{\partial X}{\partial u}=\dfrac{\partial Z}{\partial v}-\dfrac{\partial Y}{\partial u}=0; \\ \text{VI.} \quad \dfrac{\partial Y}{\partial u}+\dfrac{\partial Z}{\partial v}=\dfrac{\partial Y}{\partial u}-\dfrac{\partial Z}{\partial v}=0; \\ \text{VII.} \quad \dfrac{\partial Y}{\partial u}=\dfrac{\partial X}{\partial u}-\dfrac{\partial Y}{\partial v}=0. \end{cases}$$

Remarque. — Représentons par $E_1=0$, $E_2=0$, $E_3=0$ les équations du système σ dans le tableau II. On a dans les cas I et VII les relations respectives

$$\frac{\partial E_1}{\partial u}-\frac{\partial E_2}{\partial v}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 E_2}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 E_3}{\partial u\,\partial v}\equiv 0.$$

Les systèmes σ des types I et VII rentrent donc dans la catégorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$E_1=0, \quad \ldots, \quad E_q=0$$

qui sont « *dépendantes* » (à distinguer de « linéairement dépendantes ») au sens de Maurice Janet, c'est-à-dire tels qu'il existe des opérateurs différentiels $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ pour lesquels la relation

$$\Phi_1 E_1 + \ldots + \Phi_q E_q = 0$$

devient une identité.

On vérifie dans le cas particulier actuel une proposition générale de Janet d'après laquelle les solutions du système σ ne peuvent dépendre de fonctions arbitraires (à la différentiabilité près) de *deux* variables que si ses équations sont dépendantes.

Le tableau I montre, en effet, que c'est seulement dans les cas I et VII que la solution de σ dépend de fonctions arbitraires (à la différentiabilité près) de deux variables.

Fonctions ordinaires. — C'est un premier exemple d'*un comportement différent* des deux groupements formés de fonctions des types I et VII d'une part, II à VI d'autre part. Un second exemple va suivre et on en trouvera d'autres plus loin. C'est pourquoi nous les distinguerons en appelant « *fonctions ordinaires* », les fonctions hypercomplexes qui se ramènent par « changement de variables » à l'un des types II et VI.

Formes canoniques de la règle de multiplication. — Cherchons à déterminer des règles de multiplication grâces auxquelles une fonction dérivable relativement à l'une de ces règles soit une des fonctions canoniques du tableau I.

Une méthode. — La méthode qui va suivre ne suppose pas que n et p aient des valeurs particulières.

Pour la commodité des calculs, nous reviendrons pour les variables à la notation avec indices : $X_1, \ldots, x_p$.

Nous avons vu que si $\Phi = \sum_h X_h f_h$ est dérivable, on a des relations de la forme

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_r} = \sum_j b_{jrh} \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}}, \tag{14}$$

où

$$b_{jrkh_k} = \delta_{jk}, \qquad 1 \leq (r, r_j) \leq p, \qquad 1 \leq (h, h_j) \leq n. \tag{17}$$

Inversement, si l'on se donne arbitrairement les b_{jrh} pourvu que (14) soit vérifié, on aura quelles que soient les unités f_j, e_r :

$$\sum_h dX_h f_h = \sum_j \sum_r \left(\sum_h b_{jrh} f_h \right) \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}} dx_r.$$

Si donc on adopte la règle de multiplication

$$f_j . e_r = \sum_h b_{jrh} f_h, \tag{18}$$

on pourra écrire

$$\sum_h dX_h f_h = \left(\sum_j \frac{\partial X_{hj}}{\partial x_{r_j}} f_j\right)\left(\sum_r dx_r e_r\right)$$

et par suite : 1° $\Phi \equiv \Sigma X_h f_h$ sera dérivable relativement à la règle (18) précisée ci-dessus et 2° on pourra prendre pour dérivée de Φ

$$\sum_j \frac{\partial X_{hj}}{\partial x_{r_j}} f_j,$$

c'est-à-dire qu'en posant

$$d\Phi = \Phi' dw \qquad \text{et} \qquad \Phi' = \sum_j L_j f_j,$$

on aura

$$L_j = \frac{\partial X_{hj}}{\partial x_{r_j}}.$$

On pourra appliquer ces remarques pour obtenir pour chacune des familles dérivables ci-dessus, les formes correspondantes de la règle R et de la dérivée, en se reportant au tableau II.

Cette même méthode nous prouve en outre, que plusieurs règles peuvent donner les mêmes fonctions canoniques (mais avec des dérivées en général différentes). Car si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ est une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$, la règle (18) donnera les mêmes fonctions que la règle

$$f_j . e_r = \sum_h b_{m_j r h} f_h.$$

Application de la méthode précédente. — Revenons au cas où $n = 3$, $p = 2$ et appliquons ce qui précède aux tableaux I et II traduit dans la notation $X_1, \ldots, x_2$.

I_a. On peut prendre encore

$$L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2},$$

d'où encore

$$b_{j12} = \delta_{j1}, \qquad b_{j13} = \delta_{j2}, \qquad b_{j13} = \delta_{j3}$$

et

$$b_{j11} = b_{j21} = 0, \qquad \text{mais} \quad b_{j22} = \delta_{j2}.$$

D'où

$$f_j . e_1 = \delta_{j1} f_2 + \delta_{j2} f_3, \qquad f_j . e_2 = \delta_{j2} f_2 + \delta_{j3} f_3;$$

$$I_a : \begin{cases} f_1 . e_1 = f_2, & f_2 . e_1 = f_3, & f_3 . e_1 = \mathcal{O}; \\ f_1 . e_2 = \mathcal{O}, & f_2 . e_2 = f_2, & f_3 . e_2 = f_3 \end{cases}$$

en représentant par $\mathcal{O}$ le nombre hypercomplexe $0 f_1 + 0 f_2 + 0 f_3$.

I_b. On peut prendre

$$L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2}.$$

D'où

$$b_{j12}=\delta_{j1},\qquad b_{j13}=\delta_{j2},\qquad b_{j23}=\delta_{j3},$$
$$b_{j11}=b_{j21}=b_{j22}=0,$$
$$f_j.e_1=\delta_{j1}f_2+\delta_{j2}f_3,\qquad f_j.e_2=\delta_{j2}f_2+\delta_{j3}f_3;$$

$$\mathrm{I}_b:\begin{cases} f_1.e_1=f_2, & f_2.e_1=f_3, & f_3.e_1=0;\\ f_1.e_2=0, & f_2.e_2=0, & f_3.e_2=f_3.\end{cases}$$

II_a. Soient

$$\mathrm{L}_1=\frac{\partial X_1}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_2=\frac{\partial X_2}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_3=\frac{\partial X_3}{\partial x_2}.$$

Alors

$$b_{j11}=\delta_{j1},\qquad b_{j12}=\delta_{j2},\qquad b_{j23}=\delta_{j3},$$
$$b_{j21}=b_{j22}=b_{j13}=0;$$

$$\mathrm{II}_a:\begin{cases} f_1.e_1=f_1, & f_2.e_1=f_2, & f_3.e_1=0;\\ f_1.e_2=0, & f_2.e_2=0, & f_3.e_2=f_3.\end{cases}$$

II_b. On peut prendre

$$\mathrm{L}_1=\frac{\partial X_1}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_2=\frac{\partial X_2}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_3=\frac{\partial X_3}{\partial x_1}.$$

D'où

$$b_{j1k}=\delta_{jk},\qquad b_{j21}=b_{j22}=0,\qquad b_{j23}=\delta_{j3},$$
$$f_j.e_1=\delta_{j1}f_1+\delta_{j2}f_2+\delta_{j3}f_3,\qquad f_j.e_2=\delta_{j1}f_3;$$

$$\mathrm{II}_b:\begin{cases} f_j.e_1=f_j;\\ f_1.e_2=f_3, & f_2.e_2=0, & f_3.e_2=0.\end{cases}$$

II_c. Soient

$$\mathrm{L}_k=\frac{\partial X_k}{\partial x_1}.$$

Alors

$$b_{j1k}=\delta_{jk},\qquad b_{j2k}=0;$$

$$\mathrm{II}_c:\begin{cases} f_j.e_1=f_j;\\ f_j.e_2=0.\end{cases}$$

III. On a, en posant

$$\mathrm{L}_1=\frac{\partial X_1}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_2=\frac{\partial X_2}{\partial x_2},\qquad \mathrm{L}_3=\frac{\partial X_3}{\partial x_1};$$
$$b_{j12}=0,\qquad b_{j23}=\delta_{j3};\qquad b_{j21}=0,\qquad b_{j11}=\delta_{j1};\qquad b_{j13}=\delta_{j3},\qquad b_{j22}=\delta_{j2}.$$

D'où :

$$f_j.e_1=\delta_{j1}f_1+\delta_{j3}f_3,\qquad f_j.e_2=\delta_{j2}f_2+\delta_{j3}f_3,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{III}:\begin{cases} f_1.e_1=f_1, & f_2.e_1=0, & f_3.e_1=f_3;\\ f_1.e_2=0, & f_2.e_2=f_2, & f_3.e_2=f_3.\end{cases}$$

IV. On a, en posant

$$L_1=\frac{\partial X_1}{\partial x_1},\qquad L_2=\frac{\partial X_2}{\partial x_1},\qquad L_3=\frac{\partial X_3}{\partial x_2};$$

$$b_{j21}=b_{j13}=0,\qquad b_{j22}=\delta_{j1},$$

$$b_{j11}=\delta_{j1},\qquad b_{j12}=\delta_{j2},\qquad b_{j23}=\delta_{j3}.$$

D'où

$$f_j.e_1=\delta_{j1}f_1+\delta_{j2}f_2,\qquad f_j.e_2=\delta_{j1}f_2+\delta_{j3}f_3,$$

soit

$$\text{IV}:\begin{cases} f_1.e_1=f_1, & f_2.e_1=f_2, & f_3.e_1=0;\\ f_1.e_2=f_2, & f_2.e_2=0, & f_3.e_2=f_3.\end{cases}$$

V. Soient

$$L_1=\frac{\partial X_1}{\partial x_1},\qquad L_2=\frac{\partial X_2}{\partial x_1},\qquad L_3=\frac{\partial X_3}{\partial x_1}.$$

On aura :

$$b_{j21}=0,\qquad b_{j22}=\delta_{j1},\qquad b_{j23}=\delta_{j2},$$

$$b_{j11}=\delta_{j1},\qquad b_{j12}=\delta_{j2},\qquad b_{j13}=\delta_{j3};$$

$$f_j.e_1=\delta_{j1}f_1+\delta_{j2}f_2+\delta_{j3}f_3,\qquad f_j.e_2=\delta_{j1}f_2+\delta_{j2}f_3,$$

soit

$$\text{V}:\begin{cases} f_j.e_1=f_j;\\ f_1.e_2=f_2, & f_2.e_2=f_3, & f_3.e_2=0.\end{cases}$$

VI. Soit

$$L_1=\frac{\partial X_1}{\partial x_1},\qquad L_2=\frac{\partial X_2}{\partial x_1},\qquad L_3=\frac{\partial X_3}{\partial x_1},$$

donc

$$b_{j1h}=\delta_{jh},\qquad b_{j21}=0,\qquad b_{j23}=\delta_{j2},\qquad b_{j22}=-\delta_{j3};$$

soit

$$f_j.e_1=\Sigma\delta_{jh}f_h,\qquad f_j.e_2=-\delta_{j3}f_2+\delta_{j2}f_3,$$

$$\text{VI}:\begin{cases} f_j.e_1=f_j;\\ f_1.e_2=0, & f_2.e_2=f_3, & f_3.e_2=-f_2.\end{cases}$$

VII. Prenons

$$L_1=\frac{\partial X_2}{\partial x_2},\qquad L_2=\frac{\partial X_3}{\partial x_1},\qquad L_3=\frac{\partial X_3}{\partial x_2}.$$

D'où

$$b_{j22}=\delta_{j1},\qquad b_{j13}=\delta_{j2},\qquad b_{j23}=\delta_{j3},$$

$$b_{j21}=0,\qquad b_{j12}=0,\qquad b_{j11}=\delta_{j1},$$

d'où

$$\text{VII}:\begin{cases} f_1.e_1=f_1, & f_2.e_1=f_3, & f_3.e_1=0;\\ f_1.e_2=f_2, & f_2.e_2=0, & f_3.e_2=f_3.\end{cases}$$

Remarque. — On peut dire qu'une règle, de la forme générale (R) a une *unité principale* s'il existe un nombre hypercomplexe $e'_1 = ae_1 + be_2$ tel que

$$f_j . e'_1 = f_j \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3.$$

Il suffit de se reporter aux formes ci-dessus des règles II_b, II_c, V, VI pour constater que, pour chacune de ces règles, e_1 est unité principale. On voit aussi immédiatement que la règle II_a a $e_1 + e_2$ pour unité principale. Enfin des calculs très simples montrent que les autres régles (soient I_a, I_b, III, IV et VII) n'ont pas d'unité principale.

Fonctions dérivées des fonctions dérivables canoniques. — Quand e_1 est unité principale, on a

$$f_j = f_j . e_1 = \sum_h b_{j1h} f_h, \qquad \text{donc} \quad b_{j1h} = \delta_{jh}$$

et comme

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_1} = \sum_j b_{j1h} L_j,$$

on a

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_1} = \sum_j \delta_{jh} L_j = L_h.$$

Donc la dévivée de

$$\Phi(w) = \Phi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \sum_h X_h f_h$$

est

$$\Phi'(w) = \sum L_h f_h = \sum_h \frac{\partial X_h}{\partial x_1} f_h,$$

ce qui peut s'écrire

$$\Phi'(w) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(w).$$

Ceci permet d'écrire immédiatement les expressions de Φ'_w pour les cas II_b, II_c, V et VI.

Mais, de toute façon, les expressions de $\Phi'(w)$ se déduisent immédiatement de la vérification à laquelle nous allons procéder, à savoir que : *pour chacune des règles canoniques de multiplication que nous venons d'établir, les fonctions dérivables correspondantes sont bien celles du tableau* I.

Vérification. — Dans chaque cas, il suffit d'écrire que $\sum_h dX_h f_h$ est égal à l'expression développée de $(\Sigma L_k f_k)(\Sigma dx_r e_r)$ qui résulte de la règle canonique correspondante, laquelle figure aux pages oo et oo.

Des identités obtenues, on obtient par des intégrations et dérivations toujours immédiates, non seulement les expressions de X_1, X_2, X_3, mais aussi celles

de L_1, L_2, L_3, donc non seulement celle de $\Phi(w)$, mais aussi celle de sa dérivée $\Phi'(w)$ relativement à R.

I_a :
$$L_1\,dx_1 f_2 + L_2\,dx_1 f_3 + L_2\,dx_2 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\, dX_h f_h;$$
$$dX_1 = 0, \qquad dX_2 = L_1\,dx_1 + L_2\,dx_2, \qquad dX_3 = L_2\,dx_1 + L_3\,dx_2;$$
$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = L_2 = \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \qquad L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2};$$
$$X_1 = \text{const.}, \qquad X_2 = \frac{\partial G}{\partial x_1}, \qquad X_3 = \frac{\partial G}{\partial x_2};$$
$$L_1 = \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}, \qquad L_2 = \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\,\partial x_2}, \qquad L_3 = \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}.$$

I_b :
$$L_1\,dx_1 f_2 + L_2\,dx_1 f_3 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\, dX_h f_h;$$
$$dX_1 = 0, \qquad dX_2 = L_1\,dx_1, \qquad dX_3 = L_2\,dx_1 + L_3\,dx_2;$$
$$L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2};$$
$$X_1 = \text{const.}, \qquad X_2 = A(x_1), \qquad X_3 = D(x_1, x_2);$$
$$L_1 = A'(x_1), \qquad L_2 = \frac{\partial D}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial D}{\partial x_2}.$$

II_a :
$$L_1\,dx_1 f_1 + L_2\,dx_1 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\, dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1, \qquad dX_2 = L_2\,dx_1, \qquad dX_3 = L_3\,dx_2;$$
$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = B(x_1), \qquad X_3 = C(x_2);$$
$$L_1 = A'(x_1), \qquad L_2 = B'(x_1), \qquad L_3 = C'(x_2).$$

II_b :
$$L_1\,dx_1 f_1 + L_2\,dx_1 f_2 + L_3\,dx_1 f_3 + L_4\,dx_2 f_3 = \Sigma\, dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1, \qquad dX_2 = L_2\,dx_1, \qquad dX_3 = L_4\,dx_2 + L_3\,dx_1;$$
$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = B(x_1), \qquad \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = A', \qquad X_3 = x_2 A' + C(x_1);$$
$$L_1 = A'(x_1), \qquad L_2 = B'(x_1), \qquad L_3 = x_2 A'' + C'.$$

II_c :
$$\Sigma L_j\,dx_1 f_j = \Sigma\, dX_h f_h;$$
$$dX_j = L_j\,dx_1;$$
$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = B(x_1), \qquad X_3 = C(x_1);$$
$$L_1 = A'(x_1), \qquad L_2 = B'(x_1), \qquad X_3 = C'(x_1).$$

III :
$$L_1\,dx_1 f_1 + L_3\,dx_1 f_3 + L_2\,dx_2 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\, dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1, \qquad dX_2 = L_2\,dx_2, \qquad dX_3 = L_3(dx_1 + dx_2);$$
$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = B(x_2), \qquad X_3 = C(x_1 + x_2);$$
$$L_1 = A'(x_1), \qquad L_2 = B'(x_2), \qquad L_3 = C'(x_1 + x_2).$$

IV :
$$L_1\,dx_1 f_1 + L_2\,dx_1 f_2 + L_1\,dx_2 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\, dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1, \qquad dX_2 = L_2\,dx_1 + L_1\,dx_2, \qquad dX_3 = L_2\,dx_2;$$
$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = x_2 A'(x_1) + B(x_1), \qquad X_3 = C(x_2);$$
$$L_1 = A'(x_1), \qquad L_2 = x_2 A''(x_1) + B'(x_1), \qquad L_3 = C'(x_2).$$

V :
$$\Sigma L_j\,dx_1 f_j + L_1\,dx_2 f_2 + L_2\,dx_2 f_3 = dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1, \qquad dX_2 = L_2\,dx_1 + L_1\,dx_2, \qquad dX_3 = L_3\,dx_1 + L_2\,dx_2;$$
$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = x_2 A'(x_1) + B(x_1), \qquad X_3 = \frac{x_2^2}{2} A''(x_1) + x_2 B'(x_1) + C(x_1);$$
$$L_1 = A'(x_1), \qquad L_2 = x_2 A''(x_1) + B'(x_1), \qquad L_3 = \frac{x_2^2}{2} A'''(x_1) + x_2 B''(x_1) + C'(x_1);$$

VI : $$\Sigma L_j\,dx_1 f_j + L_2\,dx_2 f_3 + L_3\,dx_2(-f_2) = \Sigma\,dX_h f_h;$$

$$dX_1 = L_1\,dx_1, \qquad dX_2 = L_2\,dx_1 - L_3\,dx_2, \qquad dX_3 = L_3\,dx_1 + L_2\,dx_2;$$

$X_1 = A(x_1)$, $\quad d(X_2 + iX_3) = L_2(dx_1 + i\,dx_2) + iL_3(dx_1 + i\,dx_2) = (L_2 + iL_3)(dx_1 + i\,dx_2)$;

$$X_1 = A(x_1),$$

$$X_2 + iX_3 = f(x_1 + ix_2), \quad \text{fonction monogène de } x_1 + ix_2;$$

$$L_1 = A'(x_1),$$

$$L_2 + iL_3 = f'(x_1 + ix_2), \quad \text{fonction monogène de } x_1 + ix_2.$$

VII : $$L_1\,dx_1 f_1 + L_2\,dx_1 f_3 + L_1\,dx_2 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\,dX_h f_h;$$

$$dX_1 = L_1\,dx_1, \qquad dX_2 = L_1\,dx_2, \qquad dX_3 = L_2\,dx_1 + L_3\,dx_2;$$

$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = B(x_2), \qquad \text{avec} \quad A'(x_1) = L_1 = B'(x_2),$$

$$\text{donc} \qquad = \text{const.} = a;$$

$$X_1 = ax_1 + a_1, \qquad X_2 = ax_2 + a_2, \qquad X_3 = H(x_1, x_2);$$

$$L_1 = a, \qquad L_2 = \frac{\partial H}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial H}{\partial x_2}.$$

Remarque. — En se reportant à la discussion précédente, on voit que pour chacune des règles *ordinaires* (c'est-à-dire sauf pour I et VII), L_1, L_2, L_3 *ont la même forme que* X_1, X_2, X_3.

Il n'en résulte pas immédiatement que si $\Phi(w)$ est dérivable relativement à une règle ordinaire, il en est de même pour sa dérivée. Car les conditions de dérivabilité des fonctions d'une variable A, B, C, ... qui entrent dans le tableau I pour les fonctions dérivables ordinaires étant supposées satisfaites au voisinage de x_{10}, x_{20}, il n'en résulte pas qu'elles seront nécessairement satisfaites pour les fonctions A', B', C', ... qui les remplacent dans l'expression de $\Phi'(w)$. Pour que $\Phi'(w)$ soit aussi dérivable [et, d'après la discussion précédente, $\Phi'(w)$ sera alors dérivable relativement à la *même* règle ordinaire que $\Phi''(w)$], il faudra donc supposer que les fonctions A, B, C, ... qui entre dans le tableau I soient différentiables deux fois au voisinage de x_{10}, x_{20}. Alors la dérivée $\Phi''(w)$ existera aussi et aura la même forme que $\Phi(w)$, mais la même objection se présentera. Et ainsi de suite.

Au contraire, si nous supposons *seulement* que les fonctions A, B, C qui se présentent dans le tableau I sont indéfiniment différentiables près de x_{10}, x_{20}, $\Phi(w)$ sera indéfiniment dérivable au voisinage de w_0 relativement à la même règle ordinaire que $\Phi(w)$.

Fonctions paraanalytiques. — Nous dirons qu'une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ est *paraanalytique pour* $w = w_0$, *relativement à la règle* R si elle est, au voisinage de w_0, dérivable indéfiniment relativement à cette même règle R.

Si une fonction $\Phi(w)$ est paraanalytique pour $w = w_0$, relativement à une règle R, ses dérivées successives relativement à R, sont aussi paraanalytiques relativement à R près de w_0.

Théorème. — I. *Pour qu'une fonction* $\Phi(w)$ *hypercomplexe soit* paraanalytique *en* w_0 *relativement à* R, *il faut :* 1° *qu'elle soit indéfiniment différentiable près de* w_0; 2° *qu'elle soit dérivable près de* w_0 *relativement à* R.

II. *Ces conditions sont suffisantes quand* $\Phi(w)$ *est une fonction « ordinaire ».*

Elles ne le sont pas dans les autres cas : les cas I et VII que nous allons examiner.

Cas des familles I et VII. — Pour ces deux familles, les fonctions

$$\Phi(w) = X_1 f_1 + X_2 f_2 + X_3 f_3$$
$$\Phi'(w) = L_1 f_1 + L_2 f_2 + L_3 f_3$$

n'ont pas en général la même forme, comme il résulte des pages 45 à 46. On peut alors chercher quelles sont, parmi les fonctions de chacune de ces familles, celles dont la dérivée appartient aussi à la même famille (9).

On obtiendra ainsi, *en particulier*, toutes les fonctions paraanalytiques de la même famille.

I_a. D'après la page 45,

$$X_1 = c, \qquad X_2 = \frac{\partial G(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \qquad X_3 = \frac{\partial G(x_1, x_2)}{\partial x_2},$$
$$L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_2}{\partial x_2}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2}.$$

Pour que $\Phi'(w) = \Sigma L_k f_k$ soit aussi du type I_a, il faut que $L_1 = \text{const.}$, d'où

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = \text{const.} = a,$$
$$G = \frac{a}{2} x_1^2 + x_1 B(x_2) + D(x_2)$$

d'où en posant $C(x_2) \equiv D'(x_2)$:

$$(20) \qquad \begin{cases} X_1 = c, & X_2 = a x_1 + B(x_2), & X_3 = x_1 B'(x_2) + C(x_2); \\ L_1 = a, & L_2 = B'(x_2), & L_3 = x_1 B''(x_2) + C'(x_2); \end{cases}$$
$$\Phi'(w) = a f_1 + B'(x_2) f_2 + [x_1 B''(x_2) + C'(x_2)] f_3.$$

Cette fois, il suffit bien que B'' et C' soient dérivables près de x_{20} pour que $\Phi'(w)$ soit aussi dérivable relativement à R.

On aura alors

$$\Phi''(w) = B''(x_2) f_2 + [x_1 B'''(x_2) + C''(x_2)] f_3$$

et, en général, si B et C sont suffisamment dérivables :

$$\Phi^{(n+2)}(w) = B^{(n+2)}(x_2) f_2 + [x_1 B^{(n+3)}(x_2) + C^{(n+2)}(x_2)] f_3.$$

Pour que $\Phi(w)$ soit paraanalytique et du type I_a, pour $w = w_0$, il faut et il suffit donc :

(9) C'est surtout quand nous passerons à l'interprétation géométrique que l'on verra l'intérêt de ce problème.

1° que $\Phi(w)$ soit de la forme

$$\Phi(w) = cf_1 + [ax_1 + B(x_2)]f_2 + [x_1 B'(x_2) + C(x_2)]f_3 \tag{21}$$

et 2° que $B(x_2)$ et $C(x_2)$ soient indéfiniment dérivables pour $x_2 = x_{20}$.

Ou encore : que $\Phi(w)$ soit indéfiniment différentiables près de w_0 et soit dérivable *deux* fois relativement à la règle du type I_a près de w_0 :

I_b. D'après les formules et les notations de la page 45, pour que $\Phi'(w)$ soit aussi dérivable relativement à la règle I_b, il faut que

$$L_1 = \text{const.}, \qquad \frac{\partial L_2}{\partial x_2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$A'(x_1) = \text{const.} = a, \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} = 0;$$

$$D(x_1, x_2) = N(x_1) + M(x_2);$$

$$X_1 = \text{const.} = c, \quad X_2 = ax_1 + a_1, \quad X_3 = N(x_1) + M(x_2);$$

$$L_1 = a, \quad L_2 = N'(x_1), \quad L_3 = M'(x_2),$$

où $N(x_1)$ et $M(x_2)$ doivent être deux fois différentiables. Alors

$$\Phi''(w) = \Sigma l_k f_k$$

existe relativement à la même règle, et on a

$$l_1 = N''(x_1), \qquad l_2 = 0, \qquad l_3 = M''(x_2).$$

Pour que $\Phi''(w)$ soit dérivable relativement à I_b, il faut encore que

$$N''(x_1) = l_1 = \text{const.} = 2b$$

et que $M(x_2)$ soit trois fois dérivable. Alors,

$$X_1 = \text{const.}, \qquad X_2 = ax_1 + a_1, \qquad X_3 = bx_1^2 + b_1 x + M(x_2) \tag{22}$$

et si $\Phi'''(w) = \Sigma m_k f_k$:

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = M'''(x_2).$$

Ainsi la forme la plus générale des fonctions hypercomplexes du type I_b qui sont dérivables successivement trois fois relativement à la règle I_b pour $w = w_0$ est la forme (22) où $M(x_2)$ est une fonction arbitraire différentiable trois fois près de $x_2 = x_{20}$. Mais, on voit immédiatement qu'alors, si $M(x_2)$ est dérivable indéfiniment près de x_{20}, $\Phi(w)$ sera paraanalytique relativement à I_b pour $w = x_1 e_2 + x_{20} e_2$ quel que soit x_1 et qu'on aura

$$\Phi^{(n+2)}(w) = M^{(n+2)}(x_2) f_3.$$

Ainsi pour qu'une fonction hypercomplexe dérivable relativement à I_b près

de w_0, soit paraanalytique relativement à I_b pour $w = w_0$, il faut et il suffit qu'elle soit indéfiniment différentiable près de w_0 et qu'elle soit dérivable *trois* fois relativement à I_b près de w_0.

VII. D'après les formules et notations de la page 46, pour que $\Phi'(w)$ soit dérivable relativement à VII comme $\Phi(w)$, il faut que L_1 et L_2 soient différentiables et que

$$0 = \frac{\partial L_1}{\partial x_2} = \frac{\partial L_2}{\partial x_1} = \frac{\partial L_1}{\partial x_1} - \frac{\partial L_2}{\partial x_2} = 0,$$

c'est-à-dire ici

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial H}{\partial x_1} = \text{const.} = b, \qquad H = b x_1 + M(x_2).$$

Alors

$$L_1 = a, \qquad L_2 = b, \qquad L_3 = M'(x_2);$$

$M(x_2)$ doit être différentiable deux fois et cela suffit. On a alors

$$\Phi''(w) = M''(x_2) f_3.$$

La forme la plus générale des fonctions hypercomplexes $\Phi(w)$ dérivables deux fois relativement à la règle VII près de w_0 est donc

$$\Phi(w) = (a x_1 + a_1) f_1 + (a x_2 + a_2) f_2 + [b x_1 + M(x_2)] f_3, \tag{23}$$

où $M(x_2)$ est dérivable deux fois près de x_{20}.

Mais on observe que pour que $\Phi^{(n+1)}(w)$ existe pour $w = w_0$, il faut et il suffit que $M(x_2)$ soit $n+1$ fois dérivable près de $x_2 = x_{20}$; on aura alors

$$\Phi^{(n+1)}(w) = M^{(n+1)}(x_2) f_3.$$

Dès lors : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ soit paraanalytique relativement à la règle du type III, pour $w = w_0$, est que : 1° $\Phi(w)$ soit indéfiniment différentiable près de w_0; 2° que $\Phi(w)$ soit dérivable *deux* fois relativement à VII près de w_0.

Il résulte de l'ensemble de cette discussion la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour qu'une fonction hypercomplexe* $\Phi(w)$ *soit paraanalytique relativement à une règle* R *quelconque pour* $w = w_0$, *il faut et il suffit à* 1° *que* $\Phi(w)$ *soit indéfiniment différentiable près de* w_0 ; 2° *que* $\Phi(w)$ *soit dérivable trois fois relativement à* R *près de* $w = w_0$.

[Quand R se ramène à I ou VII, il suffit de deux fois ; quand R est une règle ordinaire — donc de II à VI — il suffit d'une fois].

Pour le tableau qui suit, nous revenons aux notations X, Y, ..., φ.

Tableau III.

Formes canoniques des fonctions hypercomplexes paraanalytiques et de leurs dérivées.

I. $\left\{\begin{array}{ll} I_{ap.} & \left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = cf_1 + [au + B(v)]f_2 + [uB'(v) + C(v)]f_3, \\ \Phi'(w) = af_1 + B'(v)f_2 + [uB''(v) + C'(v)]f_3, \\ \Phi^{(n+1)}(w) = B^{(n+1)}(v)f_2 + [uB^{(n+2)}(v) + C^{(n+1)}(v)]f_3; \end{array}\right. \\ I_{bp} & \left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = cf_1 + (au + a_1)f_2 + [bu^2 + b_1u + M(v)]f_3, \\ \Phi'(w) = af_1 + (2bu + b_1)f_2 + M'(v)f_3, \\ \Phi''(w) = 2bf_1 + M''(v)f_3, \\ \Phi^{(n+2)}(w) = M^{(n+2)}(v)f_3; \end{array}\right. \end{array}\right.$

II. $\left\{\begin{array}{ll} II_a. & \left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = A(u)f_1 + B(u)f_2 + C(v)f_3, \\ \Phi^{(n)}(w) = A^{(n)}(u)f_1 + B^{(n)}(u)f_2 + C^{(n)}(v)f_3; \end{array}\right. \\ II_b. & \left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = A(u)f_1 + B(u)f_2 + [vA'(u) + C(u)]f_3, \\ \Phi^{(n)}(w) = A^{(n)}(u)f_1 + B^{(n)}(u)f_2 + [vA^{(n+1)}(u) + C^{(n)}(u)]f_3; \end{array}\right. \\ II_c. & \left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = A(u)f_1 + B(u)f_2 + C(u)f_3, \\ \Phi^{(n)}(w) = A^{(n)}(u)f_1 + B^{(n)}(u)f_2 + C^{(n)}(u)f_3; \end{array}\right. \end{array}\right.$

III. $\left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = A(u)f_1 + B(v)f_2 + C(u+v)f_3, \\ \Phi^{(n)}(w) = A^{(n)}(u)f_1 + B^{(n)}(v)f_2 + C^{(n)}(u+v)f_3; \end{array}\right.$

IV. $\left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = A(u)f_1 + [vA'(u) + B(u)]f_2 + C(v)f_3, \\ \Phi^{(n)}(w) = A^{(n)}(u)f_1 + [vA^{(n+1)}(u) + B^{(n)}(u)]f_2 + C^{(n)}(v)f_3; \end{array}\right.$

V. $\left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = A(u)f_1 + [vA'(u) + B(u)]f_2 + \left[\dfrac{v^2}{2}A''(u) + vB'(u) + C(u)\right]f_3; \\ \Phi^{(n)}(w) = A^{(n)}(u)f_1 + [vA^{(n+1)}(u) + B^{(n)}(u)]f_2 \\ \qquad + \left[\dfrac{v^2}{2}A^{(n+2)}(u) + vB^{(n+1)}(u) + C^{(n)}(u)\right]f_3; \end{array}\right.$

VI. $\left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = A(u)f_1 + P(u, v)f_2 + Q(u, v)f_3, \\ \quad \text{où } P + iQ = F(u + iv) \text{ est fonction analytique de } u + iv \text{ près de } u_0 + iv_0; \\ \Phi^{(n)}(w) = A^{(n)}(u)f_1 + P_n(u, v)f_2 + Q_n(u, v)f_3, \\ \quad \text{où } P_n + iQ_n = F^{(n)}(u + iv); \end{array}\right.$

VII. $\left\{\begin{array}{l} \Phi(w) = (au + a_1)f_1 + (av + a_2)f_2 + [bu + M(v)]f_3, \\ \Phi'(w) = af_1 + bf_2 + M'(v)f_3, \\ \Phi^{(n+1)}(w) = M^{(n+1)}(v)f_3. \end{array}\right.$

Pour que $\Phi(w)$ soit paraanalytique pour $w = w_0$ relativement à une des règles canoniques, il faut et il suffit que dans l'expression correspondante de $\Phi(w)$ figurant au tableau ci-dessus, chacune des fonctions $M(x_2)$, $A(x_1)$, ... qui y figurent soit indéfiniment dérivable près de x_{20} (ou x_{10} suivant le cas).

Remarques. — 1° Nous avons placé l'initiale *p* de « paraanalytique » en indice aux cas I et VII pour rappeler qu'il ne s'agit plus des fonctions dérivables (relativement aux règles I ou VII) les plus générales.

2° Dans le tableau ci-dessus ne figurent plus de fonctions arbitraires (à une

condition de différentiabilité près) de *deux* variables. En particulier, ne figure plus la forme générale de VII (du tableau I) qui, au point de vue géométrique est d'une généralité excessive.

Équations aux dérivées partielles du troisième ordre. — Théorème. — 1° *Les composantes* X, Y, Z *d'une fonction hypercomplexe « ordinaire » vérifient une même équation*, T, *aux dérivées partielles du troisième ordre, linéaire et homogène par rapport à ces dérivées ;* 2° *Les composantes d'une fonction canonique « ordinaire » du tableau* I (c'est-à-dire appartenant aux types de II à VI) *vérifient l'équation canonique* T *correspondante du tableau* IV.

On vérifie, *à vue*, 2°, en comparant chaque système, de II à VI, du tableau II avec l'équation T correspondante du tableau III.

Alors, 1° résulte immédiatement de 2°.

Non seulement ce théorème est muet sur les cas I et VII, mais il leur est *inapplicable*. En effet, dans ces cas, l'une au moins des fonctions X, Y, Z dépendent d'une fonction arbitraire (à la différentiabilité près) de *deux variables*. Il est donc *impossible* de la soumettre à une équation aux dérivées partielles, de quelque nature qu'elle soit.

Tableau IV.

II. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v^2} = 0$. (*)

III. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u^2\,\partial v} - \dfrac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v^2} = 0$;

IV. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v^2} = 0$ (la même que pour II);

V. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial v^3} = 0$;

VI. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u^2\,\partial v} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial v^3} = 0$.

(*) Cette équation, vérifiée dans les trois cas de II, peut être remplacée par une équation d'ordre inférieur dans chacun de ces trois cas : II_a. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v} = 0$; II_b. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial v^2} = 0$; II_c. $\dfrac{\partial U}{\partial v} = 0$.

Confluences de familles de fonctions dérivables. — On peut se demander si plusieurs des familles I à VII de fonctions dérivables peuvent être « confluentes », c'est-à-dire s'il existe des fonctions qui sont dérivables à la fois relativement à des règles de multiplication correspondant à des familles distinctes.

La première forme de ce problème qui se pose naturellement à l'esprit est la suivante : chercher s'il existe des systèmes de fonctions X, Y, Z, qui soient chacun à la fois de plusieurs des formes canoniques du tableau I.

Une solution de ce problème sera intéressante en ce sens qu'elle donnera un *exemple* de familles confluentes.

Mais cette forme du problème est trop étroite. En effet, le tableau I n'est que *l'un* — quoique sans doute, l'un des plus simples — des tableaux de dix formes auxquelles on peut nécessairement ramener les fonctions dérivables. On obtiendra le tableau le plus général de ces dix formes en effectuant indépendamment sur chaque forme du tableau I, les « changements de coordonnées » les plus généraux sur X, Y, Z, et sur u, v.

On aura un cas de confluence quand un système de fonctions X, Y, Z appartiendra à la fois à deux des formes canoniques de l'un quelconque de ces tableaux. Cela revient à dire qu'on aura le cas de confluence le plus général quand on pourra passer d'un système canonique de fonctions du tableau I à un système différent de fonctions canoniques du tableau I par un « changement éventuel de coordonnées » sur X, Y, Z et sur u, v.

Dans la suite, nous appellerons $\mathcal{G}_{\text{I}}$, $\mathcal{G}_{\text{II}}$, ..., $\mathcal{G}_{\text{VII}}$ les familles de fonctions qui s'obtiennent par un « changement de variable » respectivement à partir des formes canoniques I, II, ..., VII.

Une solution simple. — Nous avons montré dans notre Mémoire préliminaire et l'on vérifie d'ailleurs aisément, que la fonction

$$\Phi(w) = u^2 f_1 + 2uvf_2 + v^2 f_3 \tag{24}$$

appartient à la fois à $\mathcal{G}_{\text{III}}$, $\mathcal{G}_{\text{IV}}$, $\mathcal{G}_{\text{V}}$, $\mathcal{G}_{\text{VI}}$.

Exemple de solution générale. — Nous avons aussi voulu montrer dans notre Mémoire préliminaire comment on peut résoudre le problème de la confluence de deux des familles $\mathcal{G}_{\dots}$ en prenant pour exemple $\mathcal{G}_{\text{III}}$ et $\mathcal{G}_{\text{IV}}$.

Nous avons ainsi prouvé que les fonctions communes à $\mathcal{G}_{\text{III}}$ et $\mathcal{G}_{\text{IV}}$ peuvent toutes être ramenées par des « changements de variables » à l'une des formes ci-dessous.

$$\Phi(w) = u^2 f_1 + 2uvf_2 + v^2 f_3,$$
$$\Phi(w) = \mathrm{A}(u) f_1 + vf_2 + uf_3,$$
$$\Phi(w) = \mathrm{A}(u) f_1 + \mathrm{B}(v) f_2.$$

Fonctions hypercomplexes exponentielles. — Il est naturel d'appeler fonction exponentielle une fonction hypercomplexe dérivable $\mathrm{E}(w)$ identique à sa dérivée. Cette définition laisserait encore dans l'expression de la fonction des constantes arbitraires. On déterminerait, en général, ces constantes en assujettissant $\mathrm{E}(\mathcal{O})$ à être identique à un nombre hypercomplexe donné. Celui-ci devant être de la forme

$$\mathrm{I} = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3,$$

devrait être tel que I. $w = w$ pour être assimilé comme dans l'Analyse classique à un nombre unité.

Or w est de la forme $x_1 e_1 + x_2 e_2$ et I. w de la forme $\mathrm{X}_1 f_1 + \mathrm{X}_2 f_2 + \mathrm{X}_3 f_3$. Nous laisserons donc de côté cette assimilation. Il restera alors dans $\Phi(w)$ des constantes arbitraires.

On observera aussi que l'égalité classique $e^{w+w'} = e^{w}\,e^{w'}$ *ne peut se généraliser ici*, puisque $E(w)\,E(w')$ est de la forme $(af_1+\ldots+cf_3)(a'f_1+\ldots+c'f_3)$, produit pour lequel aucune règle de multiplication n'a été prévue dans ce qui précède.

En employant la condition $E(w)\equiv E'(w)$ pour chacune des règles canoniques, on obtient par des calculs faciles le tableau suivant où, au moins pour les cas « ordinaires » (de II à VI), les constantes ont pu être choisies de sorte que l'on ait

$$E(\mathcal{O}) = \alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3,$$

où $\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3$ est un nombre hypercomplexe à trois dimensions qui est *arbitraire*.

Dans les autres cas : pour I_a, il faut supposer $\alpha = 0$; pour I_b et VII, il faut supposer $\alpha=\beta=0$.

TABLEAU V.

Fonctions hypercomplexes exponentielles canoniques.

$$\text{I.}\ \begin{cases} I_a: & E(w) = e^{v}[\beta f_2+(\beta u+\gamma)f_3],\\ I_b: & E(w) = e^{v}\gamma f_3;\end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} II_a: & E(w) = e^{u}(\alpha f_1+\beta f_2)+e^{v}\gamma f_3,\\ II_b: & E(w) = e^{u}[\alpha f_1+\beta f_2+(\alpha v+\gamma)f_3];\\ II_c: & E(w) = e^{u}(\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3);\end{cases}$$

$$\text{III.}\quad E(w) = e^{u}\alpha f_1+e^{v}\beta f_2+e^{u+v}\gamma f_3;$$

$$\text{IV.}\quad E(w) = e^{u}[\alpha f_1+(\alpha v+\beta)f_2]+\gamma e^{v}f_3;$$

$$\text{V.}\quad E(w) = e^{u}\left[\alpha f_1+(\alpha v+\beta)f_2+\left(\frac{\alpha}{2}v^2+\beta v+\gamma\right)f_3\right];$$

$$\text{VI.}\quad E(w) = e^{u}[\alpha f_1+(\beta\cos v-\gamma\sin v)f_2+(\beta\sin v+\gamma\cos v)f_3];$$

$$\text{VII.}\quad E(w) = \gamma e^{v}f_3.$$

LES FONCTIONS HYPERCOMPLEXES TRIGONOMÉTRIQUES. — Par analogie avec les fonctions $\cos x$, $\sin x$, nous pouvons définir deux fonctions associées $C(w)$ et $S(w)$ telles qu'elles soient dérivables relativement à la même règle et que l'on ait

$$C'(w) = -S(w), \qquad S'(w) = \Phi(w). \tag{25}$$

Nous pouvons bien, comme pour la fonction $\sin x$, imposer à $S(w)$ la condition

$$S(\mathcal{O}) = \mathcal{O}. \tag{26}$$

Mais, comme pour la fonction exponentielle, nous ne pouvons essayer d'imposer à $\Phi(w)$ que la condition

$$C(\mathcal{O}) = \alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3, \tag{27}$$

sans supposer que le second membre soit une « unité principale » au sens strict.

Des calculs faciles permettent alors d'obtenir le tableau suivant des formes canoniques du système C, S correspondant aux différentes règles canoniques.

Pour abréger ce tableau, au lieu d'y détailler C et S, nous avons écrit les expressions de $C + iS$.

On vérifiera que la condition (27) peut être imposée quelles que soient les constantes α, β, γ *dans les cas* ordinaires. Dans les autres cas, il faudra supposer : pour I_a, que $\alpha = 0$; pour I_a et VII, que $\alpha = \beta = 0$.

TABLEAU VI.

Formes canoniques des systèmes C, S *de fonctions hypercomplexes trigonométriques associées.*

$$C(w) + iS(w) =$$

I. $\begin{cases} I_a : & e^{iv}[\beta(f_2 + iuf_3) + \gamma f_3], \\ I_b : & e^{iv}\gamma f_3; \end{cases}$

II. $\begin{cases} II_a : & e^{iu}[\alpha f_1 + \beta f_2] + e^{iv}\gamma f_3, \\ II_b : & e^{iu}[\alpha(f_1 + vif_3) + \beta f_2 + \gamma f_3], \\ II_c : & e^{iu}[\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3]; \end{cases}$

III. $e^{iu}\alpha f_1 + e^{iv}\beta f_2 + e^{i(u+v)}\gamma f_3;$

IV. $e^{iu}[\alpha(f_1 + ivf_2) + \beta f_2] + e^{iv}\gamma f_3;$

V. $e^{iu}\left[\alpha\left(f_1 + ivf_2 - \frac{v^2}{2}f_3\right) + \beta(f_2 + ivf_3) + \gamma f_3\right];$

VI. $e^{iu}[\alpha f_1 + \beta(\operatorname{ch} v f_2 + i \operatorname{sh} v f_3) + \gamma(-i \operatorname{sh} v f_2 + \operatorname{ch} v f_3)];$

VII. $e^{iv}\gamma f_3.$

DEUXIÈME PARTIE.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

UNE RESTRICTION. — On peut définir de bien des manières ce qu'on entend par surface. Pour la commodité de ce qui suit, nous nous limiterons à la considération de la famille (pourtant très générale) des surfaces telles que chacune d'elles possède *au moins une* représentation paramétrique

$$X = X(u, v), \qquad Y = Y(u, v), \qquad Z = Z(u, v),$$

où X, Y, Z sont trois fonctions de u, v qui sont *différentiables* (10) en tout point (u, v) du domaine $\mathcal{D}$ (fini ou infini) de définition de la surface dans le plan des u, v.

(10) Au sens de Stolz-Young, précisé page 31.

DÉFINITION DES SURFACES DÉRIVABLES RELATIVEMENT A UNE RÈGLE DE MULTIPLICATION. — Soit une règle R de multiplication hypercomplexe de la forme

$$\mathrm{R}\begin{cases} f_k \cdot e_r = \sum_k a_{krh} f_h, \\ (k, h = 1, 2, 3; \; r = 1, 2). \end{cases}$$

Nous dirons qu'une surface S est *dérivable relativement à la règle* R s'il existe au moins une représentation paramétrique de cette surface, soit

$$X = X(u, v); \qquad Y = Y(u, v), \qquad Z = Z(u, v)$$

[où le point de coordonnées u, v varie dans un domaine déterminé, $\mathcal{D}$, fini ou infini], telle que la fonction hypercomplexe correspondante

$$(28) \qquad \begin{cases} \Phi(w) \equiv \Phi(u\, e_1 + v\, e_2) \\ \qquad \equiv X(u, v) f_1 + Y(u, v) f_2 + Z(u, v) f_3 \end{cases}$$

soit *dérivable relativement à la règle de multiplication* R. C'est-à-dire, rappelons-le, que $X(u, v)$, $Y(u, v)$ $Z(u, v)$ sont *différentiables* dans le domaine $\mathcal{D}$ et qu'*il existe une fonction hypercomplexe* et *une seule* désignée par la notation $\Phi'(w)$, soit

$$(28\ bis) \qquad \Phi'(w) \equiv L(u, v) f_1 + M(u, v) f_2 + N(u, v) f_3$$

indépendante de dw et telle que

$$(29) \qquad d\Phi(w) = \Phi'(w)\, dw$$

dans le domaine $\mathcal{D}$ de définition de Φ, la multiplication dans (29) étant effectuée suivant la règle R.

SURFACES DÉRIVABLES ORDINAIRES. — Quand une au moins des représentations paramétriques d'une surface S correspond à une fonction hypercomplexe dérivable *ordinaire*, c'est-à-dire de l'un des types II à VI du tableau I de la page 38, nous dirons que S est une surface dérivable ordinaire.

Rappel de résultats du Mémoire préliminaire.

FORMES CANONIQUES DES ÉQUATIONS DES SURFACES DÉRIVABLES. — En éliminant les paramètres u, v dans les relations égalant à X, Y, Z les composantes des fonctions dérivables canoniques rappelées au tableau I de la page 38, on trouve les formes canoniques des équations des surfaces dérivables, formes rassemblées dans le tableau ci-après. La déduction de ces équations est généralement immédiate et, en tout cas, figure dans notre Mémoire préliminaire.

TABLEAU VII.

Formes canoniques des équations des surfaces dérivables relativement à une règle R.

I.		$Z = o$	plan;
II.	H_a, H_b :	$F(X, Y) = o$	cylindre.
	H_c :	$F(X, Y) = o, \quad G(Y, Z) = o,$	courbe;
III.		$a(X) + b(Y) = c(Z),$ où $a(X)$, ni $b(Y)$, ni $c(Z)$ ne sont constants;	
VI.		$Z = \beta(Y)\alpha(X) + \gamma(X),$ où $\alpha(X) \not\equiv o, \quad \beta(Y) \not\equiv o;$	
V.		$Z = \alpha(X)Y^2 + \beta(X)Y + \gamma(X),$ lieu de paraboles parallèles à YOZ, avec axes parallèles à OZ;	
VI.		$a(Z) = U(X, Y), \quad$ où $\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = o;$	
VII.		$Z = K(X, Y).$	

Pour avoir des notations plus familières, on a plusieurs fois opéré des permutations de coordonnées dans les équations qui résultent directement du tableau I.

Remarques. — 1° Les fonctions qui figurent dans ce tableau *ne sont pas nécessairement uniformes*. Par exemple, si la fonction

$$\Phi(w) = A(u) f_1 + B(v) f_2 + C(u + v) f_3$$

du type III du tableau I a la forme particulière

$$\Phi(w) = u^2 f_1 + v^2 f_2 + (u + v)^2 f^2,$$

on aura pour équation de la surface dérivable correspondante, la forme III du tableau VII, mais avec

$$a(X) = \pm\sqrt{X}, \qquad b(Y) = \pm\sqrt{Y}, \qquad c(Z) = \pm\sqrt{Z}.$$

2° Les surfaces du type VII sont peu intéressantes, car elles sont trop générales. K(X, Y) doit être univalente et différentiable dans son domaine de définition. C'est-à-dire que, pour ce type, la surface S n'est assujettie qu'à n'être rencontrée qu'en un seul point, au plus, par une droite parallèle à une droite fixe Δ et à avoir en chaque point un plan tangent non parallèle à Δ (ici OZ).

On pourrait alors se demander s'il y a lieu de considérer les autres cas I, II, ..., où l'on aurait des surfaces, cas particuliers du type VII. Mais il ne faut pas oublier qu'elles sont dérivables relativement à d'*autres* règles.

ÉQUIVALENCE D'ÉQUATIONS D'UNE MÊME SURFACE DÉRIVABLE. — Il peut arriver qu'une même surface canonique dérivable puisse être représentée par plusieurs équations distinctes quoique équivalentes, rapportées aux mêmes axes et d'une même forme canonique du tableau I.

Dans notre Mémoire préliminaire, nous avons obtenu les formes *les plus générales* de ces équivalences :

Dans le cas III, on peut remplacer $a(X)$, $b(Y)$, $c(Z)$ du tableau I par

$$\lambda a(X)+\mu, \quad \lambda b(Y)+\mu', \quad \lambda c(Z)+\mu+\mu' \qquad (\lambda \neq 0).$$

Dans le cas IV, on peut remplacer α, β, γ par

$$\frac{\alpha(X)}{\lambda}, \quad \lambda\beta(Y)+\mu, \quad \gamma(X)-\frac{\mu}{\lambda}\alpha(X) \qquad (\lambda \neq 0).$$

Dans le cas VI, on peut remplacer a et U par

$$\lambda a(Z)+\mu, \quad \lambda U(X, Y)+\mu \qquad (\lambda \neq 0).$$

Dans les cas V et VII, il n'y a pas de changement possible.

On voit que dans tous ces changements les fonctions figurant dans le tableau ne peuvent être remplacées que par des fonctions *linéaires* (et non plus générales) de ces fonctions.

Équation aux dérivées partielles du troisième ordre entre les coordonnées d'un point d'une surface dérivable. — Soit S une surface dérivable relativement à une règle R. Par des changements linéaires et biunivoques de coordonnées, on peut toujours ramener son équation à la forme

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Nous avons démontré les deux théorèmes suivants dans notre Mémoire préliminaire.

Théorème. — Soit

$$Z = \varphi(X, Y)$$

l'équation d'une surface S *dérivable « ordinaire », Dans le cas où* $\varphi(X, Y)$ *est trois fois différentiable dans son domaine de définition, cette fonction* φ *vérifie une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, linéaire par rapport à ces dérivées du troisième ordre et à coefficients polynomiaux par rapport aux dérivée du premier et du deuxième ordre.*

Dans le cas où S est un plan

$$Z = aX - bY + c,$$

on aura

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2\, \partial Y} = 0$$

et, par suite, on aura par exemple

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial X^2\, \partial Y} = 0.$$

Dans le cas où S est un cylindre, on a

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}\right)^2 = 0$$

et en dérivant en X ou en Y, on aura bien une équation du troisième ordre du type annoncé.

Dans le cas de la famille VII, l'équation de S dépend d'une fonction de deux variables qui est arbitraire, à des conditions près de différentiabilité près. Par conséquent, elle ne peut être soumise à aucune équation aux dérivées partielles.

Le théorème précédent se déduit d'ailleurs immédiatement du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute surface dérivable « ordinaire » dont l'équation a l'une des formes canoniques* III *à* VI *du tableau* I *et telle que* Z *soit différentiable trois fois dans le domaine de définition, vérifie l'équation aux dérivées partielles correspondante du tableau* VIII *ci-après.*

Pour écrire plus brièvement ce tableau, nous poserons comme d'habitude

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad \ldots, \qquad T = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$$

et, en outre,

$$\lambda = \frac{\partial^3 Z}{\partial X^3}, \qquad \mu = \frac{\partial^3 Z}{\partial X^2\,\partial Y}, \qquad \nu = \frac{\partial^3 Z}{\partial X\,\partial Y^2}, \qquad \rho = \frac{\partial^3 Z}{\partial Y^3}.$$

TABLEAU VIII.

Équations canoniques aux dérivées partielles des surfaces dérivables.

III. $(\mu Q - \nu P)\,PQ = S(RQ^2 - TP^2)$;

IV. $\nu Q = TS$;

V. $\rho = 0$;

VI. $[(\lambda + \nu)\,Q - (\mu + \rho)\,P]\,(P^2 + Q^2) = 2(R + T)\,\{PQ(R - T) + S(\varphi^2 - P^2)\}$.

LES FAMILLES $\mathcal{H}$. — Soit S une surface dérivable relativement à R ; elle possède une représentation paramétrique déterminée par une fonction hypercomplexe dérivable relativement à R. Cette dernière peut par des « changements de variables » convenables être amenée à prendre une forme canonique du tableau I. C'est dire qu'en effectuant préalablement une transformation linéaire et biunivoque des coordonnées X, Y, Z (et en gardant les mêmes axes), on transforme la surface S en une surface S_1 possédant une représentation paramétrique déterminée par une des fonctions canoniques du tableau I. Selon que cette fonction est du type I_a, I_b, ..., VII, on dira que S_1 *et* S appartiennent à la famille de surfaces $\mathcal{H}_{I_a}$, ..., $\mathcal{H}_{VII}$.

Les surfaces que nous avons appelées surfaces dérivables *ordinaires* sont les surfaces appartenant aux familles de $\mathcal{H}_{II}$ à $\mathcal{H}_{VI}$.

CONFLUENCE DES FAMILLES DE SURFACES DÉRIVABLES. — On peut poser pour les surfaces dérivables un problème analogue au problème de la confluence des familles de fonctions dérivables.

I. Sous une première forme restreinte de ce problème, on peut demander s'il existe des surfaces pouvant être également représentées par des équations appartenant à plusieurs types différents dans le tableau VII.

Il est facile de donner des exemples simples qui permettent de répondre par l'affirmative.

Par exemple, a surface

$$Z = \alpha(X)\beta(Y) \tag{30}$$

est évidemment un cas particulier du type IV du tableau VII. Et quand on prend les logarithmes des valeurs absolues des deux membres de (30), on obtient une équation du type III.

Mais on peut se proposer de trouver, non un exemple, mais toutes les surfaces représentables par deux équations équivalentes des types canoniques respectifs distincts.

Il est curieux de noter qu'un tel problème ait pu être posé et résolu (pour la confluence des types III et VI) sans référence ni au tableau VII, ni à la notion de surface dérivable, par deux auteurs agissant indépendamment et pour des raisons distinctes.

En réalité, ce n'était pas le problème lui-même, mais un problème analytique équivalent qui a été considéré d'abord par Bouligand ([11]), puis par H. Martin ([12]).

Il s'agissait pour eux de trouver deux fonctions d'une seule variable : $a(X)$ et $b(Y)$ telles qu'il existe une fonction $F(X, Y)$ pour laquelle la fonction

$$U(X, Y) = F[a(X) + b(Y)]$$

soit harmonique. Alors on voit que quelle que soit la fonction $A(Z)$, la surface ayant pour équation

$$A(Z) = U(X, Y) \tag{31}$$

et qui sera, par conséquent, du type VI du tableau VII, aura aussi pour équation

$$A(Z) = F[a(X) + b(Y)] \qquad \text{ou} \qquad c(Z) = a(X) + b(Y)$$

qui est du type III. Et réciproquement, toute surface dont l'équation peut se mettre aussi bien sous la forme III que sous la forme VI, correspond à une solution du problème de Bouligand et de Martin.

II. Mais, en réalité, le problème de la confluence, posée sous la première

---

([11]) Dans le numéro de juillet 1949 de la *Revue de Mathématiques spéciales*, Vuibert, Paris, ce problème est proposé à titre d'exercice avec indications sur la solution.

([12]) *Journal of rational Mechanics and Analysis*, vol. II, n° 2.

forme, est trop restreint. Car le tableau I n'est que l'un, quoique sans doute l'un des plus simples, des tableaux équivalents de formes canoniques pour chacun desquels se poserait le problème sous sa première forme.

Le vrai problème de la confluence consiste à chercher s'il y a des surfaces qui appartiennent à la fois à plusieurs des familles $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}, \ldots, \mathcal{H}_{\mathrm{VII}}$ définies à la page 58.

Il faut d'ailleurs observer que le problème est tout résolu quand on veut chercher les surfaces communes à $\mathcal{H}_{\mathrm{VII}}$ et à l'une des autres familles. Car les surfaces

$$Z = K(X, Y)$$

sont si générales qu'il y en a de cette forme dans chacune des autres familles $\mathcal{H}$.

Méthode indirecte. — Observons d'abord que toute forme confluente de fonctions hypercomplexe dérivable donne lieu à une solution du problème actuel. Mais la réciproque n'est pas vraie. Nous en donnons plus loin un exemple.

Un exemple. — Nous nous contenterons d'indiquer comment se pose le problème pour les types III et IV.

Tout d'abord, notons que les trois formes de la page 52 nous fournissent toutes les solutions qu'on peut obtenir par la méthode indirecte, à savoir :

le cône du second degré : $Y^2 = 4XZ$;
le cylindre : $X = A(Z)$;
le plan : $Z = 0$;

ainsi que les surfaces qui dérivent de celles-ci par une transformation linéaire et biunivoque de X, Y, Z.

Mais, nous avons déjà signalé (p. 59), des surfaces beaucoup plus générales, à savoir les surfaces

$$Z = \alpha(X)\,\beta(Y)$$

auxquelles on peut ajouter celles qui s'en déduisent par une transformation linéaire et biunivoque de X, Y, Z.

Pour chercher toutes les surfaces communes à $\mathcal{H}_{\mathrm{III}}$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{IV}}$, on observera que si deux transformations linéaires et biunivoques de X, Y, Z ramènent son équation, l'une à la forme canonique III, l'autre à la forme canonique IV du tableau, alors il y a une transformation analogue

$$(32)\qquad \begin{cases} X_1 = lX + mY + nZ + p; \\ Y_1 = l'X + m'Y + n'Z + p'; \\ Z_1 = l''X + m''Y + n''Z + p'', \end{cases}$$

menant d'une des équations

$$(33)\qquad a(X_1) + b(Y_1) = c(Z_1)$$

du type III à une équation

$$Z = \alpha(X)\beta(Y) + \gamma(X) \tag{33 bis}$$

du type IV. Il faut donc chercher s'il existe des fonctions a, b, c, α, β, γ et des constantes l, m', ..., n'' (avec déterminant des coefficients de X_1, Y_1, Z_1 différent de zéro) telles qu'on ait l'identité

$$\begin{aligned} &a(lX + mY + n[\alpha(X)\beta(Y) + \gamma(X)] + p) \\ &\quad + b(l'X + m'Y + n'[\alpha(X)\beta(Y) + \gamma(X)] + p') \\ &\quad = c(l''X + m''Y + n''[\alpha(X)\beta(Y) + \gamma(X)] + p''). \end{aligned}$$

Ou encore on peut tirer de (33)

$$X_1 = A(u), \qquad Y_1 = B(v), \qquad Z_1 = C(u+v)$$

et de (32)

$$X = \lambda X_1 + \mu Y_1 + \nu Z_1 + \rho, \qquad \ldots, \qquad Z = \lambda'' X_1 + \ldots + \rho''. \tag{34}$$

Et il faudra trouver des fonctions A, B, C, α, β, γ et des constantes λ, μ, ..., ρ'', telles que l'on ait l'identité

$$\begin{aligned} &\lambda'' A(u) + \mu'' B(v) + \nu'' C(u+v)\rho \\ &\quad \equiv \alpha(\lambda A + \mu B + \nu C + \rho)\beta(\lambda' A + \mu' B + \nu' C + \rho') + \gamma(\lambda A + \mu B + \nu C + \rho), \end{aligned}$$

avec un déterminant des coefficients de X_1, Y_1, Z_1, dans (34) qui soit $\neq 0$. Des problèmes analogues se présentent pour toutes les combinaisons analogues des types canoniques deux à deux.

Il faudrait ainsi résoudre une dizaine d'équations fonctionnelles pour traiter complètement un problème qui n'est plus d'importance fondamentale à partir du moment où des exemples simples ont suffit à prouver que les confluences sont possibles.

Nous laisserons à de jeunes mathématiciens le soin de s'y exercer.

Surfaces dérivées relativement à une règle de multiplication.

Introduction. — La définition des surfaces dérivables nous a déjà conduit à une classification des surfaces qui nous paraît intéressante. *Elle fait découler d'une conception commune des familles de surfaces dont les équations canoniques, figurant au tableau* VII *paraissent, au premier abord, sans lien l'une avec l'autre.*

Il vaudrait d'ailleurs la peine de chercher si l'on peut exprimer sous forme purement géométrique la définition d'une surface dérivable (que nous avons donnée ici sous forme d'une condition *analytique* imposée à l'une de ses représentations paramétriques).

On va maintenant déduire de notre définition la notion de *surfaces dérivées d'une surface donnée*, notion qui nous paraît *plus particulièrement nouvelle et intéressante.*

Définition. — Soit S une surface dérivable relativement à une règle R. Elle a une représentation paramétrique correspondant à une fonction $\Phi(w)$ dérivable relativement à R. De même que $\Phi(w)$ détermine une surface S, de même sa dérivée $\Phi'(w)$ détermine une surface S′ qu'il sera naturel d'appeler une *surface dérivée de* S *relativement* à la règle R.

Nous disons *une* surface dérivée de S et non *la* surface dérivée de S.

En effet, nous avons montré, dans notre Mémoire préliminaire, qu'une surface S dérivable relativement à R possède une infinité de représentations paramétriques définies par des fonctions $\Psi(w)$ distinctes de $\Phi(w)$ et pourtant encore dérivables relativement à R. Chaque dérivée $\Psi'(w)$ définira une représentation paramétrique distincte, en général, de celle définie par Φ et correspondant à une surface T *dérivée de* S *relativement* à R. Ces surfaces T seront en général, *distinctes* de S′.

Surfaces dérivées d'une même surface. — Nous avons démontré dans notre Mémoire préliminaire que si pour une surface S dérivable relativement à une règle R, u, v et u_1, v_1 déterminent un même point de S dans deux représentations paramétriques de S correspondant à deux fonctions dérivables relativement à R, $\Phi(w)$, $\Psi(w_1)$, et si S n'est pas une surface cylindrique (en particulier n'est ni plane, ni curviligne), la relation entre u, v et u_1, v_1 est nécessairement de la forme

$$u = \beta u_1 + \beta_1, \qquad v = \beta v_1 + \beta_2, \qquad (\beta \neq 0).$$

En posant

$$\Psi(w_1) = \xi(u_1, v_1) f_1 + \eta(u_1, v_1) f_2 + \varphi(u_1, v_1) f_3,$$

comme

$$\Psi(w_1) \equiv \Psi(u_1 e_1 + v_1 e_2) = \Phi[(\beta u_1 + \beta_1) e_1 + (\beta v_1 + \beta_2) e_2] = \Phi(\beta w_1 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2),$$
$$dw = \beta(du_1 e_1 + dv_1 e_2) = \beta\, dw_1,$$

on aura :

$$\Psi'\, dw_1 = d\Psi(w_1) = d\Phi(w) = \Phi' \beta\, dw_1 = \beta \Phi'\, dw_1.$$

Donc $\Psi'(w_1) = \beta \Phi'(w)$ qui s'explicite sous la forme

$$l f_1 + m f_2 + n f_3 = \beta(\mathrm{L} f_1 + \mathrm{M} f_2 + \mathrm{N} f_3).$$

La surface T dérivée de S par l'intermédiaire de Ψ aura donc, pour chaque point, des coordonnées

$$l = \beta \mathrm{L}, \qquad m = \beta \mathrm{M}, \qquad n = \beta \mathrm{N} \qquad (\beta \neq 0)$$

proportionnelles aux coordonnées L, M, N d'un point de la surface S′ dérivée de S par l'intermédiaire de Φ.

On obtient ainsi des surfaces dérivées toutes homothétiques de l'une d'entre elles.

Translations. — Observons que l'équation de définition

$$dXf_1+\ldots=[Lf_1+\ldots](du\,e_1+dv\,e_2)$$

reste vérifiée quand X, Y, Z sont remplacés par $X+a$, $Y+b$, $Z+c$, sans changer L, M, N, u, v, ni la règle R de multiplication.

Par conséquent, si la surface S restant fixe, on opère une translation des axes, aux équations

$$X_1=a+X(u,v),\qquad \ldots,\qquad Z_1=c+Z(u,v)$$

qui par rapport aux nouveaux axes, définissent la même surface S, s'adjoindront des équations

$$X_1=L(u,v),\qquad Y_1=M(u,v),\qquad Z_1=N(u,v)$$

qui par rapport aux nouveaux axes définissent une surface dérivée de S, relativement à la même règle R, obtenue par translation de la surface dérivée S'. De même, la surface T_1 obtenue par translation de T sera une surface dérivée de S relativement à la même règle R. T_1 sera une surface homothétique de S' mais par rapport à un point, en général distinct de l'origine.

Autrement dit : *toutes les surfaces dérivées d'une même surface dérivable non réduite à une surface cylindrique* (ou plane ou curviligne), *sont homothétiques de l'une d'entre elles* (13). *Et réciproquement.*

Non seulement la démonstration ne s'applique pas aux surfaces dérivables cylindriques, mais l'énoncé lui-même ne s'y applique pas. Plus précisément, chacune de telles surfaces aura bien pour dérivées au moins les homothétiques de l'une de ces surfaces dérivées, mais il pourra y en avoir d'autres. C'est ce que va montrer l'exemple suivant.

Exemple. — Prenons, par exemple, la surface du type II *b*

$$X=u,\qquad Y=e^u,\qquad Z=v. \tag{35}$$

C'est le cylindre

$$Y=e^X. \tag{36}$$

Si on le représente sous la forme générale du même type II *b*

$$X=\xi(u_1),\qquad Y=\eta(u_1),\qquad Z=v_1\xi'(u_1)+\varphi(u_1), \tag{37}$$

il suffit, pour avoir le même cylindre, que l'on ait

$$\eta(u_1)=e^{\xi(u_1)}. \tag{36 bis}$$

Or la surface S'_0 dérivée de S par la représentation (35) est d'après ( )

$$L=1,\qquad M=e^u,\qquad N=0;$$

(13) Ceci dit en abrégé, en considérant une translation comme une homothétie dont le centre est à l'infini.

elle est réduite à la droite

$$L = 1, \qquad N = 0.$$

La surface S′ dérivée de S par la représentation (37) est :

$$l = \xi'(u_1), \qquad m = \eta'(u_1), \qquad n = \rho_1 \xi''(u_1) + \varphi'(u_1).$$

Elle est cylindrique. Si elle était homothétique de S'_0, dans le rapport p, on aurait

$$l = pL + a, \qquad n = pN + b,$$

d'où

$$\xi'(u_1) = p + a, \qquad \rho_1 \xi''(u_1) + \varphi'(u_1) = b. \tag{38}$$

Or si l'on a soin de déterminer $\eta(u_1)$ par la relation (36 *bis*) connaissant $\xi(u_1)$, la représentation (37) donnera le même cylindre (36) quelle que soit la fonction $\xi(u_1)$. On n'aura donc pas nécessairement (38) : les dérivées S′ ne sont pas nécessairement homothétiques de S'_0.

. — D'autre part, considérons une surface U, homothétique d'une surface S dérivable relativement à R. Si S correspond à $\Phi(w)$, U correspondra à

$$\Psi(w) = \beta\Phi(w) + w_0.$$

On aura

$$d\Psi(w) = \beta\, d\Phi(w) = [\beta\Phi'(w)]\, dw.$$

Donc $\Psi(w)$ est dérivable relativement à R et

$$\Psi'(w) = \beta\Phi'(w). \tag{39}$$

$\Psi'(w)$ correspond à une surface U′ dérivée de U relativement à R et l'on voit d'après (39) que U′ est homothétique de S′. D'après ce qui précède, U′ est donc aussi une surface dérivée de S relativement à R.

Finalement nous voyons qu'*il n'y a pas*, au point de vue géométrique, *correspondance* entre une surface S non cylindrique dérivable relativement à R et *sa* surface dérivée S′ relativement à R, mais *seulement correspondance* entre :

la famille des surfaces U (nécessairement dérivables relativement à R) homothétiques d'une surface S dérivable relativement à R,

et la famille des surfaces U′ (nécessairement dérivées de toutes les surfaces U, relativement à R) homothétiques de l'une, S′, des surfaces dérivées de S, relativement à R.

On peut encore dire que toute surface U′ de la seconde famille est une surface dérivée relativement à R (à une homothétie près) de toute surface S de la première famille.

Surfaces paraanalytiques. — Nous dirons qu'une surface est *paraanalytique relativement à une règle* R si l'une au moins de ses représentations paramé-

triques correspond à une fonction hypercomplexe paraanalytique relativement à la règle R (c'est-à-dire une fonction hypercomplexe dérivable indéfiniment relativement à R dans le domaine $\mathcal{D}$ de définition de la surface S).

Il est clair que les dérivées successives de S relativement à R seront alors aussi des surfaces paraanalytiques relativement à R.

Équations des surfaces dérivées d'une surface dérivable donnée par son équation canonique. — Soit S une surface dérivable relativement à une règle R, et donnée par son équation $F(X, Y, Z) = 0$. Nous savons qu'elle a une famille de surfaces dérivées de S relativement à R, famille parfaitement définie et formée (exclusivement quand S n'est pas cylindrique) de surfaces homothétiques entre elles. Il est naturel de se demander comment on pourra former l'équation générale de ces surfaces dérivées connaissant l'équation de S.

Nous savons d'abord que par des « changements de coordonnées » (définis p. 33), nous pouvons ramener l'équation de S à l'une des formes III à VII précisées page 56. Alors on peut former la représentation paramétrique correspondante de S. Celle d'une des surfaces dérivées sera donnée par les expressions correspondantes (déduites des pages 45 et 46)

$$X = L(u, v), \qquad \ldots, \qquad Z = N(u, v).$$

Et de cette représentation, on pourra tirer l'équation

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

de l'une des surfaces S′ dérivées de S. L'équation générale des surfaces dérivée de S sera alors

$$\varphi(\lambda X + a, \lambda Y + b, \lambda Z + c) = 0,$$

où λ, a, b, c sont des paramètres arbitraires ($\lambda \neq 0$).

Nous allons effectuer le calcul de $\varphi(X, Y, Z)$ pour chacune des formes canoniques de III à VII, en laissant de côté le cas des surfaces des types I et II, puisque ces surfaces sont nécessairement cylindriques.

Forme III. — Soit

$$a(X) + b(Y) = c(Z) \tag{40}$$

(où aucun des trois termes n'est constant), l'équation de la surface S. Par hypothèse, on peut alors adopter la représentation paramètrique

$$u = a(X), \qquad v = b(Y), \qquad u + v = c(Z),$$

d'où

$$X = A(u), \qquad Y = B(v), \qquad Z = C(u + v).$$

Alors, d'après la page 45, la représentation

$$X_1 = A'(u), \qquad Y_1 = B'(v), \qquad Z_1 = C'(u + v)$$

sera celle d'une S′, des surfaces dérivées de S; d'où l'on tire l'équation de S′ qui sera de la forme

$$\alpha(X_1)+\beta(Y_1)=\gamma(Z_1), \tag{41}$$

étant entendu que α, β, γ sont déduites respectivement de a, b, c par le processus indiqué.

On peut d'ailleurs formuler explicitement l'équation fonctionnelle qui relie $\alpha(X)$ et $a(X)$, par exemple.

En effet, on a

$$X=A[a(X)], \qquad X_1=A'[\alpha(X_1)], \qquad \text{d'où} \qquad 1=A'[a(X)]\,a'(X).$$

Or on a

$$a(X)=u=\alpha(X_1), \qquad \text{d'où} \qquad 1=A'[\alpha(X_1)]\,a'(X)=X_1 a'(X)$$

et, par suite,

$$a(X)=\alpha\left[\frac{1}{a'(X)}\right].$$

Ainsi, connaissant l'équation (40) de S et, par suite, $a(X)$, $b(Y)$, $c(Z)$, il suffira pour former l'équation (41) de S′, de tirer α, β, γ des équations fonctionnelles

$$\boxed{a(X)=\alpha\left[\frac{1}{a'(X)}\right], \qquad b(Y)=\beta\left[\frac{1}{b'(Y)}\right], \qquad c(Z)=\gamma\left[\frac{1}{c'(Z)}\right].} \tag{42}$$

Forme IV. — Soit

$$Z=\beta(Y)\,\alpha(X)+\gamma(X) \tag{43}$$

[où $\beta'(Y)\not\equiv 0$, $\alpha(X)\not\equiv 0$] l'équation de S; pour obtenir une représentation paramétrique du type correspondant, prenons $v=\beta(Y)$ et soit $u=a(X)$ une fonction convenablement choisie. On en tire

$$X=A(u), \qquad Y=B(v), \qquad \text{d'où} \qquad Z=v\alpha[A(u)]+\gamma[A(u)].$$

En posant $C(u)=\gamma[A(u)]$, il suffira pour avoir une expression du type voulu, de prendre $u=a(X)$, de sorte que

$$\alpha[A(u)]=A'(u).$$

Or,

$$X=A[a(X)], \qquad \text{d'où} \qquad 1=A'(u)\,a'(X).$$

Il suffit donc de prendre $\alpha(X)$ de sorte que

$$a'(X)=\frac{1}{\alpha(X)}$$

[$\alpha(X)$ est supposé $\not\equiv 0$].

Ceci étant, une, S′, des surfaces dérivées de S (relativement à la même règle R que S) sera définie par les formules

$$X_1 = A'(u), \qquad Y_1 = B'(v), \qquad Z_1 = v\,A''(u) + C'(u).$$

Pour en déduire l'équation de S′, on en tire

$$u = f(X_1), \qquad v = g(Y_1),$$

d'où

$$Z_1 = g(Y_1)\,F(X_1) + H(X_1),$$

en posant

$$F(X_1) = A''[f(X_1)], \qquad H(X_1) = C'[f(X_1)].$$

On peut former cette équation en suivant le processus ci-dessus. Ou bien on peut former les équations fonctionnelles définissant g, F, H.

En effet, on a

$$X_1 = A'(u) = \alpha(X), \qquad \gamma(X) = C[a(X)],$$

d'où

$$\gamma'(X) = C'(u)\,a'(X) = \frac{C'(u)}{\alpha(X)},$$

d'où

$$H[\alpha(X)] = C'(u) = \alpha(X)\,\gamma'(X).$$

On obtient donc la fonction $H(X_1)$ au moyen de l'équation fonctionnelle

$$\boxed{H[\alpha(X)] = \alpha(X)\,\gamma'(X)} \tag{45}$$

connaissant les fonctions α et γ figurant dans l'équation (43) de S.

De même, on a

$$A''(u)\,du = dX_1,$$

d'où

$$A''(u) = \frac{d\alpha(X)}{da(X)} = \frac{\alpha'(X)}{a'(X)} = \alpha(X)\,\alpha'(X).$$

Or

$$F[\alpha(X)] = F(X_1) = A''(u) = \alpha(X)\,\alpha'(X).$$

Donc la fonction $F(X_1)$ s'obtiendra comme solution de l'équation fonctionnelle

$$\boxed{F[\alpha(X)] = \alpha(X)\,\alpha'(X).} \tag{46}$$

Enfin

$$g(Y_1) = v = \beta(Y), \qquad \text{avec} \quad Y_1 = B'(v), \qquad Y = B(v),$$

d'où

$$Y_1 = \frac{dB(v)}{dv} = \frac{dY}{d\beta(Y)} = \frac{1}{\beta'(Y)}.$$

Donc $g(Y_1)$ s'obtient comme solution de l'équation fonctionnelle

(47) $$\boxed{g\left[\frac{1}{\beta'(Y)}\right]=\beta(Y).}$$

Forme V. — Soit

$$Z=\alpha(X)Y^2+\beta(X)Y+\gamma(X)$$

l'équation d'une surface S. Nous pourrons encore déterminer la représentation paramétrique d'une dérivée S′ de S si nous obtenons une représentation paramétrique du type V de S. Mais ici le calcul sera beaucoup plus long. En adoptant la notation de la page 38, on est amené à déterminer des fonctions $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$ telles que d'après le tableau I.

$$\alpha(X)=\frac{1}{2}\frac{A''(u)}{[A'(u)]^2},$$
$$\beta(X)=-\frac{B(u)A''(u)}{[A'(u)]^2}+\frac{B'(u)}{A'(u)},$$
$$\gamma(X)=\frac{A''(u)B^2(u)}{2A'(u)^2}-\frac{B(u)B'(u)}{A'(u)}+C(u),$$

avec

$$X=A(u), \qquad Y=\rho A'(u)+B(u).$$

On a

$$\alpha[A(u)]\,dA=\frac{1}{2}\frac{A''}{A'}\,du=\frac{dA'}{2A'}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{2}\log|A'|=\int\alpha(X)\,dX=\varphi(X)+q,$$

d'où

$$\varphi'(X)=\alpha(X), \qquad A'=re^{2\varphi(X)},$$
$$\frac{dX}{du}=A'(u)=re^{2\varphi(X)}, \qquad \text{d'où} \qquad du=\frac{e^{-2\varphi(X)}}{r}dX,$$
$$u=\int\frac{e^{2\varphi(X)}}{r}dX=\frac{\Psi(X)}{r}+q;$$
$$\beta(X)=\frac{d}{du}\frac{B(u)}{A'(u)}, \qquad \frac{B(u)}{A'(u)}=\int\frac{\beta(X)e^{-2\varphi(X)}}{r}dX=\frac{\theta(X)+t}{r};$$
$$B(u)=e^{2\varphi(X)}\int\beta(X)e^{-2\varphi(X)}dX=e^{2\varphi(X)}[\theta(X)+t].$$

Enfin, on a

$$C(u)=\gamma(X)+\frac{d}{du}\frac{B^2(u)}{2A'(u)}.$$

Et alors S′ sera représenté par

$$X_1=A'(u), \qquad Y_1=\rho A''+B', \qquad Z_1=\frac{1}{2}\rho^2A'''+\rho B''+C',$$

d'où

$$Z_1=\frac{A'''}{2A''^2}Y_1^2+\left(\frac{B''}{A''}-\frac{B'A'''}{A''^2}\right)Y_1+C'-\frac{B'B''}{A''}+\frac{B'^2A'''}{2A''^2},$$
$$Z_1\,du=\frac{Y_1^2}{2}d\left(-\frac{1}{A''}\right)+Y_1\,d\left(\frac{B'}{A''}\right)+d\left(C-\frac{B'^2}{2A''}\right),$$

que l'on peut écrire :

$$Z_1 = \alpha_1(X_1)Y_1^2 + \beta_1(X_1)Y_1 + \gamma_1(X_1),$$

avec

$$X_1 = A'(u) = r e^{2\varphi(X)},$$

$$\alpha_1(X_1) = \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(-\frac{1}{A''}\right), \qquad \beta_1(X_1) = \frac{d}{du}\left(\frac{B'}{A''}\right), \qquad \gamma_1(X_1) = \frac{d}{du}\left(C - \frac{B'^2}{2A''}\right).$$

Or

$$du = \frac{1}{r}e^{-2\varphi}\,dX, \qquad A'' = 2A'^2\alpha = 2\alpha r^2 e^{4\varphi}.$$

I. On a

$$\alpha_1(X_1) = \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(-\frac{1}{2r^2}\frac{e^{-4\varphi}}{\alpha}\right) = -\frac{1}{4r^2}\frac{dX}{du}\frac{d}{dX}\frac{e^{-4\varphi}}{\alpha} = +\frac{e^{-2\varphi}(\alpha' + 4\alpha^2)}{4r\alpha^2};$$

$\alpha_1(X_1)$ est donc solution de l'équation fonctionnelle

$$\boxed{\alpha_1(r e^{2\varphi(X)}) = e^{-2\varphi}\left(\frac{\varphi'' + 4\varphi'^2}{4r\varphi'^2}\right),} \tag{48}$$

avec

$$\varphi'(X) = \alpha X.$$

II. On a

$$\begin{aligned}\beta_1(X_1) &= \frac{dX}{du}\frac{d}{dX}\left(\frac{dB}{dA'}\right) = r e^{2\varphi(X)}\frac{d}{dX}\left\{\frac{\beta(X) + e^{2\varphi(X)}2\alpha(X)[\theta(X) + t]}{r e^{2\varphi}2\alpha}\right\}\\ &= e^{2\varphi(X)}\frac{d}{dX}\left\{e^{-2\varphi(X)}\frac{\beta(X)}{2\alpha} + [\theta(X) + t]\right\}\\ &= e^{2\varphi}\left[e^{-2\varphi}\left(\frac{\beta'\alpha - \beta\alpha'}{2\alpha^2}\right) + \frac{\beta}{2\alpha}e^{-2\varphi}(-2\alpha) + \beta e^{-2\varphi}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dX}\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

Ainsi $\beta_1(X_1)$ est solution de l'équation fonctionnelle :

$$\boxed{\beta_1(r e^{2\varphi(X)}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dX}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).} \tag{49}$$

III. On a

$$\gamma_1(X_1) = \frac{dX}{du}\frac{d}{dX}\left(C - \frac{B'^2}{2A''}\right);$$

or

$$\begin{aligned}C - \frac{B'^2}{2A''} &= \gamma(X) + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\frac{B^2}{A'} - \frac{B'^2}{2A''} = \gamma(X) + \left[\frac{BB'}{A'} - B^2\alpha\right] - \frac{1}{4\alpha}\frac{B'^2}{A'^2}\\ &= \gamma(X) - \frac{1}{4\alpha}\left[2\alpha B - \frac{B'}{A'}\right]^2\\ &= \gamma(X) - \frac{1}{4\alpha}[2\alpha e^{2\varphi}(\theta + t) - e^{2\varphi}2\alpha(\theta + t) - e^{2\varphi}\beta e^{-2\varphi}]^2 = \gamma(X) - \frac{\beta^2}{4\alpha},\end{aligned}$$

$$\gamma_1(X_1) = r e^{2\varphi}\frac{d}{dX}\left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right];$$

$\gamma_1(X_1)$ est donc solution de l'équation fonctionnelle

$$\boxed{\gamma_1(r e^{2\varphi(X)}) = r e^{2\varphi(X)}\frac{d}{dX}\left[\gamma(X) - \frac{\beta^2(X)}{4\alpha(X)}\right].} \tag{50}$$

Remarque. — Si l'on écrit les équations de S et de S′ sous la forme

$$(51)\qquad \begin{cases} Z = \alpha(X)[Y+\lambda(X)]^2+\mu(X), \\ Z_1 = \dfrac{\alpha_2(X_1)}{X_1}Y_1^2+\beta_1(X_1)Y_1+X_1\gamma_2(X_1), \end{cases}$$

on pourra tirer α_2, β_1, γ_2 de α, β, γ au moyen des équations fonctionnelles plus simples :

$$(52)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\alpha_2(r\,e^{2\varphi(X)}) = 1+\frac{\alpha'(X)}{4\alpha^2}, \\ &\beta_1(r\,e^{2\varphi(X)}) = \frac{d\lambda(X)}{dX}; \\ &\gamma_2(r\,e^{2\varphi(X)}) = \frac{d\mu(X)}{dX}. \end{aligned}}$$

Forme VI. — Soit

$$a(Z) = U(X, Y), \qquad \text{avec} \quad \Delta U = 0$$

l'équation de S. Pour chercher celle de S′, formons la représentation paramétrique de S correspondant au type VI :

$$u = a(Z), \qquad u+iv = U(X, Y)+iV(X, Y),$$

où $U+iV$ est une fonction analytique de $\zeta = X+iY$ ou

$$Z = A(u), \qquad X+iY = P(u, v)+i\,Q(u, v),$$

où $P+iQ$ est une fonction analytique de $u+iv$. Alors les expressions

$$Z_1 = A'(u), \qquad X_1+iY_1 = \frac{\partial}{\partial u}P(u, v)+i\frac{\partial}{\partial u}Q(u, v)$$

fournissent une réprésentation paramétrique d'une surface S′ dérivée de S.

Pour éviter de former P et Q, observons que

$$u+iv = \varphi(X+iY) = \varphi[f(u+iv)] \qquad \text{d'où} \qquad 1 = \varphi' f';$$

$$X_1+iY_1 = \frac{1}{\varphi'(X+iY)} = \frac{1}{U'_X-iU'_Y},$$

$$X_1 = \frac{U'_X}{U'^2_X+U'^2_Y}, \qquad Y_1 = \frac{U'_Y}{U'^2_X+U'^2_Y}.$$

Dès lors, on a une autre représentation paramétrique de S′.

Car, d'autre part,

$$u = a(Z) = a[A(u)], \qquad \text{d'où} \qquad 1 = a'(Z)A'(u);$$

$$Z_1 = \frac{1}{a'(Z)'} \qquad \text{avec} \quad a(Z) = U(X, Y),$$

En éliminant X, Y, Z entre ces quatre équations, on aura l'équation de S′.

Forme VII. — Soit la surface

$$Z = K(X, Y).$$

On aura une représentation paramétrique du type VII de la page 38 en posant

$$X = u, \qquad Y = v, \qquad Z = K(u, v).$$

Une surface dérivée sera donnée par

$$X_1 = 1, \qquad Y_1 = \frac{\partial K}{\partial u}, \qquad Z_1 = \frac{\partial K}{\partial v}.$$

Elle sera donc dans le plan

$$X_1 = 1.$$

Exemples de détermination de surfaces dérivées. — III. Si S a pour équation

$$X^m + Y^n = Z^p,$$

on a d'après (42)

$$X^m = \alpha\left(\frac{1}{mX^{m-1}}\right), \qquad \text{d'où} \qquad \alpha(X_1) = (mX_1)^{\frac{m}{1-m}};$$

de même pour β, γ, de sorte que l'équation de S′ est :

$$(mX_1)^{\frac{m}{1-m}} + (nY_1)^{\frac{n}{1-n}} = (pZ_1)^{\frac{p}{1-p}}.$$

IV. Si S a pour équation

$$Z = XY^n + X^p,$$

on aura d'abord d'après (47)

$$g\left(\frac{1}{nY^{n-1}}\right) = Y^n,$$

de sorte que comme plus haut

$$g(Y_1) = (nY_1)^{\frac{n}{1-n}}.$$

Par contre $X_1 = X$, et d'après (46), (45)

$$F(X) = X, \qquad H(X) = XpX^{p-1}.$$

Ainsi S′ a pour équation

$$Z_1 = X_1(nY_1)^{\frac{n}{1-n}} + pX_1^p.$$

V. Prenons le cas où $\alpha(X)$, $\beta(X)$, $\gamma(X)$ sont constants, de sorte que l'équation de S est celle d'un cylindre parabolique

$$Z = \alpha Y^2 + \beta Y + \gamma.$$

Alors, d'après les formules de la page 69,

$$\varphi'(X) = \alpha, \qquad X_1 = r\,e^{2\alpha X}$$
$$\alpha_1(X_1) = \frac{e^{-2\alpha X}}{r} = \frac{1}{X_1},$$
$$\beta_1(X_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1(X_1) = 0,$$

d'où

$$Z_1 = \frac{1}{X_1}Y_1^2.$$

Ainsi la surface dérivée S′ de S a pour équation :

$$Y_1^2 = X_1 Z_1,$$

cône du second degré ayant son sommet à l'origine.

VI. Soit S la surface dont l'équation est

$$Z^m = X^2 - Y^2, \qquad (m \neq 1).$$

Avec les notations de la page 45, on aura

$$Z_1 = \frac{1}{m Z^{m-1}}, \qquad X_1 = \frac{1}{2}\frac{X}{X^2+Y^2}, \qquad Y_1 = \frac{1}{2}\frac{-Y}{X^2+Y^2},$$

d'où

$$Z^{m-1} = \frac{1}{4}\frac{X_1^2 - Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2}$$

et, par suite, l'équation de S′ est :

$$4(m Z_1)^{\frac{m}{2-m}} = \frac{X_1^2 - Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2}.$$

Surfaces exponentielles.

Première définition. — Si l'on veut distinguer parmi les surfaces d'une famille de surfaces dérivables relativement à une règle R, des surfaces dont la définition rappelle l'une des définitions de la fonction exponentielle classique, on peut trouver assez naturelle la définition suivante :

Une surface dérivable relativement à R serait une surface dont l'une des représentations paramétriques correspond à une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ qui est exponentielle relativement à R. Ce sera une surface exponentielle canonique si $\Phi(w)$ est canonique. En se reportant au tableau V (p. 53) des fonctions exponentielles canoniques, on en déduit par des calculs faciles, les équations suivantes de ces surfaces.

Tableau IX.

Équations des surfaces exponentielles canoniques suivant la première définition.

I.	$\left\{\begin{array}{ll} \text{I}_a : & X = 0, \quad Y = \alpha, \\ \text{I}_b : & X = Y = 0, \end{array}\right.$	droite. droite;
II.	$\left\{\begin{array}{ll} \text{II}_a \text{ et II}_b : & \dfrac{X}{\alpha} = \dfrac{Y}{\beta}, \\ \text{II}_c : & \dfrac{X}{\alpha} = \dfrac{Y}{\beta} = \dfrac{Z}{\gamma}, \end{array}\right.$	plan. droite;
III.	$\gamma XY = \alpha\beta r,$	paraboloïde hyperbolique;
IV.	$Z = a e^{\frac{Y}{X}},$	conoïde;
V.	$a(Y^2 - 2XZ) + bX^2 = 0,$	cône du second degré;
VI.	$(\beta^2 + \gamma^2)X^2 = \alpha^2(Y^2 + Z^2),$	cône du second degré;
VII.	$X = Y = 0,$	droite.

Mais la définition précédente, si elle n'exige que des calculs faciles, est trop analytique et surtout trop étroite. Nous allons en examiner une autre, moins analytique, plus intuitive mais donnant lieu à des calculs moins simples.

Deuxième définition. — Soit S une surface dérivable relativement à une règle R donnée. Par analogie avec une propriété de la fonction exponentielle e^x, et puisqu'ici il n'y a pas *une* surface dérivée de S, mais une famille de surfaces dérivées, nous dirons que S est une surface exponentielle relativement à la règle R, si elle coïncide avec l'une de ses propres dérivées relativement à R. Il est clair que les surfaces exponentielles au sens de la première définition seront aussi exponentielles au sens de la seconde, mais non réciproquement.

Nous nous limiterons au cas des surfaces dérivables *non* cylindriques, cas qui est plus simple en ce que les surfaces dérivées d'une même surface S sont toutes homothétiques par rapport à l'origine.

Nous allons déterminer des surfaces exponentielles de chaque forme canonique.

Pour chaque forme, nous indiquerons la forme générale des équations à résoudre pour trouver toutes les surfaces exponentielles de chaque type.

Comme pour plusieurs types, on est ramené à la solution d'équations fonctionnelles analogues, nous reporterons à la fin l'étude de ce genre d'équation fonctionnelle et nous commencerons par donner des exemples simples. Il sera inutile de répéter les exemples particulièrement simples du tableau IX.

Nous en donnerons donc des exemples un peu moins simples en montrant comment on peut opérer, soit en passant par une représentation paramétrique, soit en utilisant les équations fonctionnelles des pages 65 à 71.

Famille III. — *Méthode directe.* — Partons de l'équation générale

$$a(X)+b(Y)=c(Z)$$

d'une surface S dérivable du type III. On obtiendra l'équation

$$\alpha(X_1)+\beta(Y_1)=\gamma(Z_1) \tag{53}$$

d'une S′ de ses dérivées en prenant pour α, β, γ des solutions du système ( ). Pour que S soit exponentielle, il faut et il suffit qu'elle soit identique à une homothétique de S′, c'est-à-dire que l'équation (53) représente la même surface que l'équation

$$a(pX_1+\lambda)+b(pY_1+\mu)=c(pZ_1+\nu) \qquad (p\neq 0).$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faudra, d'après la page 57, qu'on ait

$$a(pX_1+\lambda)=\xi\alpha(X_1)+\rho, \qquad b(pY_1+\mu)=\xi\beta(Y_1)+\eta,$$
$$c(pZ_1+\nu)=\xi\gamma(Z_1)+\rho+\eta \qquad (\xi\neq 0).$$

Il faut alors pour trouver l'exponentielle la plus générale du type III déter-

miner les fonctions a, b, c telles qu'il existe des nombres $p \neq 0$, $\xi \neq 0$, λ, μ, ν, ρ, η pour lesquels

$$(54)\qquad \begin{cases} a\left[\dfrac{p}{a'(X)} + \lambda\right] = \xi a(X) + \rho, \\ b\left[\dfrac{p}{b'(Y)} + \mu\right] = \xi b(Y) + \nu, \\ c\left[\dfrac{p}{c'(Z)} + \nu\right] = \xi c(Z) + \rho + \eta, \end{cases}$$

Méthode indirecte. — Les expressions

$$X = A(u), \qquad Y = B(v), \qquad Z = C(u+v)$$

représentent une surface S du type III et les expressions

$$X_1 = A'(u), \qquad Y_1 = B'(v), \qquad Z_1 = C'(u+v)$$

en représentent une surface dérivée S'.

Pour que S soit exponentielle, il faut que S soit identique à une homothétique de S', ou S' identique à une homothétique S_2 de S :

$$X_2 = pA(u_1) + a, \qquad Y_2 = pB(v_1) + b, \qquad Z_2 = pC(u_1 + v_1) + c \qquad (p \neq 0).$$

Puisque les représentations paramétriques de S' et S_2 sont du même type III et représentent la même surface, elles doivent d'après la page 62, devenir identiques en prenant pour u_1, v_1 des expressions de la forme

$$u_1 = tu + \sigma, \qquad v_1 = tv + \sigma' \qquad (t \neq 0).$$

Finalement les fonctions A, B, C doivent être telles qu'il existe des nombres $p \neq 0$, $t \neq 0$, a, b, c, σ, σ' tels que

$$(55)\qquad \begin{cases} A'(u) = pA(tu + \sigma) + a, \qquad B'(v) = pB(tu + \sigma') + b, \\ C(u+v) = pC[t(u+v) + \sigma + \sigma']. \end{cases}$$

Pour la raison indiquée page 73, nous reportons plus loin (p. 79), l'étude générale de ce type d'équations fonctionnelles.

On observera, cependant, dès maintenant, que si l'on réussit à former plusieurs systèmes de solutions (A_1, B_1, C_3), ..., (A_n, B_n, C_n) du système (55), on pourra en déduire le système plus général de solutions

$$A = \Sigma q_k A_k, \qquad B = \Sigma r_k B_k, \qquad C = \Sigma s_k C_k.$$

Exemple simple. — Soit la surface S

$$(56)\qquad \boxed{Z = KX^a Y^b} \qquad (X, Y > 0;\ a, b > 0).$$

On peut en former une représentation paramétrique

$$X = e^{\frac{u}{a}}, \qquad Y = e^{\frac{v}{b}}, \qquad Z = K e^{u+v}$$

qui est bien du type III. On a la surface dérivée générale T

$$X_1 = pL + \alpha = \frac{p}{a} e^{\frac{u}{a}} + \alpha, \qquad Y_1 = pM + \beta = \frac{p}{b} e^{\frac{v}{b}} + \beta$$
$$Z = pN + \gamma = pK e^{u+v} + \gamma.$$

Pour que T soit identique à S, il suffit que l'on puisse trouver $p, \sigma, \sigma', t, \alpha, \beta, \gamma$ tels que

$$\frac{p}{a} e^{\frac{u}{a}} + \alpha = e^{\frac{tu+\sigma}{a}}, \qquad \frac{p}{b} e^{\frac{v}{b}} + \beta = e^{\frac{tv+\sigma'}{b}},$$
$$p e^{u+v} + \gamma = e^{tu+tv+\sigma+\sigma'}.$$

D'où

$$\frac{p}{a} X + \alpha = e^{\frac{\sigma}{a}} X^t \quad \text{quel que soit } X > 0 \qquad (p \neq 0).$$

On a donc $t = 1$, $\alpha = 0$ et, de même, $\beta = \gamma = 0$. Dès lors :

$$\frac{p}{a} = e^{\frac{\sigma}{a}}, \qquad \frac{p}{b} = e^{\frac{\sigma'}{b}}, \qquad p = e^{\sigma+\sigma'}, \tag{57}$$

d'où en éliminant σ et σ'

$$p = \left(\frac{p}{a}\right)^a \left(\frac{p}{b}\right)^b,$$

où

$$p^{a+b-1} = a^a b^b,$$

Si donc a et b positifs sont pris arbitrairement *tels que* $a + b \neq 1$, (c'est-à-dire que S ne soit pas un cône ayant son sommet à l'origine) on pourra calculer p par cette formule et ensuite σ et σ' par les formules (57).

Donc toutes les surfaces d'équation (56) qui ne sont pas des cônes, sont des surfaces exponentielles du type III dépendant des *trois paramètres* K, a, b.

Famille IV. — En raisonnant comme pour III, pour qu'une surface exponentielle S du type IV, qu'on peut écrire

$$X = A(u), \qquad Y = C(v), \qquad Z = vA'(u) + B(u)$$

soit exponentielle, il faut qu'on puisse déterminer des nombres $p \neq 0$, $t \neq 0$, σ, σ' tels que

$$\begin{cases} A'(u) = p\,A(tu+\sigma) + a, \\ C'(v) = p\,C(tv+\sigma') + c, \\ B'(u) = p\,B(tu+\sigma) + p\sigma' A'(tu+\sigma) + b. \end{cases} \tag{58}$$

Exemple simple. — Si l'équation de S est de la forme

$$Z = X[\lambda \log Y + \mu X^r + \nu], \tag{59}$$

où l'on suppose naturellement $r \neq 0$; S est du type IV. D'après la page 45, l'équation

$$Z_1 = F(X_1)g(Y_1) + H(X_1) \tag{60}$$

représentera une surface dérivée de S du même type IV, quand on prendra

$$g(Y)=\log Y, \qquad F(\lambda X)=\lambda X\lambda,$$
$$H(\lambda X)=\lambda X[\mu(r+1)X^r+\nu],$$

d'où

$$F(X_1)=\lambda X_1, \qquad H(X_1)=X_1\left[\mu(r+1)\left(\frac{X_1}{\lambda}\right)^r+\nu\right].$$

De sorte que (60) peut s'écrire

$$Z_1=X_1\left[\lambda\log Y_1+\mu\frac{(r+1)}{\lambda^r}X_1^r+\nu\right].$$

Dès lors pour que (59) soit exponentielle relativement à la règle du type IV, il suffit qu'on prenne $r>0$, puis λ tels que

$$\alpha^r=r+1.$$

Famille V. — On devra avoir

$$A'(u)=pA(tu+\sigma)+a,$$
$$\rho A''+B'=p\{(t\rho+\sigma')A'(tu+\sigma)+B(tu+\sigma)\}+b,$$
$$\frac{\rho^2}{2}A'''+\rho B''+C'=p\left\{\frac{(t\rho+\sigma')^2}{2}A''(tu+\sigma)+(t\rho+\sigma')B'(tu+\sigma)+C(tu+\sigma)\right\}+c.$$

D'où

$$(61)\qquad\begin{cases} A'(u)=pA(tu+\sigma)+a,\\ B'(u)=p\{\sigma'A'(tu+\sigma)+B(tu+\sigma)\}+b,\\ C'(u)=p\left\{\frac{\sigma'^2}{2}A''(tu+\sigma)+\sigma'B'(tu+\sigma)+C(tu+\sigma)\right\}+c.\end{cases}$$

Exemple simple. — Les surfaces S dont l'équation est du type

$$Z=\alpha(X)Y^2$$

sont des cas particuliers des surfaces canoniques du type V (tableau VII).

Elles ne sont pas nécessairement exponentielles. Mais on peut chercher s'il est possible de choisir la fonction $\alpha(X)$ pour que la surface correspondante, S, soit exponentielle relativement à la règle V. Il suffit que S soit homothétique à l'une de ses dérivées et en particulier à celle, S', que l'on trouve par la méthode de la page 68.

Or, on peut obtenir une représentation paramétrique de S sous la forme

$$X=A(u), \qquad Y=\rho A', \qquad Z=\frac{\rho^2}{2}A''$$

qui donne

$$ZA'^2=\frac{Y^2}{2}A''.$$

Il suffit de prendre

$$(64)\qquad X=A(u) \qquad \text{et} \qquad \alpha(X)=\frac{A''}{2A'^2},$$

d'où l'on tire comme page 68,

$$A' = r\,e^{2\varphi(X)}, \qquad \text{avec} \quad \varphi'(X) = \alpha(X)$$

et

$$u = \int \frac{e^{-2\varphi(X)}\,dX}{r}.$$

Les expressions

$$X_1 = A'(u_1), \qquad Y_1 = \rho_1 A''(u_1), \qquad Z_1 = \frac{\rho_1^2}{2} A'''(u_1)$$

définiront une surface dérivée S′ de S.

S devra coïncider avec une surface homothétique de S′ ou S′ avec une homothétique de S, soit

$$X_2 = p\,A(u) + \lambda, \qquad Y_2 = p\rho\,A'(u) + \mu, \qquad Z_2 = p\frac{\rho^2}{2} A''(u) + \nu.$$

Et il y aura une relation entre u, ρ et u_1, ρ_1 telle que

$$(65) \qquad \begin{cases} p\,A(u) + \lambda = A'(u_1), \qquad p\rho\,A'(u) + \mu = \rho_1 A''(u_1), \\ p\frac{\rho^2}{2} A''(u) + \nu = \rho_1^2 \frac{A'''(u_1)}{2}; \end{cases}$$

On en tire, en éliminant ρ_1,

$$(62) \qquad [A''(u_1)]^2 \left[p\frac{\rho^2}{2} A''(u) + \nu \right] - \frac{A'''(u_1)}{2} [p\rho A'(u) + \mu]^2 = 0.$$

Or, d'après la première des équations (65), si $A'(u_1)$ ne se réduit pas à une constante, u_1 est une fonction déterminée de u seul : $u_1 = \varphi(u)$. En remplaçant u_1 par $\varphi(u)$ dans (62), on a une relation entre les variables indépendantes u et ρ qui doit nécessairement se réduire à une identité. En annulant les coefficients du premier membre de (62) considéré comme un trinome en ρ, on a donc

$$[A''(u_1)]^2 p \frac{A''}{2}(u) = \frac{A'''(u_1)}{2} p^2 A'^2(u),$$

$$A'''(u_1)\,\mu p A'(u) = 0, \qquad [A''(u_1)]^2 \nu = \frac{A'''(u_1)}{2} \mu^2.$$

Si $A'''(u_1)\,A'(u) \neq 0$, comme p doit être $\neq 0$, on a $\mu = 0$, d'où

$$[A''(u_1)]^2 \nu = 0$$

et si $A''(u_1) \neq 0$, on a $\nu = 0$. Il reste alors

$$p \frac{A'''(u_1)}{[A''(u_1)]^2} = \frac{A''(u)}{A'^2(u)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{p\,dA''(u_1)}{[A''(u_1)]^2\,du_1} = \frac{dA'(u)}{[A'(u)]^2\,du}.$$

Or d'après (65)

$$(63) \qquad p A'(u)\,du = A''(u_1)\,du_1,$$

donc

$$\frac{d\mathrm{A}''(u_1)}{\mathrm{A}''(u_1)} = \frac{d\mathrm{A}'(u)}{\mathrm{A}'(u)},$$

d'où

$$\mathrm{A}''(u_1) = q\,\mathrm{A}'(u)$$

d'où en portant dans (63)

$$p\,\mathrm{A}'(u)\,du = q\,\mathrm{A}'(u)\,du_1 \qquad \text{et} \qquad p\rho\,\mathrm{A}'(u) = \rho_1 q\,\mathrm{A}'(u)$$

ou

$$\mathrm{A}'(u)[p\,du - q\,du_1] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}'(u)[p\rho - q\rho_1] = 0.$$

On a déjà supposé $\mathrm{A}'(u) \neq 0$, donc en posant $t = \frac{q}{p}$

$$u = tu_1 + \sigma. \qquad \rho = t\rho_1,$$

donc

$$\mathrm{A}''(u_1) = q\,\mathrm{A}'(tu_1 + \sigma)$$

et en intégrant

$$p\,\mathrm{A}(u) + \lambda = \mathrm{A}'(u_1)$$

La fonction $\mathrm{A}(u)$ sera donc déterminée par la relation fonctionnelle

$$\mathrm{A}'(u) = p\,\mathrm{A}(tu_1 + \sigma) + \lambda. \tag{66}$$

Quand on aura trouvé la solution générale en $\mathrm{A}(u_1)$ de cette équation, on obtiendra $\alpha(\mathrm{X})$ en éliminant α entre les deux équations (64). On observera que l'équation fonctionnelle (66) est analogue aux équations fonctionnelles (55) relatives au type III, à la page 74.

Famille VI. — On doit avoir

$$f'(u + iv) = p\,f(tu + \sigma + i(tv + \sigma')) + \mu + i\nu,$$
$$\mathrm{A}'(u) = p\,\mathrm{A}(tu + \sigma) + \lambda.$$

En posant

$$u + iv = z, \qquad \sigma + i\sigma' = \varphi, \qquad \mu + i\nu = \rho,$$

la première relation devient analogue à la seconde :

$$f'(z) = pf(tz + \varphi) + \rho.$$

Exemple simple. — La surface S représentée par

$$\mathrm{X} + i\mathrm{Y} = e^{(a+ib)(u+iv)}, \qquad \mathrm{Z} = e^{\alpha u} \qquad (\alpha \neq 0)$$

est évidemment du type VI.

On s'assure facilement que son équation est

$$\mathrm{Z} = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)^{\frac{\alpha a}{2(a^2+b^2)}}\, e^{\frac{\alpha b}{a^2+b^2}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}}.$$

de la forme

$$\boxed{\mathrm{Z} = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)^q\, e^{r\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}}.} \tag{67}$$

Inversement, se donnant q et r, et supposant naturellement $qr \neq 0$, on peut la représenter ainsi (en remplaçant les u, v précédents par αu et αv)

$$X + iY = e^{\frac{u+iv}{2q-ir}}, \qquad Z = e^{u}. \tag{68}$$

Pour prouver que cette surface est exponentielle du type VI, il suffirait de démontrer qu'on peut trouver σ, σ' tels que

$$\frac{1}{2q-ir}\, e^{\frac{u+iv}{2q-ir}} = p\, e^{\frac{u+iv}{2q-ir}}\, e^{\frac{\sigma+i\sigma'}{2q-ir}},$$

$$e^{u} = p\, e^{u+\sigma}.$$

D'où, en prenant $p = e^{-\sigma}$

$$\frac{1}{2q-ir} = e^{\frac{\sigma+i\sigma'}{2q-ir}-\sigma}.$$

ou

$$\sigma(1-2q) + i(\sigma' + r\sigma) = -(2q-ir)\log(2q-ir).$$

Si $q \neq \frac{1}{2}$, on peut en tirer σ, puis σ'.

Dès lors, on voit qu'il suffit de supposer $q \neq \frac{1}{2}$ pour que la surface représentée par (67) soit une surface exponentielle du type V.

D'ailleurs, on a déjà rencontré au tableau IX (pour $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ et à une permutation de X et Z près) une surface exponentielle correspondant ici au cas où $q = \frac{1}{2}$ (et $r = 0$).

Solution générale de l'équation fonctionnelle $A'(u) = pA(tu+\sigma) + a$. Réduction de l'équation. — Posons

$$A(u) = A_1(pu+\varphi) + \lambda.$$

On aura

$$pA_1'(pu+\varphi) = a + p[\lambda + A_1(\varphi + ptu + p\sigma)].$$

Par hypothèse p est $\neq 0$, on peut prendre $\lambda = -\frac{a}{p}$, d'où

$$A_1'(pu+\varphi) = A_1(tpu + \varphi + p\sigma)$$

ou

$$A_1'(u') = A_1[t(u'-\varphi) + \varphi + p\sigma].$$

On a alors *deux cas*.

Ou bien $t \neq 1$; on peut prendre

$$\varphi = \frac{p\sigma}{t-1}, \qquad \text{d'où} \qquad A_1'(u') = A_1(tu') \qquad (t \neq 1)$$

ou bien $t = 1$ et on a

$$A_1'(u') = A_1(u'+s) \qquad \text{en posant} \quad s = p\sigma.$$

Ainsi nous avons à trouver les solutions de deux équations fonctionnelles de la forme

$$\theta'(u) = \theta(u+s), \tag{69}$$

$$\xi'(u) = \xi(tu) \qquad (t \neq 1). \tag{70}$$

La première équation fonctionnelle réduite. — La première donne immédiatement dans le cas particulier où s est nul

$$\theta(u) = \mathrm{K}\, e^{u}.$$

Reste donc à considérer le cas où $s \neq 0$.

Alors dans ce cas, cherchons les solutions de (69) qui sont définies de $-\infty$ $+\infty$.

Pour que $\theta(u)$ soit une telle solution de (69), il faut que cette équation ait un sens et, par suite, que $\theta(u)$ soit partout dérivable. $\theta(u+s)$ étant alors aussi partout dérivable, $\theta'(u)$ sera partout dérivable. $\theta(u)$ aura donc partout une dérivée seconde. Et ainsi de suite. Ainsi $\theta(u)$ *devra être partout indéfiniment dérivable.*

Alors on pourra écrire

$$\theta^{(p)}(u) = \theta^{(p-1)}(u+s) \tag{71}$$

et

$$\theta^{(p)}(u) = \theta(u+ps) \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{72}$$

Il est facile de voir que *si* $\theta(u)$ *est connu dans un intervalle* (u_0, u_1), *de longueur* s $\theta(s)$ *est alors déterminé partout.* Posons, à cet effet,

$$u_n = u_0 + ns, \qquad n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots).$$

et supposons d'abord $s > 0$.

On a

$$\theta(u) = \theta^{(p)}(u - ps), \tag{73}$$

donc $\theta(u)$ est déterminé pour

$$u_p \leq u < u_{p+1}, \qquad (p = 0, 1, \ldots),$$

c'est-à-dire pour $u \geq u_0$. On a

$$\theta(u) = \theta(u_0) + \int_{u_1}^{u+s} \theta(u)\, du;$$

$\theta(u)$ sera donc déterminé dans $u_{-1} \leq u \leq u_0$. Alors on pourra opérer de même dans (u_{-2}, u_{-1}), ...

Finalement, on voit que si $\theta(u)$ est une solution partout, *il suffit de connaître* $\theta(u)$ *pour*

$$u_0 \leq u < u_0 + s = u_1$$

pour que $\theta(u)$ soit exactement *déterminé partout.*

Or $\theta(u)$ est en partie arbitraire dans (u_0, u_1).

On sait que $\theta(u)$ doit être indéfiniment dérivable sur u_0, u_1 et doit être tel que

$$\theta^{(p)}(u_0) = \theta^{(p-1)}(u_1) \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{74}$$

Existe-t-il d'abord une telle fonction ? Donnons-nous arbitrairement une infinité de nombres $c_0, c_1, \ldots$.

Émile Borel a démontré ([14]) que : quels que soient les nombres réels c_0, $c_1, \ldots$ et u_0, il existe une fonction réelle $f(u)$ indéfiniment dérivable quel que soit u telle que

$$f(u_0) = c_0, \qquad f'(u_0) = c_1, \qquad \ldots, \qquad f^{(p)}(u_0) = c_p, \qquad \ldots.$$

Soit maintenant $\mathrm{T}(u)$ une fonction indéfiniment dérivable partout et telle que $\mathrm{T}(u) \neq 0$ pour $u \neq 0$ et que

$$\mathrm{T}(0) = 0, \qquad \mathrm{T}'(0) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{T}^{(p)}(0) = 0, \qquad \ldots;$$

par exemple

$$\mathrm{T}(u) = e^{-\frac{1}{|u|}} \qquad \text{pour} \quad u \neq 0, \quad \mathrm{T}(0) = 0.$$

Et soit $g(u)$ une fonction partout indéfiniment dérivable et pour le moment arbitraire.

Posons alors,

$$\varphi(u) = f(u) + g(u)\,\mathrm{T}(u - u_0).$$

On aura

$$\varphi(u_0) = c_0, \qquad \varphi'(u_0) = c_1, \qquad \ldots, \qquad \varphi^{(p)}(u_0) = c_p, \qquad \ldots.$$

Nous allons montrer qu'on peut choisir $g(u)$ de sorte que

$$\varphi'(u_0) = \varphi(u_1), \qquad \ldots, \qquad \varphi^{(p+1)}(u_0) = \varphi^{(p)}(u_1), \qquad \ldots.$$

On aura

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1) &= f(u_1) + g(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0),\\
\varphi'(u_1) &= f'(u_1) + g(u_1)\,\mathrm{T}'(u_1 - u_0) + g'(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0),\\
\varphi^{(p)}(u_1) &= f^{(p)}(u_1) + g(u_1)\,\mathrm{T}^{(p)}(u_1 - u_0) + \ldots + g^{(p)}(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0).
\end{aligned}$$

Il suffira donc de prendre $g(u)$ tel que

$$\begin{aligned}
g(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0) &= c_1 - f(u_1),\\
g'(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0) &= c_2 - f'(u_1) - g(u_1)\,\mathrm{T}'(u_1 - u_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
g^{(p)}(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0) &= c_{p+1} - f^{(p)}(u_1) - g^{(p-1)}(u_1)\,\mathrm{T}'(u_1 - u_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Et comme $\mathrm{T}(u_1 - u_0) \neq 0$, on pourra ainsi déterminer ce que doivent être

([14]) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 12, 1895, p. 35-44. *Voir* une démonstration simple et un exemple de solution, par Arthur Rosenthal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 4, 1953, p. 600-602.

successivement $g(u_1)$, $g'(u_1)$, ..., $g^{(p)}(u_1)$, ... Or, d'après le théorème de Borel, il existe au moins une fonction partout indéfiniment dérivable $g(u)$ pour laquelle $g(u_1)$, $g'(u_1)$, ... auront les valeurs requises.

En résumé, il existe au moins une fonction $\psi(u)$ indéfiniment dérivable sur (u_0, u_1) et vérifiant (69), à savoir, par exemple, la fonction $\varphi(u)$ précédente.

Il existe d'ailleurs, sur u_0, u_1, une infinité de telles fonctions. Par exemple les fonctions

$$\omega(u) = \psi(u) + \mathrm{T}(u - u_0)\,\mathrm{T}(u - u_1)\,h(u), \tag{75}$$

où $h(u)$ est une fonction partout indéfiniment dérivable, mais à part cela *arbitraire*.

Prenons maintenant $\theta(u) = \psi(u)$ pour $u_0 \leq u < u_1$, puis déduisons comme plus haut et d'une façon unique les valeurs de $\theta(u)$ satisfaisant à (69) sur toute la droite de $-\infty$ à $+\infty$. Une telle fonction sera évidemment partout continue et dérivable indéfiniment sauf peut être pour $u =$ l'un des u_n puisque nous n'avons pas utilisé dans l'extension les valeurs de $\psi(u_1)$, $\psi'(u_1)$, $\psi''(u_1)$, ... Cependant, on aura, par construction de θ

$$\theta(u_1) = \psi'(u_0) = \psi(u_1), \qquad \theta'(u_1) = \psi''(u_0) = \psi'(u_1), \qquad \ldots.$$

c'est-à-dire les valeurs de $\theta(u_1)$ et de ses dérivées à droite seront celles de $\psi(u_1)$ et de ses dérivées à gauche, de sorte que $\theta(u)$ sera continu et indéfiniment dérivable pour $u = u_1$. On verrait de même qu'il en est ainsi pour

$$u = u_2, u_3, \ldots; \qquad u = u_{-1}, u_{-2}, \ldots.$$

En résumé, *l'équation*

$$\theta'(u) = \theta(u + s)$$

a une infinité de solutions partout indéfiniment dérivables.

Chacune d'elles est déterminée partout connaissant ses valeurs sur un intervalle quelconque u_0, u_1 de longueur s. Et pour ses valeurs sur cet intervalle, il faut prendre — et cela suffit — une fonction prise arbitrairement parmi les fonctions $\psi(u)$ en nombre infini qui sont indéfiniment dérivables partout et telles que

$$\psi'(u_0) = \psi(u_1), \qquad \ldots, \qquad \psi^{(p+1)}(u_0) = \psi^{(p)}(u_1), \qquad \ldots.$$

Le cas où $s < 0$, se traiterait exactement de même, sauf qu'on aurait $u < \ldots < u_2 < u_1 < u_0 < u_{-1} < u_{-2} < \ldots$.

Seconde équation fonctionnelle réduite. — Considérons maintenant l'équation

$$\xi'(u) = \xi(tu) \qquad (t \neq 1). \tag{76}$$

Elle se traite de façon analogue à la précédente. Si t était nul, la solution serait de la forme

$$\xi(u) = a(u + 1).$$

Supposons donc $t \neq 1$ et $t \neq 0$ et pour commencer $t > 1$. Alors on voit, comme pour la première équation fonctionnelle, que s'il existe une solution pour toute valeur de t, cette solution doit être partout indéfiniment dérivable et qu'on a

$$\xi^{(p+1)}(u) = t^p \xi^{(p)}(tu), \tag{77}$$

$$\xi^{(p+1)}(u) = t^{1+2+\ldots+p} \xi(t^{p+1} u). \tag{78}$$

Mais, pour la suite, il faut distinguer entre $u > 0$ et $u < 0$. Nous voyons, en effet, que l'équation (76) n'établit aucun lien entre les valeurs de $u > 0$ et les valeurs de $u < 0$, sauf par l'intermédiaire de $u = 0$.

Nous pouvons donc d'abord chercher des fonctions qui soient chacune une solution pour $u \neq 0$, c'est-à-dire que $\xi(u)$ coïncidera pour $u > 0$ avec une solution $\eta(u)$ définie seulement pour $u > 0$ et, par suite, indéfiniment dérivable pour $u > 0$ et $\xi(u)$ coïncidera pour $u < 0$, avec une solution $\varphi(u)$ définie seulement (et, par suite, indéfiniment dérivable) pour $u < 0$.

Si, alors, u_0, u'_0 sont deux nombres arbitraires l'un $u_0 > 0$, l'autre $u'_0 < 0$ et si l'on pose

$$u_n = t^n u_0, \qquad u'_n = t^n u'_0,$$

on aura

$$u'_2 < u'_1 < u'_0 < u'_{-1} < u'_{-2} < \ldots < 0 < \ldots < u_{-1} < u_0 < u_1 < \ldots.$$

Et en procédant comme pour la première équation fonctionnelle, les formules (77) et (78) légèrement différentes de (71) et (72) conduiront à la même conclusion :

Il existe une infinité de solutions $\eta(u)$, $\varphi(u)$ définies respectivement pour $u > 0$ et pour $u < 0$; $\eta(u)$ est déterminé connaissant seulement ses valeurs dans un intervalle (u_0, u_1) quelconque pourvu que $\frac{u_1}{u_0} = t$, $u_0 > 0$.

On peut d'ailleurs prendre pour les valeurs d'une solution $\eta(u)$ dans un tel intervalle toute fonction $\psi(u)$ indéfiniment dérivable dans cet intervalle et telle que

$$\psi'(u_0) = \psi(u_1), \qquad \psi^{(p+1)}(u_0) = t^p \psi^{(p)}(u_1) \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Il existe, comme on l'a vu plus haut, une infinité de telles fonctions. Parmi elles il y en a une infinité dépendant d'une fonction indéfiniment dérivable sur (u_0, u_1) et qui en u_0 prennent avec leurs dérivées une suite de valeurs arbitrairement données.

On aura des résultats analogues pour $\varphi(u)$ en remplaçant u_0, u_1 par u'_0, u'_1 tels que $\frac{u'_1}{u'_0} = t$, $u'_0 < 0$.

Considérons maintenant deux telles solutions $\eta(u)$ pour $u > 0$, $\varphi(u)$ pour $u < 0$. Si l'on appelle $\xi(u)$ une fonction égale à $\eta(u)$ pour $u > 0$ et à $\varphi(u)$ pour $u < 0$ et enfin égale à une valeur arbitraire a pour $u = 0$, $\xi(u)$ sera une fonction définie pour tout u qui est indéfiniment dérivable pour $u \neq 0$ et qui vérifie (76) pour $u \neq 0$.

Si elle vérifie (76) aussi pour $u=0$, il faut qu'elle soit aussi indéfiniment dérivable pour $u=0$, donc qu'elle et ses dérivées soient continues pour $u=0$. On devra donc avoir

$$(79)\qquad \begin{cases} a=\xi(0)=\lim\limits_{u\to+0}\eta(u)=\lim\limits_{u\to-0}\varphi(u) \\ \lim\limits_{u\to+0}\eta^{(p)}(u)=\lim\limits_{u\to-0}\varphi^{(p)}(u)=\text{par définition } \xi^{(p)}(0). \end{cases}$$

Ces dernières relations sont, d'après (78), équivalentes aux premières de (79).

Il faut, en outre, que

$$(80)\qquad \lim_{u\to+0}\eta'(u)=\lim_{u\to+0}\frac{\eta(u)-a}{u}=\text{par définition } \xi'(0)=a$$

et de proche en proche :

$$(80\ bis)\qquad \lim_{u\to+0}\frac{\eta^{(p)}(u)-\xi^{(p)}(0)}{u}=\xi^{(p+1)}(0).$$

Et de même pour $\varphi(u)$.

La dernière relation est équivalente d'après (78) à

$$(81)\qquad \lim_{u\to 0} t^{1+2+\ldots+p-1}\frac{[\eta(t^p u)-a]}{u}=t^{1+2+\ldots+p}a$$

ou

$$\lim_{u\to+0}\frac{\eta(t^p u)-a}{t^p u}=a.$$

L'égalité (80 *bis*)est donc équivalente à (80).

Il suffit donc qu'on ait

$$\lim_{u\to+0}\frac{\eta(u)-a}{u}=\lim_{u\to+0}\eta(u)$$

et de même pour φ, donc en définitive que l'on ait ( ) et

$$\lim_{u\to+0}\left[\frac{\eta(u)-a}{u}-\eta(u)\right]=0=\lim_{u\to-0}\left[\frac{\varphi(u)-a}{u}-\varphi(u)\right].$$

Dans le cas où $t<1$, les raisonnements seraient les mêmes, mais les points u_{-1}, u_0, u_1, ... seraient dans l'ordre décroissant au lieu de l'ordre croissant. En outre, dans ce cas, on peut trouver une solution analytique.

Cherchons, en effet, s'il existe une solution représentable par une fonction holomorphe à l'origine

$$\xi(u)=a_0+a_1u+\ldots+a_nu^n+\ldots.$$

On devra avoir

$$a_1+2a_2u+\ldots+na_nu^{n-1}+\ldots=a_0+a_1tu+\ldots+a_{n-1}t^{n-1}u^{n-1}+\ldots.$$

Si une telle solution existe, elle est donc de la forme

$$\xi(u) = a_0 \, \mathrm{F}(u),$$

$$\mathrm{F}(u) = 1 + u + \frac{t}{2} u^2 + \ldots + t^{1+\ldots+(n-1)} \frac{u^n}{n!} + \ldots. \tag{82}$$

Comme cette série converge quel que soit u pour $|t| < 1$, elle représente bien une solution de ( ) qui est une fonction entière de u. On voit, en outre, qu'il n'existe pour $t > 1$ aucune solution holomorphe à l'origine.

Après avoir obtenu les résultats précédents, nous avons appris qu'à l'occasion d'un problème arithmétique sans aucun rapport avec notre problème géométrique, Kurt Mahler ([15]) avait été conduit à étudier la même équation fonctionnelle

$$\xi'(u) = \xi(tu).$$

Mais c'est surtout le comportement asymptotique à l'infini de $\xi(u)$ dont il s'est occupé, étude qui a été poursuivie (pour une équation un peu plus générale), par N. G. de Bruijn ([16]) et pour laquelle nous renvoyons à ces deux auteurs.

Généralisation. — L'équation plus générale que (70) traitée par de Bruijn est

$$\xi'(u) = e^{\alpha u + \beta} \xi(u + s).$$

Les résultats que nous avons obtenus pour (70) s'étendraient sans difficulté à l'équation plus générale encore

$$\xi'(u) = e^{\mathrm{F}(u)} \xi(tu),$$

où $\mathrm{F}(u)$ est une fonction partout indéfiniment dérivable arbitraire donnée.

([15]) *On a special functional equation* (*J. London Math. Soc.*, 15, t. 1940, p. 115-123).

([16]) *The difference-differential equation* $\mathrm{F}'(x) = e^{\alpha x + \beta} \mathrm{F}(x - 1)$ (*Proc. Kon. Nederlandse Akademie van Wetensch*, t. LVI, p. 448-464).

SUR LA

CONVERGENCE STOCHASTIQUE DANS LES ESPACES UNIFORMES

Par Shafik DOSS.

1. Introduction. — Il est bien connu que les espaces uniformes ([1], chap. II) (1) constituent une généralisation naturelle des espaces métriques.

Plusieurs notions et propriétés attachées aux variables aléatoires numériques, la convergence stochastique notamment, ont été récemment étendues aux variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace métrique arbitraire [2], [3].

Nous montrons, dans le présent article, que la convergence stochastique peut être, d'une manière naturelle, définie pour les variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace uniforme.

On introduira :

(i) *la convergence au sens de Bernoulli ou convergence légale;*
(ii) *la convergence en probabilité;*
(iii) *la convergence forte en probabilité;*
(iv) *la convergence presque certaine ou convergence avec la probabilité* 1.

Ces définitions seront données, comme on le fait dans les espaces uniformes, pour une famille arbitraire de variables aléatoires et selon un *filtre*.

On verra que (iii) implique (ii), que (ii) implique (i) mais que, contrairement à ce qui a lieu pour les variables aléatoires numériques, on doit, en général, distinguer entre (iii) et (iv). Deux théorèmes, du type de ceux établis par Kozakiewicz [5], seront donnés pour (ii) et (iii). Le Mémoire se termine

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin du Mémoire.

par une généralisation du théorème bien connu selon lequel une suite de variables aléatoires numériques indépendantes diverge avec la probabilité 1 ou converge avec la probabilité 1 vers une constante.

2. Définitions et notations. — On considère une famille de variables aléatoires $X_\tau(=X_{\xi,\tau})$ où X_τ est un élément d'un espace uniforme E, τ un élément d'un ensemble F et ξ un élément de l'ensemble G des *événements élémentaires* [4] sur lequel une mesure (probabilité) P est donnée.

$\mathcal{F}$ désignera un filtre sur F, C un élément du filtre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ sera toujours donné par une famille d'éléments C de $\mathcal{F}$ constituant une base.

L'espace uniforme E sera défini par une famille d'entourages *symétriques* V constituant une base pour le filtre des entourages dans l'espace produit $E\times E$.

Si M est un ensemble quelconque de points de E, son complément par rapport à E sera désigné par M'. Un point de l'espace $E\times E$ sera désigné par (x, y).

$\underset{\xi}{E}(R)$ désignera l'ensemble des valeurs de ξ pour lesquelles la propriété R est vraie. Le symbole $\bigwedge$ signifiera « *pour tout* » et $\bigvee$ signifiera « *il existe* ».

Nous écrivons dans le langage habituel du calcul des probabilités, mais nous utilisons parfois, pour une plus claire compréhension, les notations précédentes.

(i) *Convergence au sens de Bernoulli ou convergence légale.* — La variable X_τ sera dite convergente au sens de Bernoulli vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, si pour tout ensemble A de *continuité* pour la fonction de distribution de X et pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C\in\mathcal{F}$ tel que

$$\tau\in C \quad \text{implique} \quad |P(X_\tau\in A)-P(X\in A)|<\varepsilon.$$

Un ensemble A sera dit *ensemble de continuité* pour la fonction de distribution de X si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entourage V tel que

$$P\{X\in V(A)\}-P\{X\in A\}<\varepsilon \quad \text{et} \quad P\{X\in V(A')\}-P\{X\in A'\}<\varepsilon.$$

Cette définition des ensembles de continuité sera justifiée plus loin (dans 4).

(ii) *Convergence en probabilité.* — On dira que X_τ converge en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, si pour tout V et pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C\in\mathcal{F}$ tel que

$$\tau\in C \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_\tau)\in V\}>1-\varepsilon.$$

On dira que X est la *limite en probabilité* de X_τ, selon le filtre $\mathcal{F}$.

(iii) *Convergence forte en probabilité.* — On dira que X_τ converge fortement en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, si pour tout V et pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C\in\mathcal{F}$ tel que

$$P\{X, X_\tau)\in V \text{ pour tout } \tau\in C\}>1-\varepsilon.$$

Ceci peut encore s'écrire

$$(\wedge V)(\wedge\varepsilon)(\vee C)\Big[\operatorname*{PE}_{\xi}\{(X_\xi, X_{\xi,\tau})\in V \text{ pour tout } \tau\in C\}>1-\varepsilon\Big].$$

Il est clair que (iii) implique (ii).

(iv) *Convergence presque certaine ou avec la probabilité* 1. — On dira que X_τ converge avec la probabilité 1 vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, si la probabilité de la convergence (au sens de l'Analyse) de X_τ vers X est égale à 1. Ceci peut s'exprimer comme suit

$$\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\wedge V)(\vee C_{\xi,V})[(X_\xi, X_{\xi,\tau})\in V \text{ pour tout } \tau\in C_{\xi,V}]\}=1.$$

3. Égalité en probabilité (ou en mesure). — Si X et Y sont tous les deux limites en probabilité de X_τ, selon le filtre $\mathcal{F}$, alors étant donnés V et $\varepsilon>0$, il existe C′ et $C''\in\mathcal{F}$ tels que

$$\begin{aligned}&\tau\in C' \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_\tau)\in V\}>1-\varepsilon,\\ &\tau\in C'' \quad \text{implique} \quad P\{(Y, X_\tau)\in V\}>1-\varepsilon.\end{aligned}$$

Pour $C'''\subset C'\cap C''$, on aura

$$\tau\in C''' \quad \text{implique} \quad P\{(X, Y)\in V^2\}>1-2\varepsilon.$$

ε étant arbitraire, X et Y étant indépendants de τ et les V^2 formant une base pour le filtre des entourages, on en déduit

$$(\wedge V)\quad P\{(X, Y)\in V\}=1. \tag{3.1}$$

Deux variables X et Y liées par la relation (3.1) seront dites *égales en probabilité ou en mesure*.

Si l'espace uniforme E peut être défini au moyen d'une base dénombrable d'entourages (il est alors métrisable); on peut déduire de (3.1)

$$P\{(\wedge V)[(X, Y)\in V]\}=1. \tag{3.2}$$

Comme on a affaire à des espaces uniformes *séparés*, on déduit de (3.2) que X et Y sont égaux avec une probabilité égale à 1 ou égaux presque partout. C'est un résultat connu pour les variables aléatoires numériques et pour les variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace métrique.

Dans le cas général, l'égalité presque partout est une propriété plus stricte que l'égalité en mesure.

4. La convergence en probabilité implique la convergence au sens de Bernoulli [(ii) implique (i)]. On a

$$\{(X_\tau\in A)\cap[(X, X_\tau)\in V]\}\subset[X\in V(A)]$$

et, par suite,

$$P\{X\in V(A)\}\geqq P\{(X_\tau\in A)\cap[(X, X_\tau)\in V]\}.$$

On en déduit

$$P\{X\in V(A)\}\geqq P\{X_\tau\in A\}+P\{(X, X_\tau)\in V\}-1.$$

Or, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_\tau) \in V\} > 1 - \varepsilon$$

et, par suite,

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{X \in V(A)\} \geq P\{X_\tau \in A\} - \varepsilon.$$

De même,

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{X \in V(A')\} \geq P\{X_\tau \in A'\} - \varepsilon.$$

Des deux dernières implications on déduit

$$(4.1) \quad \tau \in C \quad \text{implique} \quad 1 - P\{X \in V(A')\} - \varepsilon \leq P\{X_\tau \in A\} \leq P\{X \in V(A)\} + \varepsilon.$$

Si maintenant A est un ensemble de continuité pour la fonction de distribution de X et si V est choisi de telle sorte que

$$P\{X \in V(A)\} < P\{X \in A\} + \varepsilon,$$
$$P\{X \in V(A')\} < P\{X \in A'\} + \varepsilon = 1 - P\{X \in A\} + \varepsilon,$$

on tire de (4.1)

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{X \in A\} - 2\varepsilon \leq P\{X_\tau \in A\} \leq P\{X \in A\} + 2\varepsilon.$$

Ceci est bien la convergence au sens de Bernoulli.

Remarques. — 1. $\bar{M}$ désignant la fermeture de M, on tire de

$$\bar{A} = \bigcap_V V(A) \quad ([1], \text{chap. II, p. 94}),$$
$$P\{X \in \bar{A}\} \leq \underset{V}{\text{Borne inf.}}\, P\{X \in V(A)\}.$$

Si A est un ensemble de continuité au sens défini ci-dessus, cette inégalité implique

$$(4.2) \qquad P\{X \in \bar{A}\} = P\{X \in A\}, \qquad P\{X \in \bar{A}'\} = P\{X \in A'\}$$

qui équivaut à

$$(4.3) \qquad P\{X \in i\} = P\{X \in A\} = 1 - P\{X \in j\},$$

où i désigne l'intérieur de A et j l'extérieur de A. L'égalité (4.3) est la définition de la continuité, donnée par Fréchet, pour le cas des variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace métrique ([3], p. 277).

Inversement, pour tout espace uniforme E dont la structure peut être définie au moyen d'un système dénombrable d'entourages, (4.3) ou (4.2) implique notre définition de la continuité. En effet, il existe dans ce cas un système $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ d'entourages tels que

$$\bar{A} = \bigcap_n V_n(A)$$

et, par suite, en vertu de l'axiome de continuité de Kolmogoroff [4] ou axiome d'additivité complète,

$$P\{X \in \bar{A}\} = \lim_{n \to \infty} P\{X \in V_n(A)\}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc V_n tel que

$$P\{X \in \bar{A}\} > P\{X \in V_n(A)\} - \varepsilon$$

et l'on déduit de (4.2)

$$P\{X \in V_n(A)\} < P\{X \in A\} + \varepsilon$$

et, de même,

$$P\{X \in V_n(A')\} < P\{X \in A'\} + \varepsilon.$$

2. Si l'on veut que le théorème précédent d'après lequel la convergence en probabilité implique la convergence légale, reste vrai, alors notre définition de la continuité est la plus large possible.

Nous allons montrer, en effet, que si A est tel qu'il existe ε tel que pour tout V,

$$P\{X \in V(A)\} > P\{X \in A\} + \varepsilon;$$

alors il existe un ensemble F, une famille de variables aléatoires X_τ et un filtre $\mathcal{F}$ tels que X_τ converge en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$ et que l'on ait cependant

$$(\wedge\tau) \quad P\{X_\tau \in A\} > P\{X \in A\} + \varepsilon.$$

L'ensemble F aura pour éléments tous les entourages symétriques V. Soit X une variable aléatoire donnée :

Si $X \in A$, on posera $X_V = X$ pour tout V;

Si $X \bar{\in} A$, on considère V et alors,

— si $X \in V(A)$, on prendra $X_V \in A$ et tel que $(X, X_V) \in V$;

— si $X \bar{\in} V(A)$, on prendra $X_V = X$.

Observons que si $V' \subset V$ et $X \in V'(A)$, on aura $(X, X_{V'}) \in V'$ et, par suite, $(X, X_{V'}) \in V$; de sorte que l'on a toujours

$$V' \subset V \quad \text{implique} \quad (X, X_{V'}) \in V$$

Considérons maintenant le filtre $\mathcal{F}$ dont la base est constituée par les ensembles C_V de points V' satisfaisant à $V' \subset V$. Si V est donné, on aura $(X, X_{V'}) \in V$ pour $V' \subset V$ et, par suite,

$$P\left\{\bigcap_{V' \in C_V} [(X, X_{V'}) \in V]\right\} = 1;$$

on aura donc *a fortiori*,

$$V' \in C_V \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_{V'})\} = 1$$

et X_V converge donc en probabilité vers X selon le filtre $\mathcal{F}$.

Par ailleurs, comme on a pour tout V

$$X \in V(A) \quad \text{implique} \quad X_V \in A,$$

on aura

$$P\{X_V \in A\} \geq P\{X \in V(A)\} > P\{X \in A\} + \varepsilon$$

et l'on n'a pas de convergence, au sens de Bernoulli, selon le filtre $\mathcal{F}$.

5. Critère de Cauchy pour la convergence en probabilité. — Si X_τ converge en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, alors étant donnés V et $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_\tau) \in V\} > 1 - \varepsilon, \tag{5.1}$$

d'où l'on déduit

$$\tau, \tau' \in C \quad \text{impliquent} \quad P\{(X_\tau, X_{\tau'}) \in V^2\} > 1 - 2\varepsilon.$$

Comme les V^2 forment une base du filtre des entourages, on en déduit qu'étant donnés V et $\varepsilon > 0$ il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\tau, \tau' \in C \quad \text{impliquent} \quad P\{(X_\tau, X_{\tau'}) \in V\} > 1 - \varepsilon. \tag{5.2}$$

Nous allons montrer maintenant que *si* E *est complet et possède une base dénombrable d'entourages*, alors, *inversement*, (5.2) *implique* (5.1). Ce résultat est connu pour une *suite* X_n de variables aléatoires dans un espace métrique complet ([3], p. 267).

Choisissons une base $V_1, V_2, \ldots$ pour le filtre des entourages satisfaisant à $V_n^2 \subset V_{n-1}$ et une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ de nombres positifs décroissants satisfaisant à $\Sigma \varepsilon_i < \infty$.

Soient $C_1, C_2, \ldots$ des éléments du filtre $\mathcal{F}$ satisfaisant à $C_n \subset C_{n-1}$ et tels que

$$\tau, \tau' \in C_n \quad \text{impliquent} \quad P\{(X_\tau, X_{\tau'}) \in V_n\} > 1 - \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et soit $\tau_n \in C_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Considérons l'événement

$$Q_n = \bigcap_{s \geq n} \{(X_{\tau_s}, X_{\tau_{s+1}}) \in V_s\}.$$

On aura

$$P(Q_n) > 1 - \eta_n, \quad \text{où} \quad \eta_n = \sum_{s \geq n} \varepsilon_s.$$

Soit $Q_0 = \bigcup_n Q_n$. On aura $P(Q_0) = 1$.

Introduisons maintenant, pour la clarté de l'exposé, l'indice ξ, en observant que tout événement est un ensemble de ξ.

Si $\xi \in Q_0$, il existe n tel que $\xi \in Q_n$ et, si V est donné, on peut choisir n de sorte que $V_{n-1} \subset V$. Il s'ensuit, en vertu de $V_s^2 \subset V_{s-1}$,

$$(X_{\xi,\tau_p}, X_{\xi,\tau_q}) \in V_{n-1} \qquad \text{pour} \quad p, q \geq n.$$

Mais ceci signifie que les *sections* $\mathcal{C}_{\xi,n} = \{X_{\xi,\tau_n}, X_{\xi,\tau_{n+1}}, \ldots\}$ des suites $\{X_{\xi,\tau_1}, X_{\xi,\tau_2}, \ldots\}$ constituent des bases de filtres de Cauchy $\mathcal{C}_\xi$.

L'espace E étant complet, ces filtres de Cauchy ont des points limites X_ξ définis pour $\xi \in Q_0$ et ces points limites sont tels que pour tout V et tout $\xi \in Q_0$, il correspond n (dépendant de V et de ξ) tel que

$$(X_\xi, X_{\xi,\tau_p}) \in V \qquad \text{pour} \quad p > n.$$

On déduit de ceci et de $P(Q_0)=1$ qu'étant donnés V et ε il existe N_1 tel que

$$P\left\{\bigcap_{p\geq N_1}[(X, X_{\tau_p})\in V]\right\}>1-\varepsilon$$

et l'on a donc

$$(5.3)\qquad p\geq N_1 \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_{\tau_p})\in V\}>1-\varepsilon.$$

Choisissons maintenant $V_{N_2}\subset V$ et $N>\max(N_1, N_2)$ tel que $\varepsilon_N<\varepsilon$.
On aura

$$(5.4)\qquad \tau, \tau_p\in C_N \quad \text{impliquent} \quad P\{(X_\tau, X_{\tau_p})\in V_N\}>1-\varepsilon_N>1-\varepsilon.$$

Or, comme on a

$$\{[(X_\tau, X_{\tau_p})\in V_N]\cap[(X, X_{\tau_p})\in V]\}\subset[X, X_\tau)\in V_N V]\subset[(X, X_\tau)\in V^2],$$

on tire de (5.3) et (5.4)

$$\tau\in C_N \quad \text{impliqué} \quad P\{(X, X_\tau)\in V^2\}>1-2\varepsilon.$$

Mais ceci est bien la convergence en probabilité, selon le filtre $\mathcal{F}$.

6. Relations entre la convergence forte et la convergence presque partout. — En introduisant la variable ξ, la convergence forte s'exprime par

$$(iii)\qquad (\wedge V)(\wedge\eta)(\vee C_{V,\eta})\left[\underset{\xi}{PE}\{(X_\xi, X_{\xi,\tau})\in V \text{ pour tout } \tau\in C_{V,\eta}\}>1-\eta\right]$$

et la convergence presque partout par

$$(iv)\qquad \underset{\xi}{PE}\{(\wedge V)(\vee C_{\xi,V})[(X_\xi, X_{\xi,\tau})\in V \text{ pour tout } \tau\in C_{\xi,V}]\}=1.$$

On va montrer que (iii) *implique* (iv) *quand la base du filtre des entourages est dénombrable* et que (iv) *implique* (iii) *quand la base du filtre $\mathcal{F}$ est dénombrable*. Ces deux espèces de convergence sont donc équivalentes quand les bases du filtre $\mathcal{F}$ et du filtre des entourages sont dénombrables.

Supposons que (iii) soit réalisé et posons

$$Q_C^{(V)}=\underset{\xi}{E}\{(X_\xi, X_{\xi,\tau})\in V \text{ pour tout } \tau\in C\},$$

$$Q_0^{(V)}=\bigcup_C Q_C^{(V)}.$$

On aura

$$P(Q_0^{(V)})=1.$$

De plus, pour tout $\xi\in Q_0^{(V)}$, on a

$$(X_\xi, X_{\xi,\tau})\in V \qquad \text{pour tout} \quad \tau\in C_{\xi,V}.$$

Si l'on pose $Q_0=\bigcap_V Q_0^{(V)}$, alors en supposant que le filtre des entourages soit défini par une base dénombrable, on obtient

$$P(Q_0)=1.$$

Pour $\xi \in Q_0$, on aura

$$(\wedge V) \quad [(X_\xi, X_{\xi,\tau}) \in V \text{ pour tout } \tau \in C_{\xi,V}];$$

mais ceci est bien (iv)

Inversement, si (iv) est vérifié, on aura, avec les notations précédentes,

$$P(Q_0) = 1$$

et, par suite,

$$(\wedge V) \quad P(Q_0^{(V)}) = 1$$

et cela sans supposer une base dénombrable pour le filtre des entourages.

Si maintenant on suppose que la base du filtre $\mathcal{F}$ soit dénombrable on déduit de

$$P(Q_0^{(V)}) = 1 \qquad \text{et} \qquad Q_0^{(V)} = \bigcup_C Q_C^{(V)},$$

qu'étant donné $\eta > 0$, il existe un C tel que

$$P(Q_C^{(V)}) > 1 - \eta,$$

et ceci est bien (iii).

7. Condition de Kozakiewicz pour la convergence en probabilité. — On va montrer qu'une condition *nécessaire* pour la convergence en probabilité de X_τ vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$ est que quel que soit l'ensemble de continuité A, pour la fonction de distribution de X, on puisse associer à tout $\varepsilon > 0$ un ensemble $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\tau \in C \qquad \text{implique} \quad P\{X \in A\} < P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} + \varepsilon.$$

On montrera aussi que cette condition est *suffisante quand l'espace uniforme est séparable*.

Nécessité. — $\varepsilon > 0$ étant donné et A étant un ensemble de continuité, il existe un V tel que

$$P\{X \in V(A)\} - P\{X \in A\} < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Or on a

$$\{(X_\tau \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V]\} \subset \{(X_\tau \in A) \cap [X \in V(A)]\}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P\{(X_\tau \in A) \cap [X \in V(A)]\} &\geq P\{(X_\tau \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V]\} \\ &\geq P\{X_\tau \in A\} + P\{(X, X_\tau) \in V\} - 1. \end{aligned} \tag{7.2}$$

De même,

$$\begin{aligned} &P\{(X_\tau \in A) \cap [X \in V(A)]\} \\ &\quad = P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} + P\{(X_\tau \in A) \cap [X \in A' \cap V(A)]\} \\ &\quad \leq P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} + P\{X \in A' \cap V(A)\} \leq P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} + \varepsilon \end{aligned} \tag{7.3}$$

en vertu de (7.1).

On déduit de (7.2) et (7.3)

$$(7.4)\qquad P\{(X_\tau\in A)\cap(X\in A)\}\geqq P\{X_\tau\in A\}+P\{(X,X_\tau)\in V\}-1-\varepsilon.$$

De plus, X_τ convergeant en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, il existe un $C\in\mathcal{F}$ tel que $\tau\in C$ implique

$$(7.5)\qquad P\{(X,X_\tau)\in V\}>1-\varepsilon \qquad \text{et} \qquad |P\{X_\tau\in A\}-P\{X\in A\}|<\varepsilon;$$

la dernière inégalité étant une conséquence du théorème énoncé dans 6.

On déduit de (7.4) et (7.5)

$$\tau\in C \quad \text{implique} \quad P\{(X_\tau\in A)\cap(X\in A)\}\geqq P\{X\in A\}-3\varepsilon$$

et ceci démontre la nécessité de la condition énoncée.

Suffisance. — Supposant E séparable, il existe une suite de points $a_1, a_2, \ldots$ tels que

$$(\wedge V)\quad E=\bigcup_i V(a_i).$$

En remarquant que

$$\{[X\in V(a_i)]\cap[X_\tau\in V(a_i)]\}\subset[(X,X_\tau)\in V^2],$$

on voit que l'on a

$$(7.6)\qquad P\{(X,X_\tau)\in V^2\}\geqq P\left\{\bigcup_{1\leq i\leq r}\left[\left(X\in V(a_i)\right)\cap\left(X_\tau\in V(a_i)\right)\right]\right\}.$$

Si l'on suppose maintenant que V est tel que $V(a_i)$ soit, quel que soit i, un ensemble de continuité pour la fonction de distribution de X et si l'on pose

$$(7.7)\qquad W_1=V(a_1),\qquad W_2=V(a_2)\cap W_1',\qquad W_3=V(a_3)\cap W_1'\cap W_2',\qquad \ldots,$$

les W_i seront disjoints et ils seront aussi ensembles de continuité.

Cela revient, en effet, à montrer que si A et B sont ensembles de continuité, $A\cap B'$ est aussi un tel ensemble. Pour simplifier l'écriture on posera, provisoirement,

$$P(M)=P\{X\in M\}.$$

L'hypothèse étant que

$$P\{V(A)\}-P(A)<\varepsilon,\qquad P\{V(A')\}-P(A')<\varepsilon;$$
$$P\{V(B)\}-P(B)<\varepsilon,\qquad P\{V(B')\}-P(B')<\varepsilon,$$

on va montrer que

$$P\{V(A\cap B')\}-P\{A\cap B'\}<2\varepsilon,$$
$$P\{V(A'\cup B)\}-P\{A'\cup B\}<2\varepsilon.$$

On a bien

$$\begin{aligned}P\{V(A\cap B')\}-P\{A\cap B'\}&=P\{[V(A\cap B')]\cap[A'\cup B]\}\\&\leqq P\{V(A)\cap V(B')\cap(A'\cup B)\}=P\{[V(A)\cap V(B')\cap A']\cup[V(A)\cap V(B')\cap B]\}\\&\leqq P\{V(A)\cap A'\}+P\{V(B')\cap B\}<2\varepsilon;\end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} &P\{V(A'\cup B)\}-P\{A'\cup B\}=P\{[V(A'\cup B)]\cap[A\cap B']\}\\ &\quad=P\{[V(A')\cup V(B)]\cap[A\cap B']\}=P\{[V(A')\cap A\cap B']\cup[V(B)\cap A\cap B']\}\\ &\quad\leq P\{V(A')\cap A\}+P\{V(B)\cap B'\}<2\varepsilon. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant r de telle sorte que

$$P\left\{X\in\bigcup_{1\leq i\leq r}V(a_i)\right\}\geq 1-\varepsilon.$$

On aura, en vertu de (7.6) et (7.7),

$$P\{(X, X_\tau)\in V^2\}\geq\sum_{i=1}^{r}P\{(X\in W_i)\cap(X_\tau\in W_i)\}$$

Les W_i étant des ensembles de continuité, on peut trouver $C\in\mathcal{F}$ tel que

$$\tau\in C \quad \text{implique} \quad P\{(X\in W_i)\cap(X_\tau\in W_i)\}\geq P\{X\in W_i\}-\frac{\varepsilon}{r} \quad \text{pour} \quad i=1, 2, \ldots, r.$$

On a donc pour $\tau\in C$:

$$\begin{aligned} P\{(X, X_\tau)\in V^2\}&\geq\sum_{i=1}^{r}P\{X\in W_i\}-\varepsilon=P\left\{X\in\bigcup_{1\leq i\leq r}W_i\right\}-\varepsilon\\ &=P\left\{X\in\bigcup_{1\leq i\leq r}V(a_i)\right\}-\varepsilon\geq 1-2\varepsilon. \end{aligned}$$

La démonstration sera donc complète si l'on montre qu'à tout V' il correspond $V\subset V'$ tel que, pour tout i, $V(a_i)$ soit ensemble de continuité.

Pour voir cela, on utilisera le fait qu'un espace uniforme peut être défini par une famille saturée *d'écarts* ([1], chap. IX, p. 5). Un entourage V quelconque est défini par une fonction $f(x, y)$ de deux arguments et par un nombre ε. La fonction $f(x, y)$ est telle que

$$f(x, x)=0, \qquad f(x, y)=f(y, x), \qquad 0\leq f(x, y)\leq f(x, z)+f(z, y)$$

et V est défini par l'équivalence

$$(x, y)\in V\equiv f(x, y)<\varepsilon \qquad (\equiv \text{ indique l'équivalence}).$$

Soit donc V' défini par f et ε'. On a

$$X\in V'(a_k)\equiv f(a_k, X)<\varepsilon'.$$

De plus, $P\{f(a_k, X)<\varepsilon\}$ étant une fonction non décroissante de ε, il existe, au plus, une infinité dénombrable de valeurs de ε pour lesquelles elle est discontinue. Il y a donc $\eta<\varepsilon'$ tel que

(7.8) $\qquad P\{f(a_k, X)<\varepsilon\}$ est continu pour $\varepsilon=\eta$ quel que soit k.

Si maintenant on définit V par f et η, c'est-à-dire par

$$(x, y)\in V\equiv f(x, y)<\eta,$$

on aura évidemment $V \subset V'$. On va montrer que $V(a_k)$ est un ensemble de continuité quel que soit k.

Il faut montrer qu'étant donné $\lambda > 0$, il existe W tel que

$$P\{X \in WV(a_k)\} - P\{X \in V(a_k)\} < \lambda, \tag{7.9}$$

$$P\{X \in W([V(a_k)]')\} - P\{X \in [V(a_k)]'\} < \lambda. \tag{7.10}$$

Définissons W par f et μ. On aura

$$\begin{aligned} X \in WV(a_k) &\equiv (\vee y)[y \in V(a_k) \text{ et } X \in W(y)] \\ &\equiv (\vee y)[f(a_k, y) < \eta \text{ et } f(y, X) < \mu] \end{aligned}$$

et ce dernier événement implique

$$f(a_k, X) < \eta + \mu.$$

On a donc

$$P\{X \in WV(a_k)\} - P\{X \in V(a_k)\} \leq P\{f(a_k, X) < \eta + \mu\} - P\{f(a_k, X) < \eta\}.$$

Par ailleurs,

$$X \in W([V(a_k)]') \equiv (\vee y)[f(a_k, y) \geq \eta \text{ et } f(y, X) < \mu],$$

et si $\mu < \eta$, ce dernier événement implique $f(a_k, X) > \eta - \mu$ et l'on a

$$P\{X \in W([V(a_k)]')\} - P\{X \in [V(a_k)]'\} \leq P\{f(a_k, X) > \eta - \mu\} - P\{f(a_k, X) \geq \eta\}.$$

On voit donc, en vertu de (7.8), que si μ est pris suffisamment petit, les conditions (7.9) et (7.10) seront satisfaites.

8. Condition de Kozakiewicz pour la convergence forte. — X_C désignant l'ensemble des valeurs de X_τ pour $\tau \in C$, on va montrer qu'une condition *nécessaire* pour la convergence forte de X_τ vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, est que

$$(\wedge V)(\wedge A)(\wedge \varepsilon)(\vee C)[P\{(X \in A) \cap [X_C \subset V(A)]\} > P\{X \in A\} - \varepsilon]$$

et que, *si l'espace* E *est séparable, cette condition est aussi suffisante.*

Nécessité. — Comme

$$\{(X \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V \text{ pour tout } \tau \in C]\} \subset \{(X \in A) \cap [X_C \subset V(A)]\},$$

on aura

$$\begin{aligned} P\{(X \in A) \cap [X_C \subset V(A)]\} &\geq P\{(X \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V \text{ pour tout } \tau \in C]\} \\ &\geq P\{X \in A\} + P\{(X, X_\tau) \in V \text{ pour tout } \tau \in C\} - 1 \geq P\{X \in A\} - \varepsilon \end{aligned}$$

si C est tel que (iii) soit vérifié.

Ceci montre que la condition est nécessaire.

Suffisance. — L'espace E étant séparable, soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de points partout dense dans E. On aura

$$(\wedge V) \quad E = \bigcup_i V(a_i).$$

Introduisons maintenant les W_i définis par (7.7) et considérons les événements

$$S_k \equiv [X \in V(a_k)] \cap [X_\tau \in V^2(a_k) \text{ pour tout } \tau \in C] \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$
$$\Sigma_k \equiv [X \in W_k] \cap [X_\tau \in V(W_k) \text{ pour tout } \tau \in C] \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Les W_k sont disjoints, les Σ_k sont incompatibles et $\Sigma_k \subset S_k$. De plus,

$$\bigcup_{1 \leq k \leq n} S_k \subset \{(X, X_\tau) \in V^3 \text{ pour tout } \tau \in C\}$$

et l'on peut, à tout $\varepsilon > 0$, faire correspondre n de telle sorte que

$$P\left\{X \in \bigcup_{1 \leq k \leq n} W_k\right\} > 1 - \varepsilon.$$

On aura

$$P\{(X, X_\tau) \in V^3 \text{ pour tout } \tau \in C\} \geq P\left\{\bigcup_{1 \leq k \leq n} S_k\right\} \geq P\left\{\bigcup_{1 \leq k \leq n} \Sigma_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} P(\Sigma_k).$$

Mais il existe, par hypothèse, $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} P(\Sigma_k) > \sum_{k=1}^{n} P\{X \in W_k\} - \varepsilon = P\left\{X \in \bigcup_{1 \leq k \leq n} W_k\right\} - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon.$$

Comme les V^3 constituent un système fondamental d'entourages, on voit que la condition est suffisante.

Remarques. — 1. Quand $\mathcal{F}$ est le *filtre de Fréchet*, c'est-à-dire quand on a affaire à une *suite* de variables aléatoires, la condition donnée s'écrit

$$(\wedge V)(\wedge A) \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} P\{(X \in A) \cap [X_s \in V(A) \text{ pour } n \leq s \leq m]\} = P\{X \in A\}.$$

2. La convergence forte et la convergence presque partout étant équivalentes quand le filtre des entourages et le filtre $\mathcal{F}$ ont des bases dénombrables, on obtient, dans ce cas, une condition nécessaire et, dans certains cas, suffisante pour la convergence presque partout.

9. Un théorème sur la convergence d'une suite de variables aléatoires indépendantes. — Si E est *séparable* et *complet* et si $\{X_n\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes alors l'un des deux cas suivants, qui s'excluent mutuellement, doit avoir lieu :

(A) $$(\vee V)\left[\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\vee N_\xi)[(X_{\xi,n}, X_{\xi,m}) \in V \text{ pour tous les } n, m > N_\xi]\} = 0\right],$$

(B) $$(\vee b)(\wedge V)\left[\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\vee N_\xi)[(b, X_{\xi,n}) \in V \text{ pour tout } n > N_\xi\} = 1\right].$$

Le cas (A) implique la divergence presque partout. On l'appellera *divergence forte*. Le cas (B) est équivalent à la *convergence forte* de X_n vers l'élément constant b. On peut donc énoncer le théorème comme suit :

X_n *diverge fortement ou bien il converge fortement vers une constante.*

Quand la base du filtre des entourages est dénombrable, (B) est équivalent à la convergence presque partout vers une constante. On obtient, dans ce cas, une généralisation directe d'un théorème connu dans la théorie des variables aléatoires numériques ([2], p. 268). Cette généralisation n'avait pas encore été donnée pour les variables aléatoires situées dans un espace métrique.

Démonstration. — La constante a et l'entourage V étant donnés, les événements $(a, X_n) \in V$ sont indépendants et, par suite,

$$P\{(\vee N)[(a, X_n) \in V \text{ pour tout } n > N]\} = 0 \text{ ou } 1,$$

d'après le théorème de Borel-Cantelli.

S'il existe V tel que cette probabilité soit nulle quel que soit a, on est dans le cas (A).

En effet, si (A) n'était pas satisfait, on aurait

$$(\wedge V)\left[\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\vee N_\xi)[(X_{\xi,n}, X_{\xi,m}) \in V \text{ pour tous les } n, m > N_\xi]\} = \omega_V > 0\right]$$

et, par suite,

$$(9.1) \qquad (\wedge V)(\vee N)\left[\operatorname*{PE}_{\xi}\{(X_{\xi,n}, X_{\xi,m}) \in V \text{ pour tous les } n, m > N\} = \omega'_V > 0\right],$$

où $N(=N_V)$ est indépendant de ξ.

Nous allons montrer qu'il existe alors a_V tel que

$$(9.2) \qquad (\wedge V)\left[\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\vee N_\xi)[(a_V, X_{\xi,p}) \in V \text{ pour tout } p > N_\xi]\} > 0\right],$$

ce qui contredit l'hypothèse faite ci-dessus.

Soit donc $\{a_i\}$ une suite de points partout dense dans E, on aura

$$(\wedge V) \quad E = \bigcup V(a_i).$$

Si l'on fixe $n > N$ dans la formule (9.1), on peut trouver a_{i_ξ} tel que

$$(a_{i_\xi}, X_{\xi,n}) \in V$$

et l'on aura $P(Q_0) = \omega' \geqq \omega'_V > 0$, où

$$(9.3) \qquad Q_0 = \operatorname*{E}_{\xi}\{(a_{i_\xi}, X_{\xi,m}) \in V^2 \text{ pour tout } m > N\}.$$

De plus, si l'on considère

$$Q_i = \operatorname*{E}_{\xi}\{(a_i, X_{\xi,m}) \in V^2 \text{ pour tout } m > N\},$$

alors, comme tout a_{i_ξ} est un a_i, on voit que tout $\xi \in Q_0$ appartient à un Q_i et, par suite, l'un des Q_i, au moins, a une mesure positive et (9.2) est, par suite, vérifiée. On est bien dans le cas (A).

On sera dans le cas (B) si l'hypothèse faite ci-dessus n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si

$$(9.4)\qquad (\wedge V)(\vee a_V)\Big[\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\vee N_\xi)[(a_V, X_{\xi,n})\in V \text{ pour tout } n > N_\xi]\} = 1\Big].$$

Or, si $a_{V'}$ et $a_{V''}$ correspondent, par (9.4), à $V' \subset V$ et $V'' \subset V$ respectivement, il y aura $X_{\xi,n}$ tel que $(a_{V'}, X_{\xi,n})\in V'$ et $(a_{V''}, X_{\xi,n})\in V''$ et, par suite,

$$(a_{V'}, a_{V''})\in V^2.$$

Utilisons maintenant l'hypothèse que E soit complet et considérons le filtre $\mathfrak{F}$ dont la base est composée des ensembles C_V formés des éléments $a_{V'}$ où $V' \subset V$. Ces ensembles forment bien la base d'un filtre, car $C_{V_1 \cap V_2} \subset C_{V_1} \cap C_{V_2}$.

Comme $(a_{V'}, a_{V''})\in V^2$ pour $V' \subset V$ et $V'' \subset V$, on a $C_V \times C_V \subset V^2$, ce qui veut dire que $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy. Il a, par conséquent, un point limite b. Ce point est tel que pour tout V il existe $C_{V'} \subset V(b)$ et l'on a, par suite, $(b, a_{V'})\in V$. On peut toujours prendre $V' \subset V$ et comme

$$\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\vee N_\xi)[(a_{V'}, X_{\xi,n})\in V' \text{ pour tout } n > N_\xi]\} = 1,$$

on en tire

$$\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\vee N_\xi)[(b, X_{\xi,n})\in V^2 \text{ pour tout } n > N_\xi]\} = 1,$$

et enfin, les V^2 formant une base,

$$(\vee b)(\wedge V)\Big[\operatorname*{PE}_{\xi}\{(\vee N_\xi)[(b, X_{\xi,n})\in V \text{ pour tout } n > N_\xi]\} = 1\Big].$$

Ceci est bien (B) et la démonstration est ainsi achevée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki, *Les structures fondamentales de l'analyse*, t. 3; *Topologie générale*, Paris, Hermann, 1940.

[2] M. Fréchet, *Généralités sur les Probabilités. Éléments aléatoires*, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1950.

[3] M. Fréchet, *Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. X, vol. IV, p. 215-320).

[4] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, Springer, 1933.

[5] Kozakiewicz, *Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence stochastique* (*Fund. Math.*, t. XXXI, 1938, p. 160-178).

SUR LES GROUPES NILPOTENTS ET LES ANNEAUX DE LIE

PAR M. MICHEL LAZARD.

INTRODUCTION.

L'objet principal de ce travail est d'étudier certains aspects des relations entre les structures de groupes et d'anneaux de Lie. Malgré la généralité apparente de certains énoncés, les résultats obtenus ne concernent que des catégories particulières de groupes et d'anneaux de Lie : il s'agira toujours, en fait, de groupes nilpotents ou de N-groupes (groupes nilpotents généralisés).

Une N-suite dans un groupe G est, par définition, une suite décroissante de sous-groupes $H_1, H_2, \ldots$ telle que $H_1 = G$ et que le commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$ de deux éléments choisis respectivement dans H_i et H_j appartienne toujours à H_{i+j}. Le groupe G est dit un N-groupe s'il possède une N-suite (H_i) telle que l'intersection des H_i se réduise à l'élément neutre.

Le chapitre I étudie un procédé qui associe un anneau de Lie gradué à toute N-suite d'un groupe donné. Il s'agit d'une extension naturelle d'une notion devenue courante en topologie algébrique et en algèbre : celle d'anneau gradué associé à un anneau filtré.

Au paragraphe 1 je présente des identités qui font immédiatement ressortir l'analogie entre d'une part, produit et commutateur dans un groupe, et d'autre part, somme et crochet dans un anneau de Lie. L'identité (1.1) est classique; la remarquable identité « jacobienne » (1.2) est due à M. P. Hall et m'a été communiquée par M. Kaloujnine. J'indique une première application de l'analogie entre groupes et anneaux de Lie en interprétant plus simplement certains calculs de Levi et van der Waerden [20].

Le paragraphe 2 donne la définition de l'anneau de Lie gradué associé à une N-suite; bien que cette notion soit extrêmement simple, elle ne paraît

avoir été reconnue (ou publiée) que dans deux cas particuliers, correspondant à deux N-suites particulières : la suite centrale descendante et la N-suite des groupes de dimension mod$p$ (premier) [23], [36]. Quelques propriétés qui résultent immédiatement de la définition générale sont rassemblées à la fin du paragraphe 2.

Le paragraphe 3 établit la possibilité d'obtenir une N-suite dans un groupe G au moyen d'un homomorphisme convenable de G dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles d'un anneau filtré : les calculs correspondants peuvent être considérés comme connus (ils apparaissent en substance dans l'étude des groupes de ramification supérieurs d'une extension galoisienne d'un corps valué complet). J'ai signalé au passage (3.4) une importante généralisation de ces résultats obtenue par M. Kaloujnine. Le théorème (3.3), transposition aux N-suites du théorème de Jordan-Hölder, indique comment comparer les anneaux de Lie associés à deux N-suites d'un même groupe.

Le paragraphe 4 expose la méthode de M. Magnus [21] pour étudier un groupe libre : on le plonge dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles d'une algèbre associative libre complétée (algèbre de Magnus). Je reprends ensuite la méthode de M. Witt [33] pour la détermination de la suite centrale descendante d'un groupe libre. Peut-être les considérations générales qui la précèdent ont-elles permis d'en faire ressortir plus nettement le principe.

La clé des développements ultérieurs du premier chapitre est constituée par le théorème (5.4) qui permet la détermination effective des N-suites d'un groupe libre associées à certaines filtrations d'une algèbre de Magnus. Son origine remonte à la détermination par M. Zassenhaus [36] des groupes de dimension mod$p$ (1). Mais, tandis que M. Zassenhaus s'appuyait sur les propriétés des algèbres de Lie restreintes (au sens de M. Jacobson [11]) (2), j'ai montré, au contraire (§ 6), que les propriétés des algèbres de Lie restreintes pouvaient se déduire des propriétés du groupe libre, ce qui rétablit l' « antériorité » du groupe par rapport à l'algèbre de Lie. De plus, le résultat indiqué permet de déterminer les groupes de dimension modp^h (h entier positif quelconque) d'un groupe libre, ainsi que d'autres N-suites, d'un caractère très différent, qui montrent combien sont variés les divers anneaux de Lie associés aux N-suites d'un même groupe libre. Il faut noter que les sous-groupes ainsi définis dans les groupes libres se trouvent caractérisés comme des sous-ensembles dont il n'est nullement évident, *a priori*, que ce sont des sous-groupes : cela permet d'obtenir diverses identités.

---

(1) J'ai conservé l'expression « groupes de dimension » consacrée par l'usage. Elle n'est pas très heureuse, puisqu'il s'agit en réalité, de certaines suites de sous-groupes caractéristiques définis d'abord dans les groupes libres (*cf.* § 4), puis, par passage aux quotients, dans des groupes quelconques.

(2) Il serait plus correct de dire « p-restreintes », puisqu'on introduit cette notion après s'être donné un nombre premier déterminé p.

Au paragraphe 6, j'introduis la notion de N-suite restreinte, plus simple par sa formulation que la notion d'algèbre de Lie restreinte, et j'étudie la correspondance entre ces deux notions : sur l'anneau de Lie associé à une N-suite restreinte, on peut définir canoniquement une structure d'algèbre de Lie restreinte à coefficients entiers mod$p$. D'autre part, toute N-suite restreinte, peut s'obtenir à partir d'une filtration convenable de l'anneau du groupe à coefficients entiers mod$p$. Ce résultat (6.7), dont la démonstration est assez pénible, permet de démontrer certaines propriétés de structure des algèbres de Magnus (6.11), (6.12).

Le paragraphe 7, consacré à l'étude des groupes de dimension mod$n$ (entier quelconque) fait apparaître l'analogie entre l'étude « locale » d'un groupe libre (§ 5) et l'étude « locale » de l'anneau des entiers rationnels (c'est-à-dire la théorie des entiers p-adiques).

Le paragraphe 8 apporte quelques commentaires et signale quelques-uns des très nombreux problèmes ouverts. J'ai voulu surtout indiquer combien ces questions sont mal connues, et comment les « évidences » sont parfois trompeuses. Il se peut, bien entendu, que mon information ait été insuffisante.

Le chapitre II (dont la lecture ne suppose connus que les paragraphes 1 à 4 du chapitre I) étudie une correspondance beaucoup plus fine entre groupes et anneaux de Lie, correspondance fondée sur l'application de la formule de Hausdorff [9]. Les paragraphes 1 et 3 ont été développés un peu plus qu'il n'était strictement nécessaire en raison de leur intérêt propre. Au paragraphe 1, je considère une algèbre de Lie libre complétée L à coefficients rationnels, qui devient un groupe si l'on y définit une multiplication au moyen de la formule de Hausdorff. Les générateurs de L engendrent (au sens de la multiplication) un groupe libre. J'étudie dans L certaines suites d'éléments qui peuvent être représentées en quelque sorte par des séries de Taylor par rapport à une variable entière. Si l'on exige seulement que la série converge, on est conduit à la notion de suite analytique (1.14a); mais il est préférable d'imposer une condition plus forte, qui donne la définition des suites typiques (1.1) : au lieu d'imposer seulement que l'ordre du $i^{\text{ième}}$ coefficient a_i de la série considérée tende vers l'infini avec i, on exige qu'il soit toujours au moins égal à i. Les suites typiques constituent un sous-groupe et une sous-algèbre de Lie dans l'ensemble de toutes les suites à valeurs dans L (1.4). Un théorème général (1.5) montre la possibilité de représenter une suite typique comme un produit infini; la représentation dépend du choix d'une suite de polynomes à coefficients rationnels.

Un premier choix conduit au théorème (1.10) qui ne concerne plus qu'un groupe libre; la structure d'algèbre de Lie n'a joué qu'un rôle auxiliaire dans la démonstration. Ce théorème constitue une généralisation et en même temps une réciproque d'un théorème de M. P. Hall ([8], § 3); c'est de là que je suis parti pour aboutir à la notion de suite typique, car une suite typique dans un

groupe libre est précisément une suite d'éléments qui vérifie le théorème de M. P. Hall. La méthode des suites typiques est moins directe que le procédé original de M. P. Hall (le « collecting process »), mais elle me paraît plus aisée et plus puissante.

Un second choix de la suite de polynomes (1.5) conduit, au paragraphe 2, à la description complète de la structure d'algèbre de Lie topologique de L à partir de sa structure de groupe topologique (2.4). C'est ce que j'appelle réaliser l'inversion générique de la formule de Hausdorff. Des formules d'inversion « explicites » (c'est-à-dire théoriquement calculables) montrent que la somme et le crochet de deux éléments de L sont égaux à des produits infinis de « mots » en ces deux éléments, affectés d'exposants rationnels dont on connaît certaines propriétés arithmétiques.

Le paragraphe 3 établit quelques résultats auxiliaires; la notion d'algèbre de Lie n'y intervient pas, et la structure fondamentale étudiée est celle d'un groupe dans lequel on s'est donné une suite centrale possédant certaines propriétés. Le théorème (3.2) établit l'existence de certaines suites centrales. Le théorème (3.6) donne une condition pour qu'un homomorphisme d'un sous-groupe puisse s'étendre univoquement à un homomorphisme du groupe tout entier. Le théorème (3.10), dont la démonstration est la plus longue, établit l'existence de certaines extensions de groupes.

Le paragraphe 4 aborde la question des groupes discrets (ou de leurs limites projectives) qu'on peut définir à partir d'anneaux de Lie par la formule de Hausdorff. Le théorème (4.2) indique une catégorie d'anneaux de Lie où l'on peut appliquer la formule de Hausdorff, et le théorème (4.3) montre que, dans la catégorie de groupes ainsi obtenue, l'inversion de la formule de Hausdorff (au sens du paragraphe 2) est possible, et qu'on retrouve bien l'anneau de Lie initial. Ces théorèmes conduisent à des résultats satisfaisants dans le cas des groupes de torsion (4.6) et des groupes sans torsion (4.15). Par contre, dans le cas général, il est impossible de faire correspondre l'anneau de Lie au groupe (ou le groupe à l'anneau de Lie) sans faire un choix particulier de la suite de sous-groupes (ou d'idéaux) qui intervient dans les énoncés (4.2), (4.3). Les résultats concernant les groupes de torsion avaient été partiellement énoncés par M. Magnus [23]; ceux concernant les groupes sans torsion ont été démontrés par M. Malcev [26], [27]. Mais la méthode de M. Malcev fait appel à la théorie des groupes de Lie [25], alors que la méthode proposée ici est purement algébrique. J'ai développé à nouveau la théorie de M. Malcev concernant certaines extensions canoniques des groupes nilpotents sans torsion (4.8) que j'ai appelées complétions de Malcev. Outre son avantage méthodologique, le procédé que j'ai suivi permet certaines généralisations (4.17) auxquelles la méthode analytique ne semble pas conduire. On voit, en particulier, que la complétion de Malcev ne fait pas appel aux structures d'algèbres de Lie.

Le paragraphe 5 expose la construction d'un groupe particulier. Je l'ai pré-

senté pour légitimer la généralité du théorème (4.6), et aussi pour montrer que la possibilité de remplacer certaines structures de p-groupes par des structures d'algèbres de Lie peut effectivement simplifier des constructions.

Il aurait été possible d'obtenir certains résultats par des procédés plus rapides [*cf.*, par exemple, (4.18)]. J'ai choisi un mode d'exposition général qui ne va pas sans une certaine lourdeur.

Il me semble qu'on pourrait tirer de ce travail une confirmation des points de vue suivants : d'abord l'intérêt que présente l'étude de groupes définis à partir d'autres structures possédant plusieurs opérations (par exemple des algèbres de Lie). En effet, la simplicité apparente des axiomes des groupes ne fait souvent que masquer une extrême complexité, et d'autres structures, plus riches par le nombre de leurs axiomes, se laissent plus facilement étudier. D'autre part, si l'étude des relations entre groupes et algèbres de Lie est encore très incomplète, on peut estimer néanmoins que les algèbres de Lie se révèleront insuffisantes, même pour l'étude des p-groupes finis. Il conviendrait donc de rechercher si d'autres structures algébriques pourraient permettre la construction de nouvelles catégories de groupes. Mais il est possible qu'on n'aboutisse pas à des formules génériques (comme l'est la formule de Hausdorff) en raison de l'existence d'invariants de structure des groupes, dont la théorie de l'homologie pourrait peut-être rendre compte. Il ne s'agit là que de conjectures imprécises, et de nombreuses recherches seront nécessaires pour élucider ces questions encore très obscures.

Je tiens à remercier M. L. Kaloujnine pour toute l'aide qu'il m'a apportée, tant au cours de nombreuses conversations personnelles qu'à l'occasion du Séminaire de théorie des groupes qu'il a dirigé à Paris en 1950. Qu'il trouve ici l'expression de mon amicale reconnaissance.

J'exprime ma profonde reconnaissance à M. A. Châtelet dont les conseils et les encouragements m'ont été très précieux. Je remercie MM. J. Favard, L. Schwartz, P. Samuel qui ont bien voulu se joindre à M. Châtelet pour constituer le jury auquel je soumets cette Thèse, ainsi que M. A. Denjoy qui a bien voulu présenter mes Notes à l'Académie des Sciences, et M. P. Montel qui a bien voulu accepter ce travail dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*.

CHAPITRE I.

Une extension aux groupes de la méthode des filtrations.

1. Le calcul des commutateurs. — Nous conviendrons de représenter par (x, y) le commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$ de deux éléments x et y d'un groupe G noté multiplicativement. Si H et K sont deux sous-groupes de G, (H, K) désignera le

sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs (x, y) où $x \in H$ et $y \in K$ (3).

Nous aurons très souvent à considérer des suites de sous-groupes (H_i) dans un groupe $G (i = 1, 2, \ldots)$. Il s'agira de *suites décroissantes, commençant au groupe* G, c'est-à-dire qu'on aura :

$$G = H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_i \supset H_{i+1} \supset \ldots.$$

La notion usuelle de suite de composition d'un groupe s'obtient en exigeant que chaque sous-groupe H_{i+1} soit invariant dans le précédent [ce qui peut s'écrire $(H_i, H_{i+1}) \subset H_{i+1}$], et que les sous-groupes H_i se réduisent à l'élément neutre à partir d'une certaine valeur de l'indice i.

Nous dirons généralement qu'une suite de sous-groupes (H_i) est *finie* si $H_i = (e)$, élément neutre du groupe, à partir d'une certaine valeur de l'indice i; nous dirons qu'elle est *séparante* si l'intersection des sous-groupes H_i se réduit à l'élément neutre :

$$\bigcap_i H_i = (e).$$

Nous appellerons *suite centrale* dans un groupe G une suite de sous-groupes (H_i) telle que $(G, H_i) \subset H_{i+1}$ pour tout i, c'est-à-dire telle que H_i/H_{i+1} s'identifie à un sous-groupe du centre de G/H_{i+1} (pour tout $i \geq 1$). Les sous-groupes H_i sont alors tous invariants dans G [puisque $(G, H_i) \subset H_{i+1} \subset H_i$]. Un groupe qui possède une suite de composition centrale est dit *nilpotent*.

Dans un groupe G quelconque, on définit par induction les sous-groupes de la suite centrale descendante au moyen des relations :

$$G_1 = G, \qquad G_{i+1} = (G, G_i).$$

Un groupe nilpotent est caractérisé par le fait qu'à partir d'un certain rang tous les sous-groupes de la suite centrale descendante sont réduits à l'élément neutre e. En effet, pour toute suite centrale (H_i) dans G, on a les relations $G_i \subset H_i$ qui s'établissent par induction : $G_1 \subset H_1 = G$ et $G_i \subset H_i$ implique

$$(G, G_i) = G_{i+1} \subset (G, H_i) \subset H_{i+1}.$$

Ainsi la suite centrale descendante « décroît plus vite » que toute autre suite centrale. La *classe* d'un groupe nilpotent G, égale par définition au nombre minimum de quotients distincts d'une suite de composition centrale, peut donc être définie comme l'entier c vérifiant

$$G_c \neq (e), \qquad G_{c+1} = (e).$$

Dans un groupe non nilpotent, la suite centrale peut se terminer à un sous-groupe non réduit à l'élément neutre, ou (si G est infini) avoir tous ses termes

(3) Pour les notions générales rappelées dans ce paragraphe, on pourra consulter Zassenhaus [34].

distincts. Nous appellerons N-*groupes* les groupes G tels que l'intersection des sous-groupes G_i de leur suite centrale descendante, se réduise à l'élément neutre $\left(\bigcap G_i = (e)\right)$; l'exemple le plus important de N-groupes non nilpotents est celui des groupes libres ([4]).

Le système de deux opérations constitué par le produit xy et la commutation (x, y) dans un groupe possède des propriétés formelles qui l'apparente au système constitué par l'addition $x+y$ et le crochet de Lie $[x, y]$ dans une algèbre de Lie ([5]). A la distributivité du crochet de Lie correspondent les relations suivantes, où l'on convient de noter x^y le transformé yxy^{-1} de x par l'automorphisme intérieur associé à y :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} (x, yz) = (x, y)\,(x, z)^y = (x, y)\,(x, z)\big((z, x), y\big), \\ (xy, z) = (y, z)^x (x, z) = \big(x, (y, z)\big)\,(y, z)\,(x, z). \end{cases}$$

A l'identité de Jacobi correspond la relation suivante, due à P. Hall :

$$(1.2)\qquad \big((x, y), z^y\big)\big((y, z), x^z\big)\big((z, x), y^x\big) = e.$$

Cette analogie des groupes et des algèbres de Lie peut conduire à des conséquences intéressantes dans le cas des N-groupes et en particulier des groupes nilpotents. Montrons, par exemple, comment elle conduit à retrouver les résultats de Levi et van der Waerden [20] concernant les groupes d'exposant 3 (groupes où $x^3 = e$ pour tout élément x). Ces groupes possèdent la propriété plus générale que chaque élément permute avec chacun de ses conjugués. En effet, dans un tel groupe,

$$xyxy^{-1} = (xy)^{-2}xy^{-1} = y^{-1}x^{-1}y^{-2} = y^{-1}x^{-1}y = y^{-1}(x^{-1}y)^{-2} = y^{-2}xy^{-1}x = yxy^{-1}x,$$

donc x et yxy^{-1} commutent.

Étudions généralement les groupes G où chaque élément permute avec tous ses conjugués, propriété que nous pouvons exprimer par l'identité :

$$\big((x, y), y\big) = e,$$

([4]) *Cf.* § 4.

([5]) Étant donné un anneau commutatif Ω possédant une unité, nous appelons Ω-*algèbre de Lie* un Ω-module unitaire L muni d'une opération bilinéaire $[x, y]$ appelée *crochet* (de Lie) vérifiant les axiomes suivants :

$$[x, x] = 0 \qquad \text{et} \qquad [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

pour tous $x, y, z \in L$. Le résultat de l'opération « crochet » appliquée à deux éléments x et y de L s'appellera encore le crochet de x et de y. Étant donné une famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de L, nous appellerons *alternants* par rapport aux (x_ι) les éléments de L définis ainsi : Chaque x_ι est un alternant, et le crochet de deux alternants par rapport aux (x_ι) est encore un alternant par rapport aux (x_ι). Lorsque l'anneau d'opérateurs Ω se réduit à l'anneau Z des entiers rationnels, nous parlerons simplement d'*anneaux de Lie* (au lieu de Z-algèbres de Lie).

pour tous $x, y \in G$. L'identité correspondante dans une algèbre de Lie serait :

$$[[x, y], y] = 0.$$

Nous en déduisons dans ce cas :

$$[[x, y], z] + [[x, z], y] = [[x, y+z], y+z] - [[x, y], y] - [[x, z], z] = 0.$$

La fonction $[[x, y], z]$ de x, y, z est une fonction alternée, puisqu'elle est transformée en son opposée lorsqu'on transpose x et y ou y et z. L'identité de Jacobi donne alors :

$$3[[x, y], z] = 0.$$

De plus,

$$[[x, y], z] = [[y, z], x] = -[x, [y, z]].$$

On voit de même que la fonction $[[[x, y], z], t]$ de x, y, z, t est alternée, puisqu'une transposition de deux variables consécutives la transforme en son opposée. En particulier :

$$[[[x, y], z], t] = [[[z, t], x], y].$$

Mais

$$\begin{aligned}[[[x, y], z], t] &= -[[x, y], [z, t]] = [[z, t], [x, y]] \\ &= -[[[z, t], x], y] = -[[[x, y], z], t].\end{aligned}$$

Ainsi $2[[[x, y], z], t] = 0$ et comme $3[[[x, y], z], t] = 0$, il en résulte que

$$[[[x, y], z], t] = 0.$$

Le même raisonnement s'étend au cas des groupes où $\big((x, y), y\big) = e$. Tout d'abord

$$e = (x, yy^{-1}) = (x, y)(x, y^{-1})^y = (x, y)(x, y^{-1}) \quad \text{et} \quad \big((x, y)^z, y\big) = (y^{z,x}y^{-z}, y) = e,$$

puisque y permute avec ses conjugués.

Développons maintenant $e = \big((x, yz), yz\big)$ au moyen des formules (1.1). Nous obtenons :

$$\begin{aligned}e &= \big((x, y)(x, z)^y, yz\big) = \big((x, y)(x, z)^y, y\big)\big((x, y)(x, z)^y, z\big)^y \\ &= \big((x, z)^y, y\big)^{(x,y)}\big((x, y), y\big)\big((x, z)^y, z\big)^{y(x,y)}\big((x, y), z\big)^y;\end{aligned}$$

les deuxième et troisième facteurs sont égaux à e, et il reste :

$$\big((x, z)^y, y\big)^{(x,y)}\big((x, y), z\big)^y = e.$$

Transformons par l'automorphisme intérieur associé à

$$(x, y)^{-1}y^{-1} = y^{-1}(x, y)^{-1};$$

il vient :

$$\big((x, z), y\big)\big((x, y), z\big) = e.$$

La démonstration s'achève alors comme dans le cas des algèbres de Lie; il suffit de remarquer que

$$\big((x, y), z^r\big) = \big((x, y), z\big)^r = \big((x, y), z\big),$$

car

$$\Big(\big((x, y), z\big), y\Big) = \Big(\big((x, y), y\big), z\Big) = e.$$

L'identité (1.2) peut donc remplacer l'identité de Jacobi pour démontrer que $\big((x, y), z\big)^3 = e$, et nous parvenons ainsi au

Théorème (1.3). — *Si dans le groupe* G *tout élément commute avec chacun de ses conjugués,* G *est nilpotent de classe au plus égale à* 3 *et, si* $x \in G_3$ (*troisième groupe de la suite centrale descendante de* G), $x^3 = e$.

2. Les anneaux de Lie gradués associés aux N-suites d'un groupe. — La comparaison des groupes aux algèbres de Lie, dont nous venons d'indiquer le principe, comprend deux étapes : on considère d'abord le groupe comme abélien, en associant à sa multiplication l'addition commutative d'une algèbre de Lie; puis on retrouve certaines propriétés résultant de la non-commutativité en leur faisant correspondre des propriétés du crochet de Lie. Nous allons montrer comment, par cette méthode, on peut associer des anneaux de Lie gradués à certaines suites de sous-groupes.

Définition. — Nous appellerons N-*suite* dans un groupe G une suite de sous-groupes (H_i) $(i = 1, 2, \ldots)$, tels que $H_1 = G$, $H_i \supset H_{i+1}$ et $(H_i, H_j) \subset H_{i+j}$ pour tous $i, j \geq 1$.

D'après cette définition, toute N-suite est une suite centrale, un groupe qui possède une N-suite finie est nilpotent, et un groupe qui possède une N-suite séparante est un N-groupe.

Soit G un groupe, (H_i) une N-suite dans G. Les groupes quotients H_i/H_{i+1} sont abéliens, puisque $(H_i, H_i) \subset H_{2i} \subset H_{i+1}$. Nous les noterons additivement, et nous désignerons par $\tilde{x}_i$ l'élément de H_i/H_{i+1} constitué par la classe modulo H_{i+1} de $x_i \in H_i$; nous aurons donc

$$\widetilde{x_i x_i'} = \tilde{x}_i + \tilde{x}_i'.$$

Formons la somme directe $\Sigma_i H_i/H_{i+1}$. Nous obtenons un groupe abélien où nous introduisons une graduation en convenant que les éléments de H_i/H_{i+1} sont homogènes de degré i. Soient $x_i \in H_i$ et $x_j \in H_j$; alors $(x_i, x_j) \in H_{i+j}$, et, d'après les identités (1.1), la classe de (x_i, x_j) modulo H_{i+j+1} ne dépend que des classes de x_i et de x_j mod H_{i+1} (resp. H_{j+1}) : si, par exemple, $x_{j+1} \in H_{j+1}$,

$$(x_i, x_j x_{j+1}) = (x_i, x_j)\,(x_i, x_{j+1})^{x_j} \qquad \text{et} \qquad (x_i, x_{j+1})^{x_j} \in H_{i+j+1}.$$

Nous voyons donc que l'on peut définir une application de $(H_i/H_{i+1}) \times (H_j/H_{j+1})$

dans H_{i+j}/H_{i+j+1} en faisant correspondre au couple $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_j$ l'élément $\widetilde{(x_i, x_j)}$ que nous noterons $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]$. Les identités (1.1) montrent de plus que cette application est bilinéaire, c'est-à-dire qu'on a identiquement :

$$[\tilde{x}_i + \tilde{x}'_i, \tilde{x}_j] = [\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] + [\tilde{x}'_i, \tilde{x}_j] \qquad \text{et} \qquad [\tilde{x}_i, \tilde{x}_j + \tilde{x}'_j] = [\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] + [\tilde{x}_i, \tilde{x}'_j].$$

Les identités $(x, x) = e$ et $(x, y) = (y, x)^{-1}$ conduisent immédiatement à

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_i] = 0 \qquad \text{et à} \qquad [\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = -[\tilde{x}_j, \tilde{x}_i].$$

Nous étendons par linéarité la définition de $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ à un couple d'éléments quelconques $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ de $\Sigma_i H_i/H_{i+1}$: si $\tilde{x} = \Sigma_i \tilde{x}_i$ et $y = \Sigma_j \tilde{y}_j$ sont les décompositions de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ en leurs composantes homogènes, $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ est égal par définition à $\Sigma_{i,j}[\tilde{x}_i, \tilde{y}_j]$. Alors $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ est une opération bilinéaire vérifiant l'identité $[\tilde{x}, \tilde{x}] = 0$. L'identité de Jacobi;

$$[[\tilde{x}, \tilde{y}], \tilde{z}] + [[\tilde{y}, \tilde{z}], \tilde{x}] + [[\tilde{z}, \tilde{x}], \tilde{y}] = 0$$

est vérifiée pour $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, homogènes [conséquence immédiate de l'identité (1.2)], donc pour $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ quelconques (en les décomposant en leurs composantes homogènes). Nous avons donc associé canoniquement à la N-suite (H_i) un anneau de Lie gradué que nous noterons $\mathfrak{L}(H_i)$. D'où le

Théorème (2.1). — *A toute* N*-suite* (H_i) *d'un groupe* G *se trouve associé canoniquement un anneau de Lie gradué* $\mathfrak{L}(H_i)$ *qui a pour support la somme directe* $\Sigma_i H_i/H_{i+1}$. *Le crochet de Lie de deux éléments homogènes s'obtient à partir du commutateur dans* G *par passage aux quotients.*

Les renseignements que permet d'obtenir sur le groupe G l'anneau de Lie $\mathfrak{L}(H_i)$ ne concernent en fait que le groupe quotient $G/\bigcap_i H_i$ de G par l'intersection des H_i, qui est un N-groupe. On pourrait donc se limiter à l'étude des N-suites séparantes, dont l'existence est une propriété caractéristique des N-groupes. On sait, en effet, que la suite centrale descendante est une N-suite. On a même le résultat plus fort : si (G_i) est la suite centrale descendante du groupe G et (H_i) une suite centrale quelconque dans G, alors $(G_i, H_j) \subset H_{i+j}$ pour tous i, $j \geq 1$; cette proposition se déduit aisément, par récurrence sur i, de l'identité (1.2) [8], [14].

Si l'on a un homomorphisme f d'un groupe G dans un groupe G′ et une N-suite (H'_i) dans G′, on en déduit une N-suite (H_i) dans G, dite image réciproque de (H'_i) par f en posant $H_i = f^{-1}(H'_i)$. De même, si (H_i) est une N-suite dans G et f un homomorphisme de G *sur* G′, on obtient une N-suite (H'_i) dans G′, dite image directe de (H_i) par f, en posant $H'_i = f(H_i)$. Ces propriétés résultent immédiatement de : $f\big((x, y)\big) = \big(f(x), f(y)\big)$. On obtient alors des homomorphismes des anneaux de Lie associés. Plus généralement :

THÉORÈME (2.2). — *Soient* G *et* G′ *deux groupes,* (H_i) *et* (H'_i) *deux* N*-suites dans* G *et* G′ *respectivement, f un homomorphisme de* G *dans* G′ *tel que, pour tout i,* $f(H_i) \subset H'_i$. *Alors, on peut définir un homomorphisme* $\tilde{f}$ *de* $\mathfrak{L}(H_i)$ *dans* $\mathfrak{L}(H'_i)$ *conservant les degrés des éléments homogènes et caractérisé par* $\tilde{f}(\tilde{x}_i) = \widetilde{f(x_i)}$. *De plus, f est un isomorphisme de* $\mathfrak{L}(H_i)$ *dans* $\mathfrak{L}(H'_i)$ *si et seulement si* (H_i) *est l'image réciproque de* (H'_i) *par f.*

Démonstration. — On a, par hypothèse,

$$f(H_i) \subset H'_i \qquad \text{et} \qquad f(H_{i+1}) \subset H'_{i+1}.$$

On en déduit donc, par passage aux quotients, l'homomorphisme associé de H_i/H_{i+1} dans H'_i/H'_{i+1} qu'on peut prolonger en un homomorphisme $\tilde{f}$ de $\Sigma_i H_i/H_{i+1}$ dans $\Sigma_i H'_i/H'_{i+1}$, et l'on voit immédiatement que $\tilde{f}$ est aussi un homomorphisme pour les structures d'anneaux de Lie. Si $H_i = \overline{f}^{-1}(H'_i)$ pour tout i, la restriction de $\tilde{f}$ à H_i/H_{i+1} est, pour tout i, biunivoque; $\tilde{f}$ est donc un isomorphisme. Réciproquement, si pour un certain i, $\overline{f}^{-1}(H'_i) \neq H_i$, il existe un $x \in G$ tel que $f(x) \in H'_i$, $x \notin H_i$; soit j l'entier tel que $x \in H_j$, $x \notin H_{j+1}$. On a $j < i$, et la restriction de $\tilde{f}$ à H_j/H_{j+1} n'est pas biunivoque.

Pour exprimer à quelle condition $\tilde{f}$ est un homomorphisme *sur* $\mathfrak{L}(H'_i)$, nous introduisons dans G′ la topologie obtenue en prenant les sous-groupes H'_i comme système fondamental de voisinage, de l'élément neutre. Nous l'appellerons brièvement la (H'_i)-*topologie*, et nous parlerons d'ensembles (H'_i)-fermés, etc., pour indiquer que nous nous référons à cette topologie. Remarquons que f est une représentation continue de G dans G′ munis respectivement de leurs (H_i)- et (H'_i)-topologies. Alors :

THÉORÈME (2.3). — *$\tilde{f}$ est un homomorphisme de* $\mathfrak{L}(H_i)$ SUR $\mathfrak{L}(H'_i)$ *si et seulement si* $f(H_j)$ *est, pour tout entier j,* (H'_i)*-dense dans* H'_j.

En effet, la restriction de $\tilde{f}$ à H_j/H_{j+1} est un homomorphisme sur H'_j/H'_{j+1} si et seulement si $H'_j = f(H_j)H'_{j+1}$. Cette relation devant être vérifiée pour tout j, on en déduit, par récurrence sur l'entier k : $H'_j = f(H_j)H'_{j+k}$, ce qui exprime précisément que $f(H_j)$ est (H'_i)-dense dans H'_j.

Si la N-suite (H_i) dans G est *séparante*, la (H_i)-topologie de G est *séparée* (vérifie l'axiome de Hausdorff), et réciproquement. On peut dans ce cas construire le complété $\overline{G}$ de G pour cette topologie, et l'on voit facilement que les adhérences $\overline{H}_i$ des sous-groupes H_i forment dans $\overline{G}$ une N-suite telle que $G \cap \overline{H}_i = H_i$. Il suffit alors d'appliquer les résultats précédents à l'isomorphisme canonique de G dans $\overline{G}$ pour montrer que $\mathfrak{L}(H_i)$ et $\mathfrak{L}(\overline{H}_i)$, construits respectivement à partir de G et de $\overline{G}$ sont canoniquement isomorphes.

Considérons maintenant un sous-groupe G′ dans le groupe G muni de la

N-suite (H_i). Alors, les sous-groupes $H'_i = H_i \cap G'$ constituent une N-suite dans G', qui n'est autre que l'image réciproque de (H_i) par l'isomorphisme canonique de G' dans G. D'après le théorème (2.2), nous en déduisons un isomorphisme de $\mathfrak{L}(H'_i)$ dans $\mathfrak{L}(H_i)$. Autrement dit, à tout sous-groupe G' de G se trouve associé canoniquement un sous-anneau homogène de $\mathfrak{L}(H_i)$ qu'on peut représenter par $\Sigma_i(G' \cap H_i)H_{i+1}/H_{i+1}$. Si G' est invariant dans G, le sous-anneau associé est un idéal homogène de $\mathfrak{L}(H_i)$; plus précisément :

THÉORÈME (2.4). — *Soit f un homomorphisme de* G SUR *le groupe* G', (H'_i) *l'image directe de* (H_i) *par* f, N *le noyau de* f. *Alors le noyau de l'homomorphisme f de $\mathfrak{L}(H_i)$ sur $\mathfrak{L}(H'_i)$ est l'idéal de $\mathfrak{L}(H_i)$ associé à* N (6).

D'après (2.3), $\tilde{f}$ est un homomorphisme *sur* $\mathfrak{L}(H'_i)$. Le sous-anneau associé à N est certainement contenu dans le noyau de f. Cela résulte de la proposition plus générale : si G, G', G'' sont trois groupes munis respectivement des N-suites (H_i), (H'_i), (H''_i), et f, g des homomorphismes de G dans G' (resp. de G' dans G'') tels que $f(H_i) \subset H'_i$ [resp. $g(H'_i) \subset H''_i$], enfin si h est l'homomorphisme composé gf de G dans G'', alors $\tilde{h} = \tilde{g}.\tilde{f}$. Par ailleurs, si $\tilde{f}(\tilde{x}_i) = 0$,

$$f(x_i) \in H'_{i+1} = f(H_{i+1}).$$

Il existe donc $x_{i+1} \in H_{i+1}$ et $x \in N$ tels que $x_i = x_{i+1}x$, autrement dit $x_i \in (N \cap H_i)H_{i+1}$, c'est-à-dire que $\tilde{x}_i$ est dans le sous-anneau associé à N, ce qui complète la démonstration.

Si (G_i) est la suite centrale descendante du groupe G et (H'_i) une N-suite quelconque dans le groupe G', on a $f(G_i) \subset H'_i$ pour tout homomorphisme f de G dans G'. De plus, si f est un homomorphisme de G *sur* G', $f(G_i)$ est le $i^{\text{ème}}$ sous-groupe G'_i de la suite centrale descendante de G'. Donc, $\mathfrak{L}(G'_i)$ est isomorphe au quotient de $\mathfrak{L}(G_i)$ par l'idéal associé au noyau de f. C'est ainsi que W. Magnus a défini $\mathfrak{L}(G'_i)$ en considérant G' comme le quotient d'un groupe libre G [23].

Il résulte de la définition de la suite centrale descendante (G_i) d'un groupe G que l'anneau de Lie $\mathfrak{L}(G_i)$ est engendré par ses éléments homogènes de degré 1. La réciproque de cette proposition est exacte en ce qui concerne les N-suites finies des groupes nilpotents :

THÉORÈME (2.5). — *Soit* (H_i) *une* N*-suite,* (G_i) *la suite centrale descendante du groupe* G. *Alors* $\mathfrak{L}(H_i)$ *est engendré par ses éléments homogènes de degré* 1 *si et seulement si, pour tout entier* j, G_j *est* (H_i)*-dense dans* H_j.

---

(6) Ce résultat peut encore s'énoncer ainsi : soit (K_i) la N-suite du noyau N de f définie par $K_i = H_i \cap N$. Alors à la suite exacte $N \to G \to G'$ correspond la suite exacte $\mathfrak{L}(K_i) \to \mathfrak{L}(H_i) \to \mathfrak{L}(H'_i)$ des anneaux de Lie gradués associés.

En effet, la condition pour que $\mathfrak{L}(H_i)$ soit engendré par ses éléments homogènes de degré 1 peut s'écrire $H_j = G_j H_{j+1}$ (pour tout j). On en déduit, par récurrence sur k, $H_j = G_j H_{j+k}$ pour tout k positif, ce qui exprime précisément que G_j est (H_i)-dense dans H_j. Si (H_i) est finie, $H_i = (e)$ à partir d'un certain indice i et $G_j = H_j$ pour tout j.

3. Modules filtrés et N-suites. — Rappelons qu'une filtration décroissante sur un module A est définie par une famille de sous-modules à indices entiers A_i vérifiant :

$$\bigcup_i A_i = A \qquad \text{et} \qquad A_i \supset A_{i+1} \quad \text{pour tout } i.$$

Nous nous bornerons aux filtrations positives, pour lesquelles $A_0 = A$. La filtration $\varphi(x)$ d'un élément x de A est le plus grand entier i tel que $x \in A_i$, ou bien le symbole ∞ si $x \in A_i$ pour tout i. Si A est une algèbre associative (resp. de Lie), on exige de plus que $A_i A_j \subset A_{i+j}$ (resp. $[A_i, A_j] \subset A_{i+j}$) pour tout couple i, j.

La donnée dans A d'une fonction $\varphi(x)$ à valeurs entières ≥ 0 et $+\infty$ définit une filtration si et seulement si :

$$\varphi(x-y) \geq \operatorname{Sup}\big(\varphi(x), \varphi(y)\big), \qquad \varphi(\alpha x) \geq \varphi(x),$$

α étant un élément de l'anneau d'opérateurs du module; enfin $\varphi(xy) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$ dans le cas d'une algèbre associative, $\varphi([x, y]) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$ dans le cas d'une algèbre de Lie.

On définit à partir d'un module filtré A le module gradué associé noté $\mathcal{G}(A)$: c'est la somme directe $\Sigma_i A_i / A_{i+1}$. Dans le cas d'une algèbre associative ou de Lie, on obtient par passage aux quotients une structure d'algèbre graduée, associative ou de Lie, sur $\mathcal{G}(A)$ (7).

Les N-suites permettent d'étendre aux groupes les constructions sur les modules filtrés, notamment celle du module gradué associé auquel correspond l'anneau de Lie gradué associé. Nous allons montrer comment définir des N-suites à partir d'applications de groupes dans des modules filtrés. Établissons d'abord le :

Théorème (3.1). — *Soit* G *un groupe et* g *une application de* G *dans une algèbre de Lie* L *munie de la filtration* φ, *telle que :*

1° $\varphi\big(g(x)\big) \geq 1$ *pour tout* $x \in G$;

2° $\varphi\big(g(xy^{-1}) - g(x) + g(y)\big) \geq \operatorname{Inf}\Big(\varphi\big(g(x)\big), \varphi\big(g(y)\big)\Big) + 1$ *pour tous* $x, y \in G$;

3° $\varphi\big(g(xyx^{-1}y^{-1}) - [g(x), g(y)]\big) \geq \varphi\big(g(x)\big) + \varphi\big(g(y)\big) + 1$ *pour tous* $x, y \in G$;

alors si l'on définit les parties H_i *de* G *en posant* $x \in H_i$ *si et seulement si* $\varphi\big(g(x)\big) \geq i$,

(7) Pour la notion de filtration, *cf.* J. Leray ou P. Samuel [19], [29].

(H_i) est une N-suite dans G et $\mathfrak{L}(H_i)$ est canoniquement isomorphe à un sous-anneau de l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{G}(L)$.

Démonstration. — Il résulte de la définition que $H_i \supset H_{i+1}$, et la condition 1° montre que $H_1 = G$. La condition 2° montre que H_i est un sous-groupe de G, et la condition 3° établit que $(H_i, H_j) \subset H_{i+j}$; (H_i) est donc une N-suite dans G.

Désignons par L_i l'ensemble des éléments de L de filtration $\geqq i$. Soit $x_i \in H_i$; alors $g(x_i) \in L_i$ et, d'après 2°, la classe de $g(x_i) \bmod L_{i+1}$ ne dépend que de la classe de $x_i \bmod H_{i+1}$. D'où, par passage aux quotients, une application $\tilde{g}$ de H_i/H_{i+1} dans L_i/L_{i+1}; la condition 2° appliquée encore une fois montre que $\tilde{g}$ est un isomorphisme de H_i/H_{i+1} dans L_i/L_{i+1}, que nous prolongeons en un isomorphisme $\tilde{g}$ de $\Sigma_i H_i/H_{i+1}$ dans $\Sigma_i L_i/L_{i+1}$; la condition 3° montre alors que $\tilde{g}$ est un isomorphisme pour les structures d'anneau de Lie de $\mathfrak{L}(H_i)$ et de $\mathfrak{G}(L)$.

On démontrerait sans peine que toutes les N-suites de G peuvent s'obtenir par le procédé précédent.

Nous allons appliquer (3.1) au cas où L est l'algèbre de Lie « portée » par une algèbre associative filtrée, c'est-à-dire est obtenue en conservant la structure du module filtré de l'algèbre associative et en y définissant le crochet de Lie par :

$$[x, y] = xy - yx.$$

L'algèbre de Lie graduée associée s'identifie alors à l'algèbre portée par l'algèbre associative graduée associée. Nous pouvons énoncer le

Théorème (3.2). — *Soit* A *une algèbre associative de filtration v possédant une unité notée* 1. *Si f est un homomorphisme d'un groupe* G *dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de* A *tel que $v(f(x) - 1) \geqq 1$ pour tout $x \in G$, alors l'application $g(x) = f(x) - 1$ de* G *dans l'algèbre de Lie portée par* A *vérifie les conditions du théorème* (3.1). *On en déduit donc canoniquement une* N-*suite* (H_i) *dans* G *et un isomorphisme de $\mathfrak{L}(H_i)$ dans l'anneau de Lie porté par $\mathfrak{G}(A)$.*

Démonstration. — Soient $x, y \in G$; posons

$$f(x) = 1 + a, \qquad f(y) = 1 + b,$$
$$f(x^{-1}) = 1 + a', \qquad f(y^{-1}) = 1 + b', \qquad f(xy^{-1}) = 1 + c, \qquad f(xyx^{-1}y^{-1}) = 1 + d.$$

La condition 1° de (3.1) est satisfaite par hypothèse. Il nous reste à vérifier que :

$$v(c - a + b) \geqq \operatorname{Inf}\big(v(a), v(b)\big) + 1 \quad \text{(condition 2°)}$$

et

$$v(d - ab + ba) \geqq v(a) + v(b) + 1 \quad \text{(condition 3°)}.$$

Puisque f est un homomorphisme,

$$(1 + a)(1 + a') = (1 + b)(1 + b') = 1,$$

d'où

(★) $$a+a'+aa'=b+b'+bb'=0.$$

Nous allons transformer les expressions de

$$c=(1+a)(1+b')-1 \qquad \text{et de} \qquad d=(1+a)(1+b)(1+a')(1+b')-1$$

en tenant compte de (★). Nous obtenons :

$$c=a+b'+ab'=a-b+(a-b)b',$$

et nous sommes ramenés à démontrer

$$\varphi\big((a-b)b'\big)\geqq \mathrm{Inf}\big(\varphi(a),\varphi(b)\big)+1,$$

ce qui est immédiat puisque $\varphi(b')\geqq 1$. De même

$$\begin{aligned} d&=a+a'+aa'+b+b'\\ &\quad+bb'+ab+ab'+abb'+ba'+a'b'+aba'+aa'b'+ba'b'+aba'b'\\ &=ba'+a'b'+aba'+aa'b'+ba'b'+aba'b'=ab-ba+aba'+abb'-baa'+ba'b'+aba'b'. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de démontrer que

$$\varphi(aba'+abb'-baa'+ba'b'+aba'b')\geqq\varphi(a)+\varphi(b)+1.$$

Chaque terme de la somme considérée a au moins trois facteurs de filtration $\geqq 1$, parmi lesquels l'un est égal à a ou a', et un autre à b ou b'; comme $\varphi(a')=\varphi(a)$ et $\varphi(b')=\varphi(b)$, la filtration de chaque terme est $\geqq\varphi(a)+\varphi(b)+1$, ce qui achève la démonstration.

Exemple. — Soit A un module muni de la filtration φ, E l'anneau des endomorphismes linéaires de A. Les sous-modules E_i de E, obtenus en posant $x\in E_i$ si et seulement si $\varphi\big(x(a)\big)\geqq\varphi(a)+i$ pour tout $a\in A$, définissant dans E une filtration ω. Si G est un groupe d'automorphismes du module A tel que $\omega(g-1)\geqq 1$ pour tout $g\in G$, le théorème précédent montre qu'on obtient une N-suite (H_i) dans G en posant $H_i=G\cap(1+E_i)$. Plus particulièrement : si G est un groupe fini, et A l'anneau des entiers d'un corps valué complet à valuation discrète, alors G est un groupe de ramification, et (H_i) n'est autre que la suite des groupes de ramification supérieurs.

Comme dans le cas, entièrement analogue, d'un groupe muni d'une N-suite, nous définissons pour un module filtré les notions de topologie associée à la filtration, de filtration séparante, de module complété, etc. Si l'homomorphisme f du théorème (3.2) est un isomorphisme, nous pouvons identifier G à son image $f(G)$. Nous avons alors deux topologies sur G : celle induite par la topologie de l'algèbre A (associée à la filtration φ), et la (H_i)-topologie, (H_i) désignant la N-suite du théorème (3.2). On vérifie sans peine que ces deux topologies coïncident; il en résulte que, dans le cas où φ est une filtration

séparante, (H_i) est une N-suite séparante et le complété de G pour sa (H_i) topologie se trouve plongé canoniquement dans l'algèbre complétée de A.

Nous ne savons pas caractériser intrinsèquement les N-suites obtenues dans un groupe G par le procédé du théorème (3.2). Remarquons qu'on les obtient toutes en se bornant à considérer les filtrations de l'algèbre Z(G) du groupe G à coefficients entiers rationnels. En effet, l'homomorphisme f de (3.2) se prolonge univoquement en un homomorphisme d'anneau f de Z(G) dans A; et, si l'on pose $w(y) = v(\overline{f}(y))$ pour tout $y \in Z(G)$, w est une filtration sur Z(G) qui permet d'obtenir la même N-suite (H_i) de G (8).

Terminons ces considérations générales en établissant une relation entre les anneaux de Lie $\mathfrak{L}(H_i)$ et $\mathfrak{L}(K_i)$ associés à deux N-suites (H_i) et (K_i) d'un même groupe G.

Pour cela considérons dans $\mathfrak{L}(H_i) = \Sigma_i H_i/H_{i+1}$ les sous-modules homogènes

$$\mathfrak{L}(H_i)_j = \Sigma_i (H_i \cap K_j) H_{i+1}/H_{i+1}.$$

Les éléments de $\mathfrak{L}(H_i)_j$ sont les éléments de $\mathfrak{L}(H_i)$ dont toutes les composantes homogènes peuvent s'obtenir, par passage aux quotients, à partir d'éléments de K_j. Cela montre que les sous-modules $\mathfrak{L}(H_i)_j$ définissent sur $\mathfrak{L}(H_i)$ une filtration compatible avec sa structure d'anneau de Lie. L'anneau de Lie gradué $\mathcal{G}\mathfrak{L}(H_i)$ associé à $\mathfrak{L}(H_i)$ ainsi filtré est naturellement bigradué, puisque la graduation primitive de $\mathfrak{L}(H_i)$ définit, par passage aux quotients, une graduation sur $\mathfrak{L}(H_i)_j/\mathfrak{L}(H_i)_{j+1}$. Nous dirons pour abréger que $\mathfrak{L}(H_i)$ est filtré à partir de la N-suite (K_j), et nous appellerons $\mathcal{G}\mathfrak{L}(H_i)$ l'anneau de Lie bigradué associé :

Théorème (3.3). — *Soient* (H_i) *et* (K_i) *deux* N-*suites dans le groupe* G. *Considérons l'anneau de Lie* $\mathfrak{L}(H_i)$ *que nous filtrons à partir de la* N-*suite* (K_i), *ainsi que l'anneau de Lie* $\mathfrak{L}(K_i)$ *que nous filtrons à partir de la* N-*suite* (H_i). *Alors les anneaux de Lie bigradués associés :* $\mathcal{G}\mathfrak{L}(H_i)$ *et* $\mathcal{G}\mathfrak{L}(K_i)$ *sont canoniquement isomorphes.*

En effet, $\mathcal{G}\mathfrak{L}(H_i)$ s'identifie au groupe

$$\Sigma_{i,j} (H_i \cap K_j) H_{i+1}/(H_i \cap K_{j+1}) H_{i+1}$$

et de même $\mathcal{G}\mathfrak{L}(K_i)$ s'identifie à

$$\Sigma_{i,j} (K_i \cap H_j) K_{i+1}/(K_i \cap H_{j+1}) K_{i+1}.$$

Or le « lemme de Zassenhaus » classique établit l'isomorphisme des groupes quotients

$$(H_i \cap K_j) H_{i+1}/(H_i \cap K_{j+1}) H_{i+1} \quad \text{et} \quad (K_j \cap H_i) K_{j+1}/(K_j \cap H_{i+1}) K_{j+1}$$

(8) w est l'image réciproque de la filtration v de A par l'homomorphisme f.

en montrant qu'ils admettent tous deux comme système de représentants un système de représentants quelconque du groupe

$$(H_i \cap K_j)/(H_i \cap K_{j+1})(H_{i+1} \cap K_j).$$

Nous voyons ainsi comment établir l'isomorphisme canonique des anneaux de Lie bigradués $\mathcal{G}\mathcal{L}(H_i)$ et $\mathcal{G}\mathcal{L}(K_i)$ en associant leurs composantes homogènes de degrés respectifs (i, j) et (j, i); l'existence d'un système de représentants communs montre qu'il s'agit bien d'un isomorphisme pour les structures d'anneaux de Lie, puisque les crochets de Lie s'obtiennent à partir des commutateurs dans G par passage aux quotients.

Remarque (3.4). — Nous avons démontré le théorème (3.2) par un calcul direct. Nous aurions pu le faire apparaître comme une conséquence d'un résultat plus profond dû à Kaloujnine ([13], [14]). Soient G un groupe (H_i) une suite de sous-groupes invariants dans G, K le groupe des automorphismes de G. Désignons par L_j la partie de K constituée par les automorphismes qui laissent invariants les groupes quotients H_i/H_{i+j} (c'est-à-dire que $\alpha \in L_j$ équivaut à $\alpha \in K$ et $x^{-1}\alpha(x) \in H_{i+j}$ pour tout entier positif i et tout $x \in H_i$). Alors (L_j) est une N-suite dans le sous-groupe L_1 de K. Pour retrouver le théorème (3.2), il faut identifier le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau avec unité A à un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe additif de A (en considérant les multiplications à gauche).

4. La suite centrale descendante d'un groupe libre. — Soit Ω un anneau commutatif possédant une unité (notée 1), et $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments que nous prenons comme générateurs libres d'une Ω-algèbre associative avec unité, que nous noterons A. A est ainsi l'algèbre des polynomes à coefficients dans Ω par rapport aux « variables » non commutatives (x_ι), ou encore l'algèbre tensorielle du Ω-module libre de base (x_ι). A est porteur d'une graduation naturelle : les scalaires (éléments de Ω) sont de degré 0, les générateurs (x_ι) de degré 1. Nous appellerons *ordre* de $x \in A$, et nous noterons $\omega(x)$ le degré minimum des composantes homogènes non nulles de x; ω est alors une filtration séparante dans A, et, en complétant A pour la topologie associée, nous obtenons $\overline{A}$, algèbre des séries formelles non commutatives par rapport aux (x_ι) à coefficients dans Ω. Par définition, $\overline{A}$ sera appelé *algèbre de Magnus* à coefficients dans Ω et de générateurs $(x_\iota)_{\iota \in I}$. Dans $\overline{A}$, les éléments $1 + x_\iota$ deviennent inversibles $\left((1+x_\iota)^{-1} = 1 - x_\iota + x_\iota^2 - x_\iota^3 \ldots\right)$ et engendrent donc un groupe multiplicatif G.

Théorème (4.1). — *Dans toute algèbre de Magnus de générateurs* $(x_\iota)_{\iota \in I}$, *les*

éléments $(1+x_\iota)_{\iota\in I}$ *engendrent, par rapport à la multiplication, un groupe libre* G (9).

Il s'agit de démontrer que

$$(1+x_{\iota_1})^{\alpha_1}\dots(1+x_{\iota_r})^{\alpha_r}\neq 1,$$

quand tous les exposants α_i sont des entiers rationnels $\neq 0$ et que deux indices consécutifs quelconques ι_i, ι_{i+1} sont distincts. Nous rapportons A à sa base naturelle constituée par les produits de x_ι; alors tous les éléments de G ont pour coordonnées des multiples entiers de l'unité dans Ω. Nous pouvons donc nous borner au cas où G est l'anneau Z des entiers rationnels, ou l'anneau Z_n des entiers mod n. Le coefficient de $x_{\iota_1}^{\beta_1}\dots x_{\iota_r}^{\beta_r}$ dans le produit considéré est égal, si tous les exposants β_i sont $\neq 0$, au produit des coefficients binomiaux : $\binom{\alpha_1}{\beta_1}\dots\binom{\alpha_r}{\beta_r}$. Soit p un nombre premier qui sera supposé diviser n dans le cas où $\Omega = Z_n$. Alors, si nous définissons β_i comme la plus grande puissance de p divisant α_i, $\beta_i \geqq 1$ et $\binom{\alpha_i}{\beta_i}\not\equiv 0 \pmod p$ (10). Ainsi le produit $\binom{\alpha_1}{\beta_1}\dots\binom{\alpha_r}{\beta_r}$ n'est pas divisible par p et ne peut donc être nul dans Ω, ce qui démontre le théorème.

Nous appliquerons le théorème (3.2) au groupe libre G plongé dans l'algèbre de Magnus $\overline{A}$ filtrée par son ordre. Lorsque $\Omega = Z$, les sous-groupes de la N-suite ainsi obtenue ont été appelés par Magnus « *groupes de dimension* » de G. Witt [33] et Magnus [22] ont établi ultérieurement que cette N-suite coïncidait avec la suite centrale descendante de G.

Lorsque $\Omega = Z_n$, on obtient les « *groupes de dimension* mod n » de G. Ils ont été caractérisés, pour n premier, par Zassenhaus [36]. Nous les étudierons dans le cas général. En tout cas, nous savons que les groupes de dimension constituent toujours des N-suites séparantes des groupes libres. D'où le résultat : tout groupe libre est un N-groupe.

Nous aurons à faire usage de certaines propriétés de l'*algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie*. Si L est une algèbre de Lie sur l'anneau commutatif d'opérateurs Ω, une algèbre enveloppante universelle A de L est une Ω-algèbre associative contenant L (comme sous-algèbre de l'algèbre de Lie portée par A), engendrée par L (en tant qu'algèbre associative), et telle que toute représentation linéaire f de L dans une Ω-algèbre associative B puisse

---

(9) Magnus [21].

(10) En effet, posons $\alpha = \beta\gamma$, β étant une puissance de p et γ un entier premier à p. Alors, si $\alpha > 0$,

$$(1+x)^\alpha = \big((1+x)^\beta\big)^\gamma \equiv (1+x^\beta)^\gamma \equiv (1+\gamma x^\beta+\dots) \pmod p.$$

Il en résulte, d'après le développement de $(1+x)^{-1}$, que

$$(1+x)^\alpha \equiv 1+\gamma x^\beta+\dots \pmod p,$$

quel que soit le signe de l'entier α.

être prolongée en un homomorphisme d'algèbres g de A dans B. Ces conditions déterminent A à un isomorphisme canonique près. Nous admettrons l'existence de A lorsque L possède une base sur Ω (Poincaré [28], Witt [33], Birkoff [2])(11); si $(e_\iota)_{\iota\in I}$ est une base de L sur Ω, on obtient une base de A sur Ω formée de monômes par rapport aux e_ι (produits de e_ι) en choisissant un représentant et un seul dans chacune des classes de monômes qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs. En particulier, les puissances e_ι^n ($\iota\in I$, n entier >0) dans A sont linéairement indépendantes sur Ω.

Montrons que dans l'algèbre de Magnus $\overline{A}$ de générateurs $(x_\iota)_{\iota\in I}$ à coefficients dans Ω, la sous-algèbre de Lie L engendré par les (x_ι) est une Ω-algèbre de Lie libre par rapport aux générateurs (x_ι). Soit, en effet, L' une Ω-algèbre de Lie libre par rapport aux générateurs $(y_\iota)_{\iota\in I}$ en correspondance biunivoque avec les (x_ι). L' admet une base sur Ω, donc une algèbre enveloppante A' qui admet les (y_ι) comme générateurs. Soit f l'homomorphisme de L' sur L qui applique chaque y_ι sur x_ι. f se prolonge en un homomorphisme g de A' sur la sous-algèbre A de $\overline{A}$ engendrée par les (x_ι); par définition, A est libre par rapport aux (x_ι), et g est donc biunivoque. Sa restriction f établit donc l'isomorphisme de L et L'.

Soient maintenant $\overline{A}$ l'algèbre de Magnus de générateurs $(x_\iota)_{\iota\in I}$ *à coefficients entiers rationnels*, G le groupe libre engendré par les $(1+x_\iota)$, et (H_i) la N-suite déterminée dans G par la filtration ω de $\overline{A}$ [th. (3.2)]. Si (G_i) désigne la suite centrale descendante de G, il existe d'après (2.2) un homomorphisme canonique de $\mathfrak{L}(G_i)$ dans $\mathfrak{L}(H_i)$ (12). $\mathfrak{L}(G_i)$ est engendré par ses éléments de degré 1, et par conséquent par les classes $\mathrm{mod}\,G_2$ des éléments $(1+x_\iota)$ qui engendrent évidemment G/G_2. L'image canonique $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{L}(G_i)$ dans $\mathfrak{L}(H_i)$ est donc engendrée par les images des classes $\mathrm{mod}\,G_2$ des $(1+x_\iota)$, c'est-à-dire (en traduisant la définition de l'homomorphisme utilisé) par les classes $\mathrm{mod}\,H_2$ des $(1+x_\iota)$. Or, $\mathfrak{L}(H_i)$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de l'anneau de Lie porté par $\mathfrak{G}(\overline{A})$, lequel à son tour s'identifie canoniquement à A. Si nous composons ces identifications, $\mathfrak{L}(H_i)$ devient un sous-anneau de l'anneau de Lie porté par A, et $\mathfrak{M}$ s'identifie au sous-anneau de Lie engendré par les (x_ι) dans A. Nous venons de démontrer que ce sous-anneau est un anneau de Lie libre par rapport aux générateurs (x_ι); cela entraîne que l'homomorphisme de $\mathfrak{L}(G_i)$ sur $\mathfrak{M}$ est biunivoque, ce qui n'est possible, d'après (2.2), que si $G_i = H_i$ pour tout entier i. Nous avons donc le :

THÉORÈME (4.2). — *L'anneau de Lie $\mathfrak{L}(G_i)$ associé à la suite centrale descen-*

(11) L'algèbre enveloppante n'existe pas toujours si L n'a pas de base (Chirchov [3]). Néanmoins, si Ω est un anneau principal (Z ou Z_n, par exemple), l'algèbre enveloppante existe (Lazard) [15].

(12) Associé à l'isomorphisme identique de G sur lui-même.

dante (G_i) *du groupe libre* G *est libre. Un système de générateurs indépendants de* $\mathfrak{L}(G_i)$ *est constitué par les classes* $\bmod G_2$ *d'un système de générateurs indépendants de* G. *Si* G *est identifié au groupe multiplicatif engendré par les* $(1+x_\iota)_{\iota\in I}$ *dans l'anneau de Magnus à coefficients entiers de générateurs* (x_ι), *chaque sous-groupe* G_i *est formé des éléments de* G *dont les composantes homogènes de degré strictement compris entre* 0 *et* i *sont nulles.*

Ce théorème admet une réciproque :

THÉORÈME (4.3). — *Soit* G *un groupe engendré par ses éléments* $(x_\iota)_{\iota\in I}$ *et* (H_i) *une* N-*suite dans* G. *Si les classes* $\bmod H_2$ *des* (x_ι) *constituent, dans l'anneau de Lie* $\mathfrak{L}(H_i)$, *un système de générateurs indépendants d'un sous-anneau de Lie libre, alors* G *est un groupe libre par rapport aux générateurs* (x_ι), *et* (H_i) *est sa suite centrale descendante.*

Considérons, en effet, un groupe libre G′ de générateurs $(y_\iota)_{\iota\in I}$ en correspondance biunivoque avec les (x_ι), et l'anneau de Lie $\mathfrak{L}(G'_i)$ associé à sa suite centrale descendante. A l'homomorphisme f de G′ sur G qui applique chaque y_ι sur x_ι est associé l'homomorphisme $\tilde{f}$ de $\mathfrak{L}(G'_i)$ dans $\mathfrak{L}(H_i)$ qui applique $y_\iota \bmod G'_2$ sur $x_\iota \bmod H_2$. Or, $\mathfrak{L}(G'_i)$ est engendré par les classes $y_\iota \bmod G'_2$ et $\tilde{f}$, qui applique $\mathfrak{L}(G'_i)$ sur un anneau de Lie libre par rapport aux $\tilde{f}(y_\iota \bmod G'_2)$, est donc biunivoque. Cela entraîne, d'après (2.2), $G'_i = \overline{f}^1(H_i)$ pour tout i. Le noyau de f est contenu dans l'intersection des G'_i, qui se réduit à l'élément neutre puisque G′ est un N-groupe. Ainsi f est un isomorphisme de G′ sur G tel que $H_i = f(G'_i)$ pour tout i, ce qui achève la démonstration.

5. LES p-FILTRATIONS DES ANNEAUX DE MAGNUS. — Soit p un nombre premier. Un module quelconque A est filtré par ses sous-modules $p^i A$ (i entier ≥ 0) constitués par les éléments de la forme $p^i x$, où $x \in A$. Nous désignons par $w_p(A; x)$ la filtration correspondante; ainsi $w_p(A; x) = i$ signifie $x \in p^i A$ et $x \notin p^{i+1} A$. Pour simplifier, nous écrirons $w_p(x)$ au lieu de $w_p(A; x)$ lorqu'il ne pourra pas y avoir d'équivoque sur le module A.

Prenons en particulier l'anneau de Magnus $\mathfrak{A}$ de générateurs $(x_\iota)_{\iota\in I}$, à coefficients entiers rationnels. w_p est une filtration séparante dans $\mathfrak{A}$, et le complété $\mathfrak{A}_p$ de $\mathfrak{A}$ pour la topologie associée à w_p s'identifie à l'algèbre de Magnus de générateurs (x_ι) à coefficients entiers p-adiques. Comme précédemment, nous considérerons le groupe libre engendré par les $(1+x_\iota)$ dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathfrak{A}_p$.

Nous connaissons deux filtrations sur $\mathfrak{A}_p$: w_p et l'ordre ω. Nous allons étudier certaines filtrations v sur $\mathfrak{A}_p$ construites à partir de w_p et de ω, qui devront vérifier les conditions suivantes :

(5.1) α. Si $\Sigma_{0\leq i<\infty} y_i$ est la décomposition de $y\in\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ en somme de ses composantes homogènes,

$$0\leq\varphi(y)=\inf_{0\leq i<\infty}\varphi(y_i).$$

De plus, si $\omega(y)\geq 1$, $\varphi(y)\geq 1$.

β. Si $y_i\in\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ est homogène de degré i, $\varphi(y_i)$ ne dépend que de i et de $w_p(\mathfrak{A}_\mathfrak{p}; y_i)$.

La condition α s'énonce encore ainsi : la filtration φ est compatible avec la graduation de $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$; $\varphi(x)\geq 0$ pour tout $x\in\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ et $\varphi(x_i)\geq 1$ pour un générateur quelconque x_i de $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$.

D'après β, si $y\in\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ est homogène,

$$\varphi(y)=\mathrm{F}_\varphi\big(\deg y,\ w_p(y)\big),$$

$\mathrm{F}(i, j)$ désignant une fonction déterminée des variables entières ≥ 0, i et j, à valeurs entières ≥ 0 ou $+\infty$.

Réciproquement, pour que la fonction $\mathrm{F}_\varphi(i, j)$ définisse une filtration φ satisfaisant à (5.1), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées (pour tous entiers $i, j, i', j'\geq 0$) :

$$(5.2)\qquad \begin{cases} 0\leq\mathrm{F}_\varphi(i, j)\leq\infty, \qquad 1\leq\mathrm{F}_\varphi(1, 0),\\ \mathrm{F}_\varphi(i, j)+\mathrm{F}_\varphi(i', j')\leq\mathrm{F}_\varphi(i+i', j+j'). \end{cases}$$

Ces conditions s'obtiennent en explicitant les axiomes généraux des filtrations pour la fonction φ construite à partir de $\mathrm{F}_\varphi(i, j)$ conformément à (5.1).

Nous nous proposons d'étudier les N-suites de G associées (3.2) aux filtrations φ vérifiant (5.1). Nous aurons donc à calculer $\varphi(z-1)$ pour $z\in\mathrm{G}$. A cet effet, nous utiliserons une représentation de z comme produit infini, ce produit convergeant au sens de la topologie associée à la suite centrale descendante (G_i) de G. Rappelons (4.2) que (G_i) est associée à la filtration ω. Si nous convenons de poser $p^\infty=0$ et, par conséquent $z^{p^\infty}=1$ pour $z\in\mathrm{G}$, nous avons le

Lemme (5.3). — *Tout élément $z\in\mathrm{G}$ peut être représenté par un produit de puissances $z=z_1^{p^{k_1}}z_2^{p^{k_2}}\dots z_i^{p^{k_i}}\dots$; les k_i sont égaux à des entiers ≥ 0 ou bien au symbole ∞; pour tout i, $z_i\in\mathrm{G}_i$ et, si $k_i\neq\infty$,*

$$w_p(\mathrm{G}_i/\mathrm{G}_{i+1};\ z_i \bmod \mathrm{G}_{i+1})=0.$$

Supposons déjà définis, pour $1\leq i\leq j-1$, les éléments z_i et les exposants k_i vérifiant les conditions du lemme, et tels que

$$(z_1^{p^{k_1}}\dots z_{j-1}^{p^{k_{j-1}}})^{-1}z=z_j\in\mathrm{G}_j.$$

Si $z'_j \in G_{j+1}$, nous prendrons $k_j = \infty$, d'où $z_j^{p^{k_j}} = 1$; sinon

$$w_p(G_j/G_{j+1}\,;\, z'_j \bmod G_{j+1}) = k_j$$

est fini (puisque G_j/G_{j+1} est un groupe abélien libre), et il existe $z_j \in G_j$ et $z'_{j+1} \in G_{j+1}$, tels que $z'_j = z_j^{p^{k_j}} z'_{j+1}$. Ainsi se poursuit la construction du produit ordonné $\Pi_{i=1}^{\infty} z_i^{p^{k_i}}$ qui converge vers z pour la (G_i)-topologie puisque, pour tout entier j, $\Pi_{i=1}^{j} z_i^{p^{k_i}} \in z G_{j+1}$.

Nous voyons qu'une grande indétermination subsiste quant aux choix des $z_i^{p^{k_i}}$: une fois choisis les $z_i^{p^{k_i}}$ pour $1 \leq i \leq j-1$, k_j est bien déterminé, mais z_j est seulement déterminé $\bmod G_{j+1}$. Néanmoins la donnée d'une suite (k_i) suffit pour calculer $\varphi(z-1)$, φ désignant une filtration satisfaisant à (5.1). Nous caractériserons la filtration φ au moyen de la fonction $F_\varphi(i, j)$ vérifiant (5.2).

Calculons d'abord $\varphi(z_i^{p^{k_i}} - 1)$, k_i étant fini. Posons

$$z_i = 1 + y_i + t_{i+1},$$

où y_i est la composante homogène de degré i de z_i, et, puisque $z_i \in G_i$, $\omega(t_{i+1}) \geq i+1$. D'après (4.2), y_i appartient au sous-anneau de Lie L engendré dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}$ par ses générateurs (x_ι) et $w_p(G_i/G_{i+1}\,;\, z_i \bmod G_{i+1}) = 0$ équivaut à $w_p(L\,;\, y_i) = 0$. Mais, d'après les propriétés de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, si $y_i \in L$, $w_p(\mathfrak{A}\,;\, y_i) = w_p(L\,;\, y_i)$ et, d'après les propriétés de la complétion p-adique, $w_p(\mathfrak{A}\,;\, y_i) = w_p(\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}\,;\, y_i)$. Ainsi finalement $w_p(\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}\,;\, y_i) = 0$, et, de même, $w_p(\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}\,;\, y_i^r) = 0$ pour tout entier $r \geq 1$.

D'après (5.1) :

$$\varphi\left((1+y_i)^{p^{k_i}} - 1\right) = \operatorname*{Inf}_{1 \leq r \leq p^{k_i}} \varphi\left(\binom{p^{k_i}}{r} y_i^r\right) = \operatorname*{Inf}_{1 \leq r \leq p^{k_i}} F_\varphi\left(ir,\, w_p\left(\binom{p^{k_i}}{r}\right)\right).$$

Montrons que

$$\varphi\left(z_i^{p^{k_i}} - (1+y_i)^{p^{k_i}}\right) \geq \varphi\left((1+y_i)^{p^{k_i}} - 1\right) + 1.$$

En effet :

$$\varphi\left((1+y_i+t_{i+1})^{p^{k_i}} - (1+y_i)^{p^{k_i}}\right) \geq \operatorname*{Inf}_{1 \leq r \leq p^{k_i}} \varphi\left(\binom{p^{k_i}}{r}\left((y_i+t_{i+1})^r - y_i^r\right)\right).$$

Or,

$$\omega\left((y_i+t_{i+1})^r - y_i^r\right) \geq ir+1,$$

et, par conséquent,

$$\varphi\left(\binom{p^{k_i}}{r}\left((y_i+t_{i+1})^r - y_i^r\right)\right) \geq F_\varphi\left(ir+1,\, w_p\left(\binom{p^{k_i}}{r}\right)\right) \geq F_\varphi\left(ir,\, w_p\left(\binom{p^{k_i}}{r}\right)\right) + 1 \geq \varphi\left((1+y_i)^{p^{k_i}} - 1\right) + 1.$$

Ainsi,

$$\varphi\left(z_i^{p^{k_i}} - 1\right) = \varphi\left((1+y_i)^{p^{k_i}} - 1\right) = \operatorname*{Inf}_{1 \leq r \leq p^{k_i}} F_\varphi\left(ir,\, w_p\left(\binom{p^{k_i}}{r}\right)\right).$$

Or, il est bien connu que $w_p\left(\binom{p^{k_i}}{r}\right)=k_i-w_p(r)$. Posons donc $r=p^h s$, avec $(s,p)=1$; ainsi $h=w_p(r)$. Alors $F_v\left(ir, w_p\left(\binom{p^{k_i}}{r}\right)\right)=F_v(ip^h s, k_i-h)$. Mais, si $s>1$;

$$F_v(ip^h s, k_i-h)\geqq F_v(ip^h, k_i-h)+ip^h(s-1)\geqq F_v(ip^h, k_i-h)+1.$$

Cela montre qu'il suffit de donner à r les valeurs $p^h(0\leqq h\leqq k_i)$, et nous obtenons :

$$v\left(z_i^{p^{k_i}}-1\right)=\operatorname*{Inf}_{0\leqq h\leqq k_i} F_v(ip^h, k_i-h),$$

$$v\left(z_i^{p^{k_i}}-1-\Sigma_{h=0}^{k_i}\binom{p^{k_i}}{p^h}y_i^{p^h}\right)\geqq v\left(z_i^{p^{k_i}}-1\right)+1.$$

Soit maintenant $z=\Pi_{i=1}^{\infty} z_i^{p^{k_i}}$ comme en (5.3). Nous savons (3.2) que

$$v(z-1)\geqq \operatorname*{Inf}_{1\leqq i<\infty} v\left(z_i^{p^{k_i}}-1\right)=\operatorname*{Inf}_{1\leqq i<\infty;\,0\leqq h\leqq k_i} F_v(ip^h, k_i-h)=c.$$

Montrons que l'on a précisément $v(z-1)=c$. Pour simplifier, le signe $\equiv$ indiquera dans les lignes suivantes une congruence modulo l'idéal constitué par les éléments de $\mathfrak{A}_p$ dont la filtration est au moins égale à $c+1$. Alors :

$$z_i^{p^{k_i}}\equiv 1+\Sigma_{0\leqq h\leqq k_i}\binom{p^{k_i}}{p^h}y_i^{p^h} \qquad \text{et} \qquad z\equiv 1+\Sigma_{\substack{1\leqq i\leqq\infty\\ 0\leqq h\leqq k_i}}\binom{p^{k_i}}{p^h}y_i^{p^h}.$$

Il existe, d'après la définition de c, un couple d'entiers m et n, tels que

$$F_v(mp^n, k_m-n)=c, \quad y_m\neq 0 \qquad \text{et} \qquad 0\leqq n\leqq k_m.$$

D'après (5.1), on ne peut avoir $v(z-1)>c$ que si la composante homogène de degré mp^n de z est de filtration $>c$. Cela se traduit par :

$$\Sigma_{\substack{ip^h=mp^n\\ 0\leqq h\leqq k_i}}\binom{p^{k_i}}{p^h}y_i^{p^h}\equiv 0,$$

et, pour montrer l'impossibilité de cette relation, il suffit d'établir que :

$$w_p\left(\Sigma_{ip^h=mp^n}\binom{p^{k_i}}{p^h}y_i^{p^h}\right)=\operatorname*{Inf}_{ip^h=mp^n} w_p\binom{p^{k_i}}{p^h}\leqq k_m-n.$$

Remarquons que les éléments y_i qui apparaissent dans le produit $\Pi_i(1+y_i+t_{i+1})^{p^{k_i}}$ peuvent, éventuellement, ne pas figurer parmi les éléments d'une même base du groupe abélien libre L. Par contre, la condition $w_p(L;y_i)=0$, pour tout i, montre que les y_i peuvent figurer parmi les éléments d'une même base, sur l'anneau des entiers p-adiques, de l'algèbre de Lie L_p (complétée de L pour la filtration w_p) engendrée dans $\mathfrak{A}_p$ par ses générateurs (x_i). Mais nous avons vu que la sous-algèbre de $\mathfrak{A}_p$ engendrée par les (x_i) (dont $\mathfrak{A}_p$ est la complétée pour la filtration ω) est une algèbre enveloppante universelle de L_p. Cela implique, comme nous l'avons rappelé au paragraphe 4, que toutes les puissances entières >0 des y_i peuvent figurer parmi les éléments d'une même base de cette sous-algèbre sur l'anneau des entiers p-adiques. La relation que

nous cherchons à établir en résulte immédiatement. Nous avons donc achevé la démonstration du :

THÉORÈME (5.4). — *Si φ est une filtration de $\mathfrak{A}_p$ vérifiant* (5.1), *et si $\Pi_i z_i^{p^{k_i}}$ est une représentation comme produit de $z \in G$ vérifiant les conditions de* (5.3), *alors $\varphi(z-1) = \operatorname{Inf} F_\varphi(ip^h, k_i - h)$, la borne inférieure étant prise pour tous les couples d'entiers i, h tels que $1 \leq i$ et $0 \leq h \leq k_i$.*

Il est évident que n'importe quelle représentation de z comme produit doit conduire à la même valeur de $\varphi(z-1)$. La borne inférieure figurant dans (5.4) est donc un invariant de toutes les suites (k_i) apparaissant dans les représentations d'un même $z \in G$.

Nous pouvons maintenant déterminer les sous-groupes de la N-suite $(H_{i,\varphi})$ de G associée à la filtration φ d'après (3.2). Par définition, $z \in H_{i,\varphi}$ équivaut à $\varphi(z-1) \geq i$, ou encore (5.4) :

$$F_\varphi(jp^h, k_j - h) \geq i \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \quad \text{et} \quad 0 \leq h \leq k_j,$$

si $z = \Pi_{j=1}^{\infty} z_j^{p^{k_j}}$ est une représentation quelconque de z comme en (5.3). Pour i et j fixes, désignons par $\Phi_\varphi(i, j)$ le plus petit entier k tel que $F_\varphi(jp^h, k-h) \geq i$ pour tout h tel que $0 \leq h \leq k$, ou bien le symbole ∞ si de tels entiers n'existent pas. Nous pouvons alors énoncer le :

THÉORÈME (5.5). — *Le $i^{ième}$ sous-groupe $H_{i,\varphi}$ de la* N*-suite de* G *associée à la filtration φ vérifiant* (5.1) *est de la forme :*

$$H_{i,\varphi} = \Pi_{j=1}^{\infty} G_j^{p^{\Phi_\varphi(i,j)}}.$$

Autrement dit si le produit $z = \Pi_{j=1}^{\infty} z_j^{p^{\Phi_\varphi(i,j)}}$ appartient à G *et si chaque $z_j \in G_j$ alors $z \in H_{i,\varphi}$; réciproquement, si $\Pi_{j=1}^{\infty} z_j^{p^{k_i}}$ est une représentation de $z \in H_{i,\varphi}$ vérifiant les conditions de* (5.3), *$k_j \geq \Phi_\varphi(i, j)$ pour tout j.*

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les « groupes de dimension modulo p^h » d'un groupe libre, définis à partir de l'algèbre de Magnus $\mathfrak{A}_{p^h}$ à coefficients dans l'anneau Z_{p^h} des entiers mod p^h. Il revient au même d'introduire dans $\mathfrak{A}_p$ la filtration définie par $F_h(i, j) = \infty$ si $j \geq h$ et $F_h(i, j) = i$ si $0 \leq j \leq h-1$, car le quotient de $\mathfrak{A}_p$ par l'ensemble de ses éléments de filtration ∞ s'identifie alors à $\mathfrak{A}_{p^h}$. Un calcul très simple nous montre que

$$\operatorname*{Inf}_{0 \leq r \leq k} F_h(ip^r, k-r) = i \qquad \text{si} \quad k < h$$

ou bien

$$\operatorname*{Inf}_{\leq r \leq k} F_h(ip^r, k-r) = ip^{(k-h+1)} \qquad \text{si} \quad k \geq h.$$

Nous pouvons écrire dans les deux cas :

$$\operatorname*{Inf}_{0\leq r\leq k} \mathrm{F}_h(ip^r,\ k-r) = ip^{(k-h+1)^+},$$

en posant selon l'usage $n^+ = \mathrm{Sup}\,(n,\ 0)$. D'où :

THÉORÈME (5.6). — *Le $i^{ième}$ sous-groupe de dimension de* $\mathrm{G} \bmod p^h$, *noté* G_{i,p^h} *est constitué par les éléments* $z \in \mathrm{G}$ *dont les représentations* (5.3) $\Pi_{j=1}^{s} z_j^{p^{kj}}$ *vérifient* $jp^{(k_j-h+1)^+} \geq i$ *pour tout* j.

Dans le cas où $h = 1$, on obtient les groupes de dimension $\bmod p$, déterminés par Zassenhaus [36].

Ces N-suites correspondant aux différentes valeurs de l'exposant h se déduisent facilement les unes des autres. Ainsi, si $h < h'$:

$$\mathrm{G}_{j,p^{h'}} = \mathrm{G}_{jp^{h'-h},p^h}\mathrm{G}_j \tag{5,7}$$

et, en particulier,

$$\mathrm{G}_{j,p^h} = \mathrm{G}_{jp^{h-1},p}\mathrm{G}_j.$$

En effet, si $z = \Pi_i z_i^{p^{k_i}} \in \mathrm{G}_{j,p^{h'}}$, nous avons, pour tout i tel que $1 \leq i \leq j-1$:

$$ip^{(k_i-h'+1)^+} \geq j, \qquad \text{donc} \quad ip^{(k_i-h'+1)} \geq j,$$

ce qui équivaut à : $ip^{(k_i-h+1)} \geq jp^{h'-h}$. Ainsi

$$\Pi_{i=1}^{j-1} z_i^{p^{k_i}} \in \mathrm{G}_{jp^{h'-h},p^h}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{G}_{j,p^{h'}} \subset \mathrm{G}_{jp^{h'-h},p^h}\mathrm{G}_j$$

et l'on montre de même que

$$\mathrm{G}_{j,p^{h'}} \supset \mathrm{G}_{jp^{h'-h},p^h}\mathrm{G}_j.$$

Le théorème (5.4) nous permet de déterminer une N-suite dans G chaque fois que nous avons une fonction $\mathrm{F}(i,j)$ vérifiant les conditions (5.2). Prenons, en particulier, $\mathrm{F}(i,j) = ri + sj$ (r et s entiers ≥ 1). Nous aurons d'abord à calculer

$$\operatorname*{Inf}_{0\leq h\leq k} \mathrm{F}(ip^h,\ k-h) = \operatorname*{Inf}_{0\leq h\leq k} rip^h + s(k-h).$$

Si p, r et s sont fixes, la borne inférieure est atteinte pour $h = 0$ si i est suffisamment grand $\left(\text{en tout cas si } i \geq \frac{s}{r\log p}\right)$; des irrégularités apparaissent pour les petites valeurs de i.

Prenons d'abord $r = s = 1$. Alors la borne inférieure est $i+k$, quels que soient i et p. Par conséquent $v(z-1) = \operatorname*{Inf}_{1\leq i}(k_i+i)$ et :

(5.8) La N-suite de G associée à la filtration définie par $\mathrm{F}(i,j) = i+j$ est composée des sous-groupes $\mathrm{H}_i = \mathrm{G}_1^{p^{i-1}}\mathrm{G}_2^{p^{i-2}}\ldots\mathrm{G}_i$.

Soit maintenant $\mathrm{F}(i,j) = i+2j$. Alors nous avons

$$\operatorname*{Inf}_{0\leq h\leq k}\left(ip^h + 2(k-h)\right) = i+2k,$$

sauf pour $p=2$, $i=1$, où $\operatorname{Inf}_{0\leq h\leq k} 2^h+2(k-h)=2k$. Désignons par $\{x\}$ le plus petit entier $\geq x$, de sorte que $\{x\}-1<x\leq\{x\}$. Alors :

(5.9) La N-suite de G associée à la filtration définie par $F(i,j)=i+2j$ est composée des sous-groupes $K_i=G_1^{p^{\left\{\frac{i-1}{2}\right\}}}G_2^{p^{\left\{\frac{i-2}{2}\right\}}}\dots G_j^{p^{\left\{\frac{i-j}{2}\right\}}}\dots G_i$ si p est impair, et $K_i=G_1^{2^{\left\{\frac{i}{2}\right\}}}G_2^{2^{\left\{\frac{i-2}{2}\right\}}}\dots G_j^{2^{\left\{\frac{i-j}{2}\right\}}}\dots G_i$ pour $p=2$.

Les filtrations que nous venons d'étudier vérifient, outre (5.1), la condition :

(5.10) $$F(i,0)<\infty \quad\text{et}\quad \lim_{j\to\infty}F(i,j)=\infty \qquad \text{pour tout } i\geq 1.$$

$F(i,0)<\infty$ pour tout i est la condition nécessaire et suffisante pour que la N-suite (H_i) associée à la filtration considérée soit séparante ; $\lim_{j\to\infty}F(i,j)=\infty$ est la condition pour que z^{p^h} tende vers 1 [au sens de la (H_i)-topologie] quand h tend vers ∞, quel que soit $z\in G$. Nous appellerons désormais *p-filtrations* les filtrations de $\mathfrak{A}_p$ vérifiant (5.1) et (5.10).

Théorème (5.11). — *Toutes les* N*-suites de* G *associées aux p-filtrations définissent sur G la même topologie, que nous appellerons la p-*topologie de G.

Soient, en effet, φ et φ' deux p-filtrations de $\mathfrak{A}_p$, (H_i) et (H'_i) les N-suites qui leur sont respectivement associées. Nous devons montrer que pour tout $i\geq 1$ on peut trouver un j tel que $H'_j\subset H_i$. Soit $z=\Pi_r z_r^{p^{k_r}}$ comme en (5.3). $z\in H_i$ équivaut à $k_r\geq\Phi_\varphi(i,r)$ pour $1\leq r\leq i-1$, puisque $\Phi_\varphi(i,r)=0$ pour $r\geq i$ (5.5). Or la condition (5.10), vérifiée par φ et φ', montre que $\Phi_\varphi(i,r)<\infty$ pour tous $i.r$ et que $\lim_{j\to\infty}\Phi_{\varphi'}(j,r)=\infty$ pour tout r fixe. On peut donc choisir j assez grand pour que $\Phi_{\varphi'}(j,r)\geq\Phi_\varphi(i,r)$ pour tout r, c'est-à-dire pour que $H'_j\subset H_i$.

Remarquons que les p-filtrations ne définissent pas toutes sur $\mathfrak{A}_p$ la même topologie, puisque certaines des topologies associées ne sont pas séparées [*cf.* (5.6)]. Par contre, toutes les p-filtrations *séparantes* de $\mathfrak{A}_p$ [caractérisées par $F(i,j)\leq\infty$ pour tous $i,j<\infty$] définissent sur $\mathfrak{A}_p$ une même topologie qu'on peut caractériser ainsi : on considère $\mathfrak{A}_p$ comme le produit direct de ses composantes homogènes ; on prend sur chaque composante la topologie p-adique et sur $\mathfrak{A}_p$ la topologie produit (rappelons que si l'on prenait sur chaque composante la topologie discrète on obtiendrait sur $\mathfrak{A}_p$ la topologie associée à l'ordre). Il résulte de cette interprétation que $\mathfrak{A}_p$ est complet (comme produit de groupes complets) pour la topologie associée à une p-filtration séparante [par exemple $w_p+\omega$, comme en (5.8)]. Ainsi le complété $\bar{G}_p$ de G pour sa p-topologie se trouve plongé canoniquement dans $\mathfrak{A}_p$, et c'est pour cette raison que nous avons pris comme anneau de base l'anneau des entiers p-adiques et non l'anneau des entiers rationnels.

Ce résultat s'établit plus simplement en considérant toutes les algèbres de

Magnus $\mathfrak{A}_{p^h}$ à coefficients dans Z_{p^h} (anneau des entiers mod p^h) obtenues comme quotients de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$: $\mathfrak{A}_{p^h} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}/p^h\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$. Nous avons alors le diagramme d'homomorphismes suivant :

$$\mathfrak{A}_p \leftarrow \mathfrak{A}_{p^2} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathfrak{A}_{p^h} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}},$$

qui fait apparaître $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ comme la limite projective des $\mathfrak{A}_{p^h}$. Plus précisément, si l'on prend sur chaque $\mathfrak{A}_{p^h}$ la topologie associée à l'ordre, la topologie ainsi définie sur leur limite projective $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec la topologie définie par une p-filtration séparante. Chacune des algèbres de Magnus contient une image isomorphe du groupe libre $G \subset \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$, ainsi que de son complété $\bar{G}_p$ pour la p-topologie. Les isomorphismes de ces différents groupes les uns sur les autres sont induits par les homomorphismes des algèbres $\mathfrak{A}_{p^h}$ les unes sur les autres, et il en résulte à nouveau que la limite projective $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ contient $\bar{G}_p$. L'anneau des entiers p-adiques apparaît ainsi plus naturellement comme limite projective des anneaux Z_{p^h}.

Si G a un nombre fini de générateurs, les groupes G_i/G_{i+1} sont des groupes abéliens libres de dimensions finies d_i (*cf.* Witt [33]). Alors si (H_i) est la N-suite associée à une p-filtration v, G/H_i est, pour tout i, un p-groupe fini. En effet, $G_i \subset H_i$ et une formule connue de la théorie des groupes donne, pour le calcul des indices :

$$(G:H_i) = (G_1:H_iG_2)\,(G_2:H_iG_3 \cap G_2)\ldots(G_j:H_iG_{j+1} \cap G_j)\ldots(G_{i-1}:H_i \cap G_{i-1});$$

or, d'après (5.5),

$$(G_j:H_iG_{j+1} \cap G_j) = p^{d_j\Phi_v(i,j)}.$$

Par conséquent :

$$(G:H_i) = p^{\Sigma_j d_j \Phi_v(i,j)}. \tag{5.12}$$

Le complété $\bar{G}_p$ de G peut s'identifier à la limite projective des groupes finis G/H_i (munis de la topologie discrète). Il est donc compact. Soit, d'autre part, N un sous-groupe invariant de G tel que G/N soit un p-groupe fini. Alors G/N est nilpotent ; si c est sa classe, $G_{c+1} \subset N$. Si p^h est l'ordre maximum d'un élément de G/N, $z^{p^h} \in N$ pour tout $z \in G$; donc (5.6) $G_{c+1,\,p^{h+1}} \subset N$, ce qui montre que N est un sous-groupe invariant ouvert de G. Réciproquement, tout sous-groupe invariant ouvert N de G est tel que G/N soit un p-groupe fini. Si n est le nombre des générateurs de G, on peut considérer que les p-groupes finis ayant n générateurs déterminés forment une catégorie partiellement ordonnée : si les générateurs de G_1 et G_2 sont respectivement $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$, on pose $G_1 \leqq G_2$ s'il existe un homomorphisme, nécessairement unique, de G_2 sur G_1 appliquant f_i sur e_i. Nous pouvons alors prendre la limite projective de ces p-groupes finis, qui s'identifie à $\bar{G}_p$. Le groupe compact $\bar{G}_p$ apparaît dans la théorie de Shafarevitch [32] comme le groupe de Galois de la p-extension maximale d'un corps $\mathfrak{p}$-adique ne contenant pas les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Les sous-groupes H_i d'une N-suite obtenue à partir d'une p-filtration dans un groupe libre sont entièrement définis à partir des sous-groupes G_i et de la fonction $F_v(i, j)$. Si f est un homomorphisme de G sur un groupe G', l'image directe $(f(H_i))$ de la N-suite (H_i) de G est une N-suite dans G', construite par le même procédé à partir des sous-groupes de la suite centrale descendante de G' et, par conséquent, ne dépend que de $F_v(i, j)$, et non pas de G ni de f. C'est ainsi, par exemple, que nous pouvons parler des groupes de dimension $\bmod p^h$ dans un groupe G' quelconque. Remarquons que dans le cas où G' est un p-groupe fini, les groupes de dimension $\bmod p^h$ se confondent avec les sous-groupes de la suite centrale descendante dès que h est suffisamment grand.

6. Algèbres de Lie restreintes et N-suites restreintes. — Nous nous proposons d'abord d'étudier l'anneau de Lie $\mathfrak{L}(G_{i,p})$ associé à la N-suite $(G_{i,p})$ des groupes de dimension $\bmod p$ d'un groupe libre G (p désigne comme précédemment un nombre premier fixe). La N-suite $(G_{i,p})$ est obtenue par le procédé du théorème (3.2) en plongeant G dans l'algèbre de Magnus $\mathfrak{A}_p$ (à coefficients dans le corps Z_p des entiers $\bmod p$) filtrée par l'ordre ω. L'algèbre graduée $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}_p)$, associée à l'algèbre filtrée $\mathfrak{A}_p$, s'identifie canoniquement à l'algèbre associative libre de générateurs $(x_\iota)_{\iota\in I}$ contenue dans $\mathfrak{A}_p$ (et obtenue en prenant les éléments qui n'ont qu'un nombre fini de composantes homogènes non nulles). $\mathfrak{L}(G_{i,p})$ s'identifie, d'après (3.2), à une sous-algèbre de Lie homogène de $\mathfrak{A}_p$, que nous désignerons par R. R contient déjà la sous-algèbre de Lie libre L, engendrée dans $\mathfrak{A}_p$ par les générateurs (x_ι) qui correspondent aux classes $\bmod G_{2,p}$ des générateurs $(1+x_\iota)$ de G. Plus précisément, ce sont les classes $\bmod G_{i+1,p}$ des éléments z_i de G_i tels que $w_p(G_i/G_{i+1}\,;\, z_i \bmod G_{i+1}) = 0$ qui ont pour images canoniques les éléments homogènes de degré i de L ; autrement dit, ces éléments z_i s'écrivent dans $\mathfrak{A}_p$ sous la forme $z_i = 1 + y_i + t_{i+1}$, avec $y_i \in L$, $y_i \neq 0$ et $\omega(t_{i+1}) \geqq i+1$. Alors

$$z_i^{p^k} = 1 + y_i^{p^k} + t_{ip^k+1}, \qquad \text{avec} \quad \omega(t_{ip^k+1}) \geqq ip^k + 1.$$

Il nous suffit d'appliquer (5.6) pour obtenir le :

Théorème (6.1) — *Soit $i = jp^h$, j étant premier à p. Alors les éléments homogènes de degré i de la sous-algèbre de Lie* R *de $\mathfrak{A}_p$, à laquelle nous avons identifié $\mathfrak{L}(G_{i,p})$, sont les éléments de la forme :*

$$y_{jp^h} + y'_{jp^{h-1}} + \ldots + y_{jp}^{p^{h-1}} + y_j^{p^h},$$

où y_{jp^r} désigne un élément homogène de degré jp^r appartenant à L, *sous-algèbre de Lie engendrée par les générateurs $(x_\iota)_{\iota\in I}$ dans $\mathfrak{A}_p$.*

Le fait que R soit une sous-algèbre de Lie dans un algèbre associative libre sur Z_p nous conduit à retrouver les propriétés fondamentales des algèbres de

Lie *retreintes* sur un corps de caractéristiques p, dont la théorie est due à N. Jacobson [11]. Supposons pour simplifier que les générateurs (x_ι) soient au nombre de deux, notés x et y. Alors, puisque $p+1$ n'est pas divisible par p et que $[x, y^p] \in R$, nous devons avoir $[x, y^p] \in L$. $[x, y^p]$ est homogène de degré 1 par rapport à x et de degré p par rapport à y; il ne peut donc être égal qu'à $[\ldots[[x, y], y], \ldots y]$ (p fois), multiplié par un scalaire dont on vérifie immédiatement qu'il est égal à 1. Si $ad\, y$ désigne l'endomorphisme défini par $x \to [x, y]$, nous avons :

$$ad\,(y^p) = (ad\, y)^p, \tag{6.2}$$

résultat valable dans toute algèbre associative sur un corps de caractéristique p, et d'ailleurs aisé à vérifier directement.

Considérons maintenant $x^p + y^p \in R$. D'après (6.1), il existe α et $\beta \in Z_p$, tels que $x^p + y^p - (\alpha x + \beta y)^p \in L$. En égalant les coefficients de x^p et de y^p, on obtient immédiatement $\alpha = \beta = 1$. Ainsi :

(6.3) *Identité de Jacobson* [10] :

$$(x+y)^p = x^p + y^p + \Lambda_p(x, y), \qquad \text{où} \quad \Lambda_p(x, y) \in L.$$

$\Lambda_p(x, y)$ est un élément de l'algèbre de Lie de générateurs x et y à coefficients dans Z_p. On peut donc calculer $\Lambda_p(x, y)$ dans toute algèbre de Lie sur un corps de caractéristique p. L'identité (6.3) est ainsi valable dans toute algèbre associative sur un corps de caractéristique p. (Pour un calcul plus explicite de $\Lambda_p(x, y)$, d'après un procédé de E. Artin, *cf.* Zassenhaus [35]).

A cette identité de Jacobson correspond dans un groupe une identité de P. Hall: soit G le groupe libre engendré par x et y. Alors d'après (5.6) $x^p y^p \in G_{p,p}$, ce qui implique :

$$x^p y^p = (xy)^p z_2^p \ldots z_{p-1}^p z_p, \qquad \text{où} \quad z_i \in G_i \qquad (2 \leq i \leq p). \tag{6.4}$$

Une algèbre de Lie *restreinte* $\mathfrak{L}$ sur un corps k de caractéristique p est, par définition, une algèbre de Lie telle qu'à tout élément $x \in \mathfrak{L}$ se trouve associé un élément $x^{[p]} \in \mathfrak{L}$, pour lequel $ad(x^{[p]}) = (ad\, x)^p$. Cette condition détermine univoquement $x^{[p]}$ si le centre de $\mathfrak{L}$ est réduit à (0); sinon $x^{[p]}$ est seulement déterminé modulo le centre. Nous exigerons donc de plus que $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$ pour $\lambda \in k$, et que

$$(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \Lambda_p(x, y);$$

$x^{[p]}$ est alors déterminé pour tout $x \in \mathfrak{L}$ dès qu'il est connu pour les éléments d'une base de $\mathfrak{L}$ sur k. Réciproquement, la donnée d'éléments $e_\nu^{[p]}$ tels que

$$ad(e_\nu^{[p]}) = (ad\, e_\nu)^p,$$

où e_ν parcourt les éléments d'une base de $\mathfrak{L}$ sur k détermine bien une structure d'algèbre de Lie restreinte sur k.

Une représentation linéaire *restreinte* f d'une algèbre de Lie restreinte dans une algèbre associative A devra vérifier, en plus des conditions générales d'une représentation linéaire, $f(x^{[p]}) = (f(x))^p$. On en déduit la notion d'algèbre enveloppante restreinte universelle d'une algèbre de Lie restreinte, et la construction d'une base de cette algèbre [11]. Comme dans le cas des algèbres de Lie ordinaires, on démontre que la sous-algèbre de Lie restreinte engendrée par les générateurs d'une algèbre associative libre est libre (*cf.* § 4). Nous pouvons donc énoncer le :

THÉORÈME (6.5). — *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{L}(G_{i,p})$ *associée à la* N*-suite des groupes de dimension* mod$p$ *d'un groupe libre* G *de générateur* $(x_i)_{i\in I}$ *est l'algèbre de Lie restreinte libre à coefficients entiers* mod$p$ *ayant pour générateurs les classes des* (x_i) mod $G_{2,p}$.

Définition. — Nous appellerons N-suite restreinte dans un groupe G une N-suite (H_i) telle que, pour tout $x \in H_i$, $x^p \in H_{ip}$ (p désignant toujours le même nombre premier fixe).

Nous montrerons que si (H_i) est une N-suite restreinte, $\mathfrak{L}(H_i)$ est, canoniquement, une algèbre de Lie restreinte sur Z_p [il est évident que $\mathfrak{L}(H_i)$ est une algèbre sur Z_p, puisque tout élément non nul de H_i/H_{i+1} est d'ordre p]. Démontrons d'abord un résultat qui précise (3.2).

THÉORÈME (6.6). — *Soient* A *une algèbre associative sur le corps* Z_p *des entiers* mod$p$ *possédant une unité notée* 1 *et munie d'une filtration* v; G *un groupe,* f *un homomorphisme de* G *dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de* A, *tel que* $v(f(x)-1) \geqq 1$ *pour tout* $x \in G$. *Alors la* N*-suite* (H_i), *définie en posant* $x \in H_i$ *si et seulement si* $v(f(x)-1) \geqq i$, *est une* N*-suite restreinte. Si* $\tilde{x}_i$ *désigne généralement la classe* mod H_{i+1} *de* $x_i \in H_i$, *la correspondance* $\tilde{x}_i \to \tilde{x}_i^p = \widetilde{x_i^p}$ *est bien déterminée, et définit sur* $\mathfrak{L}(H_i)$ *une structure d'algèbre de Lie restreinte sur* Z_p. *L'isomorphisme canonique de* $\mathfrak{L}(H_i)$ *dans* $\mathfrak{G}(A)$ *est en même temps une représentation restreinte.*

Démonstration. — Soit $x_i \in H_i$; alors $v(f(x_i)-1) \geqq i$. Mais

$$v(f(x_i^p)-1) = v(f(x_i)^p - 1) = v\big((f(x_i)-1)^p\big) \geqq ip.$$

Donc $x_i^p \in H_{ip}$ et (H_i) est une N-suite restreinte. Soit de plus $x_i' \in H_{ip}$; $x_i = \tilde{x}_i'$ équivaut à $v(f(x_i) - f(x_i')) \geqq i+1$. Dans ce cas,

$$f(x_i^p) - f(x_i'^p) = (f(x_i))^p - (f(x_i'))^p = \big(f(x_i') + (f(x_i) - f(x_i'))\big)^p - (f(x_i'))^p$$

et, par conséquent,

$$v(f(x_i^p) - f(x_i'^p)) \geqq ip + 1.$$

ce qui signifie que $\widetilde{x_i^p} = \widetilde{x_i}^p$, en considérant x_i^p et $x_i'^p$ comme des éléments de H_{ip}. L'application $\tilde{x}_i \to \widetilde{x_i^p} = \tilde{x}_i^p$ est donc bien déterminée, et, en appelant φ l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{L}(H_i)$ dans $\mathfrak{G}(A)$, le calcul précédent montre que $\varphi(\tilde{x}_i'^p) = (\varphi(\tilde{x}_i))^{p'}$. Ainsi $\tilde{x}_i'^p$ définit sur $\mathfrak{L}(H_i)$ une structure d'algèbre de Lie restreinte sur Z_p; on doit étendre la définition de $x^{p'}$ aux éléments non homogènes au moyen de

$$(x+y)^{p'} = x^{p'} + y^{p'} + \Lambda_p(x, y),$$

et φ est une représentation restreinte.

Toute N-suite restreinte ainsi obtenue à partir d'un homomorphisme de G dans une Z_p-algèbre associative A peut aussi s'obtenir en prenant sur l'algèbre $Z_p(G)$ du groupe G à coefficient dans Z_p l'image réciproque de la filtration de A par l'homomorphisme associé de $Z_p(G)$ dans A. Nous allons établir la réciproque de (6.6), c'est-à-dire :

Théorème (6.7). — *Toute* N*-suite restreinte de* G *peut être obtenue par le procédé du théorème* (6.6) *à partir d'une filtration convenable de* $Z_p(G)$.

D'où en appliquant (6.6), le :

Corollaire (6.8). — *Si* (H_i) *est une* N*-suite restreinte dans le groupe* G, $\mathfrak{L}(H_i)$ *est, canoniquement, une algèbre de Lie restreinte sur* Z_p *avec* $\tilde{x}_i^p = \widetilde{x_i^p}$.

Démonstration. — Soit G un groupe, (H_i) une N-suite restreinte dans G. Nous avons seulement à démontrer (6.7) dans le cas où (H_i) est séparante : il nous suffira ensuite de prendre l'image réciproque dans $Z_p(G)$ d'une filtration convenable de $Z_p(G/H)$, où $H = \bigcap_i H_i$, par l'homomorphisme canonique de $Z_p(G)$ sur $Z_p(G/H)$. Supposons donc $\bigcap_i H_i = (1)$. Pour tout $x \in G$, nous définirons $w(x)$ par $x \in H_{w(x)}$ et $x \notin H_{w(x)+1}$. Ainsi $1 \leq w(x) < \infty$, sauf si $x = 1$. Nous cherchons une filtration sur $Z_p(G)$ telle que $\varphi(x-1) = w(x)$ pour tout $x \in G$. Or, dans l'algèbre $A = Z_p(G)$, les sous-modules A_i constitués par les sommes d'élément de la forme $(z_1-1)(z_2-1)\dots(z_r-1)$, où $z_j \in G$ et $\Sigma_{j=1}^{r} w(z_j) \geq i$ définissent une filtration φ (il est évident que $A_i A_j \subset A_{i+j}$), et $\varphi(x-1) \geq w(x)$ pour $x \in G$. Si φ' est une filtration de A vérifiant $\varphi'(x-1) \geq w(x)$ pour tout $x \in G$, on a $\varphi'(y) \geq \varphi(y)$ pour tout $y \in A$. Nous sommes donc ramené à démontrer que $\varphi(x-1) = w(x)$ pour tout $x \in G$.

Choisissons une famille (x_ι) d'éléments de G, où ι parcourt l'ensemble bien ordonné I, possédant les propriétés suivantes : si $w(x_\iota) < w(x_\lambda)$, on a $\iota < \lambda$; les classes $\bmod H_{i+1}$ des x_ι tels que $w(x_\iota) = i$ forment une base du Z_p-module H_i/H_{i+1} pour tout entier $i \geq 1$. Pour construire une telle famille, il suffit de prendre, pour chaque i, une famille de représentants d'une base bien ordonnée de H_i/H_{i+1}, et d'ordonner leur réunion en accord avec la première condition.

Nous supposons désormais que la N-suite restreinte (H_i) est finie, c'est-à-dire que $H_n=(1)$ pour un certain entier n. Alors tout élément z de G s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$z=x_{\iota_1}^{\alpha_1}x_{\iota_2}^{\alpha_2}\dots x_{\iota_r}^{\alpha_r}, \qquad \text{avec} \quad \iota_1<\iota_2<\dots<\iota_r \quad \text{et} \quad 0\leq\alpha_s\leq p-1 \quad (\text{pour } 1\leq s\leq r).$$

La démonstration procède par récurrence modG_i [*cf.* (5.3)]. Nous écrivons $z=\Pi_\iota x_\iota^{h_\iota}$, où tous les h_ι sont nuls, sauf pour $\iota=\iota_1, \dots, \iota_r$ et où $0\leq h_\iota\leq p-1$. Les facteurs sont ordonnés dans l'ordre croissant, de gauche à droite. Montrons qu'une base de A sur Z_p est constituée par les éléments $\Pi_\iota(x_\iota-1)^{h_\iota}$, où les familles d'exposants $(h_\iota)_{\iota\in I}$ sont caractérisées par $0\leq h_\iota\leq p-1$ pour tout ι et $h_\iota=0$ sauf pour un nombre fini d'indices ι. En écrivant

$$x_\iota^{h_\iota}=\big(1+(x_\iota-1)\big)^{h_\iota}=\Sigma_{r=0}^{h_\iota}\binom{h_\iota}{r}(x_\iota-1)^r,$$

et en remplaçant chaque $x_\iota^{h_\iota}$ par son développement dans le produit $z=\Pi_\iota x_\iota^{h_\iota}$, nous voyons que tout $z\in G$ est une combinaison linéaire des $\Pi_\iota(x_\iota-1)^{h_\iota}$ qui engendrent donc A. D'autre part, $\Sigma_{(h_\iota)}a_{(h_\iota)}\Pi_\iota(x_\iota-1)^{h_\iota}$ (où tous les $a_{(h_\iota)}$ sont nuls sauf un nombre fini) ne peut être nul que si les coefficients $a_{(h_\iota)}\in Z_p$ sont nuls. En effet, ordonnons lexicographiquement les familles (h_ι), c'est-à-dire, posons $(h_\iota)<(k_\iota)$ s'il existe $\lambda\in I$ tel que $h_\iota=k_\iota$ pour $\iota<\lambda$, et $h_\lambda<k_\lambda$. Alors, parmi les familles (h_ι) telles que $a_{(h_\iota)}\neq 0$, il existe un maximum, soit (k_ι), et l'on voit que, rapportée à la base de A constituée par les éléments de G, la composante de $\Sigma_{(h_\iota)}a_{(h_\iota)}\Pi_\iota(x_\iota-1)^{h_\iota}$ suivant $\Pi_\iota x_\iota^{k_\iota}$ est $a_{(k)}\neq 0$.

Convenons d'appeler « représentation » de $y\in A$ une égalité de la forme

$$y=\Sigma(z_1-1)\dots(z_r-1),$$

où Σ est le symbole d'une sommation finie, et où tous les z_s appartiennent à G; la « filtration apparente » de cette représentation sera, par définition, le nombre $\mathrm{Inf}\big(\Sigma_{s=1}^r w(z_s)\big)$, la borne inférieure étant prise pour tous les termes de la somme. Alors, si nous supposons $v(y)\geq 1$, $v(y)$ est égal à la borne supérieure des filtrations apparentes de toutes les représentations de y. Si nous exprimons y comme une combinaison linéaire des éléments basiques $\Pi(x_\iota-1)^{h_\iota}$, nous obtenons une représentation de y que nous appellerons représentation réduite. Nous allons montrer que $v(y)$ coïncide avec la filtration apparente de la représentation réduite de y. Il en résultera bien $w(z)=v(z-1)$ pour tout $z\in G$; si, en effet, $z=\Pi_\iota x_\iota^{h_\iota}$, il existe au moins un ι, soit λ tel que $h_\lambda\neq 0$ et que $w(x_\lambda)=w(z)$. Or la représentation réduite de z contient le terme $h_\lambda(x_\lambda-1)$ et, par conséquent

$$v(z-1)\leq w(z), \qquad \text{donc} \quad v(z-1)=w(z).$$

Nous voulons montrer qu'on peut passer d'une représentation quelconque à la représentation réduite sans diminuer la filtration apparente. Supposons ce résultat vrai pour toutes les représentations $\Sigma\big(\Pi(z-1)\big)$ où tous les $z\in G$ qui

apparaissent explicitement, sont contenus dans H_{i+1}. Nous allons le démontrer en remplaçant H_{i+1} par H_i [notre hypothèse de récurrence est vérifiée pour $i+1=n$, puisque $H_n=(1)$]. Si la proposition était fausse, il existerait un produit $(z_1-1)\dots(z_r-1)$, où $w(z_s)\geq i\ (1\leq s\leq r)$, dont la filtration apparente diminuerait quand on passe à sa représentation réduite. Si nous remplaçons chaque facteur $(z-1)$ pour lequel $w(z)=i$ par sa représentation réduite, nous voyons qu'on pourrait trouver un produit de la forme

$$P_1(x_{i_1}-1)\,P_2(x_{i_2}-1)\dots(x_{i_k}-1)\,P_{k+1},$$

où les P_s représentent des produits (éventuellement vides) de facteurs $(z-1)$, avec $z\in H_{i+1}$, $w(x_{i_s})=i$ pour $1\leq s\leq k$, la filtration apparente du produit étant strictement supérieure à celle de sa représentation réduite. Raisonnons maintenant par récurrence sur k (pour $k=0$ la proposition est vraie par l'hypothèse de récurrence précédente). Montrons d'abord qu'il est possible de se ramener à un produit de la forme $(x_{i_1}-1)\dots(x_{i_k}-1)\,P$, où P désigne un produit de $(z-1)$, avec $z\in H_{i+1}$. Il suffira pour cela d'appliquer un certain nombre de fois l'identité :

$$(z-1)(x-1)=(x-1)(x^{-1}zx-1)+(x^{-1}zxz^{-1}-1)(z-1)+(x^{-1}zxz^{-1}-1),$$

en tenant compte des relations

$$w(x^{-1}zx)=w(z),\qquad w(x^{-1}zxz^{-1}-1)\geq w(z)+w(x),$$

et de l'hypothèse de récurrence sur k. Ensuite, nous passerons à un produit de la forme $(x_{i_1}-1)\dots(x_{i_k}-1)\,P'$, où les facteurs $(x_{i'}-1)$ sont les facteurs (x_i-1) précédents, rangés dans l'ordre croissant de leurs indices, et où P' est un produit de $(z-1)$ avec $z\in H_{i+1}$. Il suffira pour cela d'appliquer un certain nombre de fois l'identité

$$\begin{aligned}(x_2-1)(x_1-1)&=(x_1-1)(x_2-1)\\&\quad+\big((x_1-1)(x_2-1)+(x_1-1)+(x_2-1)+1\big)(x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1-1).\end{aligned}$$

Nous parvenons donc à un produit de la forme $(x_{i'_1}-1)^{\alpha_1}\dots(x_{i'_r}-1)^{\alpha_r}P''$, où $\Sigma\alpha_s=k$, et où P'' désigne un produit de facteurs $(z-1)$, avec $z\in H_{i+1}$. Si tous les $\alpha_s\ (1\leq s\leq r)$ sont inférieurs à p, il suffit de réduire P'' pour parvenir à la représentation réduite du produit sans abaisser la filtration apparente. Sinon, il existe un indice s tel que $\alpha_s\geq p$. Nous pouvons alors remplacer $(x_{i'_s}-1)^{\alpha_s}$ par $(x_{i_s}-1)^{\alpha_s-p}(x_{i'_s}^{p}-1)$, ce qui diminue de p le nombre de facteurs (x_i-1) sans abaisser la filtration apparente, puisque $w(x_i^p)\geq p_i$ [c'est ici qu'apparaît essentiellement la condition que (H_i) est une N-suite restreinte]. Nous avons donc achevé la démonstration de la récurrence sur k; il en résulte la démonstration de la récurrence sur i, et la proposition est démontrée pour les N-suites finies. Remarquons que w est une filtration séparante sur $A=Z_p(G)$, mais que A ne peut être complet pour la topologie associée que si G est fini : en effet,

les éléments du complété $\overline{A}$ de A s'identifient canoniquement aux séries $\Sigma_{(h_\iota)} a_{(h_\iota)} \Pi_\iota (x_\iota - 1)^{h_\iota}$ qui convergent formellement (c'est-à-dire qui n'ont qu'un nombre fini de termes de filtration $\leq k$ pour tout entier k).

Soit maintenant G un groupe, (H_i) une N-suite restreinte séparante dans G. Nous introduisons dans $A = Z_p(G)$ la filtration φ précédemment définie et la topologie associée. Montrons d'abord que φ est séparante. Pour cela, considérons les groupes G/H_n munis des N-suites restreintes finies $(H_i/H_n)_{(1 \leq i \leq n)}$, leurs algèbres $A_n = Z_p(G/H_n)$ munies des filtrations φ_n définies à partir de ces N-suites, et enfin les homomorphismes canoniques φ_n de A sur A_n. On établit sans peine que $\varphi_n\big(\varphi_n(y)\big) \geq \varphi(y)$ pour tout $y \in A$ [considérer une représentation de y dont la filtration apparente est $\varphi(y)$]. Si $y \neq 0$, il existe un entier n pour lequel $\varphi_n(y) \neq 0$; en effet, si $y = \Sigma_{i=1}^{r} a_i z_i$, $z_i \in G$, il existe un indice n pour lequel tous les z_i sont distincts modulo H_n, ce qui entraîne $\varphi_n(y) \neq 0$. Alors $\varphi_n\big(\varphi_n(y)\big) < \infty$ et, *a fortiori*, $\varphi(y)$ est fini. Considérons dans A les éléments $\Pi_\iota (x_\iota - 1)^{h_\iota}$ où les familles $(h_\iota)_{\iota \in I}$ vérifient les conditions précédentes : tous les h_ι sont compris entre 0 et $(p-1)$ inclus, et sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Ces éléments sont encore linéairement indépendants (même démonstration). Soit $z \in G$; on peut écrire, d'une seule manière, $z = \Pi_\iota x_\iota^{u_\iota}$, où $0 \leq u_\iota \leq (p-1)$ pour tout $\iota \in I$, et où les u_ι non nuls tels que $w(x_\iota) \leq k$ sont en nombre fini pour tout entier k. Le produit $\Pi_\iota x_\iota^{u_\iota}$ converge dans G pour la (H_i)-topologie, ainsi que dans l'algèbre A pour la topologie associée à φ. Il en résulte que tout élément de G, donc de A, peut être représenté, par une série convergente $\Sigma_{(h_\iota)} a_{(h_\iota)} \Pi_\iota (x_\iota - 1)^{h_\iota}$, où $a_{(h_\iota)} \in Z_p$: il suffit de remplacer, dans $\Pi_\iota x_\iota^{u_\iota}$, chaque $x_\iota^{u_\iota}$ par son développement $\big(1 + (x_\iota - 1)\big)^{u_\iota}$. Si $\Sigma_{(h_\iota)} a_{(h_\iota)} \Pi_\iota (x_\iota - 1)^{h_\iota}$ converge dans A vers y, $\varphi(y) = \mathrm{Inf}\big(\Sigma_\iota w(h_\iota) h_\iota\big)$, la borne inférieure étant prise pour toutes les suites (h_ι) telles que $a_{(h_\iota)} \neq 0$. Posons, en effet,

$$c = \mathrm{Inf}\big(\Sigma_\iota w(h_\iota) h_\iota\big); \qquad \text{alors} \quad \varphi(y) \geq c.$$

Mais, d'après l'étude faite dans le cas des N-suites finies, nous pouvons choisir n assez grand pour que $\varphi_n\big(\varphi_n(y)\big) = c$. Alors

$$c = \varphi_n\big(\varphi_n(y)\big) \geq \varphi(y), \qquad \text{d'où} \quad \varphi(y) = c.$$

Comme précédemment, nous en déduisons que $\varphi(z-1) = w(z)$ pour $z \in G$, ce qui achève la démonstration de (6.7).

La topologie induite sur G par la topologie de A est sa (H_i)-topologie. Il en résulte que le complété $\overline{A}$ de A contient canoniquement le complété $\overline{G}$ de G. Montrons que $\overline{A}$ contient l'algèbre $Z_p(\overline{G})$, c'est-à-dire que les éléments de $\overline{G}$ sont linéairement indépendants dans $\overline{A}$. En effet, l'homomorphisme canonique φ_n de $Z_p(G) = A$ sur $Z_p(G/H_n)$ se prolonge en un homomorphisme $\overline{\varphi}_n$ de $\overline{Z_p(G)} = \overline{A}$ sur $\overline{Z_p(G/H_n)}$. Alors, si $z \in \overline{G}$, $z' \in G$, $zz'^{-1} \in \overline{H}_n$, on a $\overline{\varphi}_n(z) = \varphi_n(z')$. Si $\Sigma_{s=1}^{r} \alpha_s z_s$

est combinaison linéaire finie d'éléments de $\overline{G}$ à coefficients non nuls dans Z_p, on peut trouver un entier n et des éléments z'_s de G tels que

$$z_s^{-1} z'_s \in H_n, \qquad z'_s (z'_{s'})^{-1} \notin H_n \qquad (\text{pour } 1 \leq s, s' \leq r,\ s \neq s').$$

Alors

$$\varphi_n(\Sigma \alpha_s z_s) = \Sigma \alpha_s \varphi_n(z_n) = \Sigma \alpha_s \varphi_n(z'_s) \neq 0;$$

ainsi $\Sigma \alpha_s z_s \neq 0$, ce qui montre que les éléments de $\overline{G}$ sont linéairement indépendants dans $\overline{A}$. Nous pouvons donc préciser le théorème (6.7) :

THÉORÈME (6.9). — *Soit, dans le groupe G, une* N*-suite restreinte séparante* (H_i). *Définissons la fonction* $v(y)$ *dans* $Z_p(G)$ *comme la borne inférieure des* $v'(y)$, *où* v' *parcourt toutes les filtrations de* $Z_p(G)$ *telles que* $v'(z-1) \geq i$ *si* $z \in H_i$. *Alors* v *est une filtration séparante dans* $Z_p(G)$, $z \in H_i$ *si et seulement si* $v(z-1) \geq i$ (*en supposant* $z \in G$), *et le complété* $\overline{Z_p(G)}$ *de* $Z_p(G)$ *pour la topologie associée à* v *contient canoniquement* $Z_p(\overline{G})$, $\overline{G}$ *désignant le complété de* G *pour la* (H_i)*-topologie.*

Parmi les N-suites restreintes d'un groupe quelconque G, celle constituée par les groupes de dimension modulo p, $(G_{i,p})$, est celle qui « décroît le plus vite » : si (H_i) est une N-suite restreinte, $H_i \supset G_{i,p}$ pour tout i [d'après (5.6) et la définition des N-suites restreintes]. L'algèbre $\mathfrak{L}(G_{i,p})$ est, en tant qu'algèbre de Lie restreinte, engendrée par ses éléments de degré 1 et l'on peut sans difficulté démontrer une réciproque analogue au théorème (2.5). La N-suite $(G_{i,p})$ peut être obtenue au moyen de la filtration v du théorème (6.8) sur l'algèbre $Z_p(G)$; v est dans ce cas la borne inférieure des filtrations v' telles que $v'(z-1) \geq 1$ pour tout $z \in G$ [ce résultat est exact même si $(G_{i,p})$ n'est pas séparante]. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME (6.10). — *On obtient les groupes de dimension modulo p d'un groupe quelconque* G *en filtrant l'algèbre* $Z_p(G)$ *par les puissances de l'idéal engendré dans* $Z_p(G)$ *par les éléments* $z-1$, *où* $z \in G$.

Dans le cas où G est un p-groupe fini, ce théorème est dû à S. A. Jennings [12]. Nous allons en faire usage pour étudier la structure des algèbres de Magnus.

Considérons le groupe libre G de générateurs $(e_\nu)_{\nu \in N}$. Nous introduisons sur $Z_p(G)$ la filtration v associée, comme en (6.9) aux groupes de dimension mod$p$, $(G_{i,p})$. Nous allons montrer que l'algèbre complétée $\overline{Z_p(G)}$ s'identifie canoniquement à l'algèbre de Magnus de générateurs $(e_\nu - 1)_{\nu \in N}$ et à coefficients dans Z_p. Considérons, en effet, l'algèbre de Magnus $\mathfrak{A}_p$ à coefficients dans Z_p, de générateurs $(x_\nu)_{\nu \in N}$ (en correspondance biunivoque avec les générateurs e_ν de G). L'isomorphisme canonique de G dans $\mathfrak{A}_p$ se prolonge en un homomorphisme ψ de $Z_p(G)$ dans $\mathfrak{A}_p$, avec $\psi(e_\nu) = 1 + x_\nu$ pour tout $\nu \in N$. D'autre part, ω désignant comme précédemment l'ordre dans $\mathfrak{A}_p$, $\omega(\psi(y)) \geq v(y)$ pour

tout $\gamma \in Z_p(G)$, puisque $\omega(\psi(\gamma))$ définit sur $z_p(G)$ une filtration à laquelle est associée, par définition, la N-suite $(G_{i,p})$ [th. (6.9)]. Désignons par G_0 le semi-groupe multiplicatif engendré par les (e_ν) et l'unité dans G. Nous pouvons identifier l'algèbre $Z_p(G_0)$ à une sous-algèbre de $Z_p(G)$: $Z_p(G_0) \subset Z_p(G)$. La restriction de ψ à $Z_p(G_0)$ est un isomorphisme, puisque $\psi(Z_p(G_0))$ est la sous-algèbre avec unité engendrée par les (x_ν) dans $\mathfrak{A}_p$, qui est libre par définition. Mais ω est évidemment la plus petite filtration de $\psi(Z_p(G_0))$ pour laquelle $\omega(x_\nu) \geqq 1$ pour tout $\nu \in N$. Donc, pour tout $y \in Z_p(G_0)$,

$$\omega(\psi(y)) \leqq \varphi(y) \qquad \text{et ainsi} \qquad \omega(\psi(y)) = \varphi(y).$$

Remarquons que $Z_p(G_0)$ est dense dans $Z_p(G)$, ce qui résulte, par exemple, des relations $\lim_{r \to \infty} e_\nu^{p^{r-1}} = e_\nu^{-1}$ dans $Z_p(G)$. La complétée $\overline{Z_p(G_0)}$ s'identifie donc à $\overline{Z_p(G)}$. Alors l'isomorphisme de $Z_p(G_0)$, qui transforme la filtration φ en la filtration ω, se prolonge canoniquement en un isomorphisme $\bar{\psi}$ des algèbres complétées $(\bar{\psi} : \overline{Z_p(G)} = \overline{Z_p(G_0)} \to \mathfrak{A}_p)$; $\bar{\psi}$ coïncide évidemment avec ψ sur $Z_p(G)$. Nous avons donc identifié $Z_p(G)$ et $\mathfrak{A}_p$, avec correspondance des filtrations φ et ω. Nous allons en déduire le :

Théorème (6.11). — *Si l'on considère le groupe libre* G *et son complété* $\overline{G}_p$ *pour sa p-topologie plongés canoniquement dans les anneaux de Magnus* $\mathfrak{A}_{p^h}$ *et* $\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}$ *à coefficients entiers* mod p^h (*resp. entiers p-adiques*), *l'algèbre du groupe* $\overline{G}_p$ *à coefficients entiers* mod p^h (*resp. entiers p-adiques*) *est représentée fidèlement dans* $\mathfrak{A}_{p^h}$ (*resp.* $\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}$).

Corollaire (6.12). — *L'algèbre* $Z(\overline{G})$ *du groupe* $\overline{G}$ *complété de* G *pour la topologie associée à sa suite centrale descendante est représentée fidèlement dans l'anneau de Magnus correspondant* $\mathfrak{A}$, *à coefficients entiers rationnels.*

Démonstration. — Nous venons d'établir (6.11) pour le cas où $h = 1$. Soit

$$z = \Sigma_{s=1}^{r} \alpha_s z_s, \qquad \text{où} \quad z \in \mathfrak{A}_{p^h}, \quad \alpha_s \in Z_{p^h}, \quad \alpha_s \neq 0, \quad z_s \in \overline{G}_p,$$

les z_s étant tous distincts $(1 \leqq s \leqq r)$. Si $k = \operatorname{Inf}_{1 \leqq s \leqq r} w_p(\alpha_s)$, on a

$$0 \leqq k \leqq h - 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_s = p^k \alpha'_s,$$

les α'_s n'étant pas tous nuls mod p. L'image de $z' = \Sigma_{s=1}^{r} \alpha'_s z_s$ par l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}_{p^h}$ sur $\mathfrak{A}_p$ n'est pas nulle, ce qui peut s'énoncer : $w_p(z') = 0$, et par conséquent $w_p(z) = k < \infty$, donc $z \neq 0$, c'est-à-dire (6.11). La même démonstration reste valable pour l'algèbre de Magnus $\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}$

Les sous-groupes G_i de la suite centrale descendante de G sont *fermés* pour la p-topologie de G [*cf.* (5.6)], ce qui permet d'identifier $\overline{G}$ à un sous-groupe

de G_p. Des identifications canoniques évidentes montrent qu'une relation de dépendance linéaire entre éléments de G dans $\mathfrak{A}$ aurait pour conséquence une relation de dépendance linéaire entre éléments de G_p dans $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$, contrairement à (6.11), d'où (6.12). Si l'on se restreint aux éléments de G, on voit que Z(G) est plongé canoniquement dans $\mathfrak{A}$, ce qui constitue le « théorème d'unicité pour les développements en séries de puissances » de R. H. Fox [5].

Le théorème (6.11) peut être précisé en considérant certaines bases dans $\mathfrak{A}_{p^h}$ et dans $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$. Reprenons les notations introduites dans la démonstration de (6.7) : G désigne maintenant un groupe libre, $(H_i) = (G_{i,p})$ ses groupes de dimension mod p; $\overline{Z_p(G)}$ s'identifie, comme nous l'avons vu, à $\mathfrak{A}_p$. Les éléments basiques $\Pi_t(x_t - 1)^{h_t}$ peuvent être considérés dans toutes les algèbres de Magnus $\mathfrak{A}_{p^h}$ et dans $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$. Démontrons que les séries $\Sigma_{(h_t)} a_{(h_t)} \Pi_t (x_t - 1)^{h_t}$ convergent dans $\mathfrak{A}_{p^h}$ et en représentent univoquement tous les éléments si les conditions suivantes sont bien remplies : $a_{(h_t)} \in Z_{p^h}$ pour toute suite (h_t) et les $a_{(h_t)}$ non nuls tels que $\Sigma_t h_t w(x_t) \leqq k$ sont en nombre fini pour tout entier k. Établissons d'abord la convergence; nous désignons par ω_{p^h} l'ordre dans $\mathfrak{A}_{p^h}$. Montrons que les coefficients $a_{(h_t)}$ non nuls pour lesquels $\omega_{p^h}\left(\Pi_t (x_t - 1)^{h_t}\right) \leqq k$ sont en nombre fini pour tout entier k. Nous n'avons à considérer que les familles (h_t) pour lesquelles $\Sigma_t h_t \leqq k$ [puisque $\omega_{p^h}(z - 1) \geqq 1$ pour tout $z \in G$], et nous avons, par hypothèse,

$$\Sigma_t h_t \, w(x_t) \geqq k(k+1) p^{h-1}$$

pour tous les $a_{(h_t)} \neq 0$, à l'exception d'un nombre fini entre eux. Mais $\Sigma_t h_t \leqq k$ et $\Sigma_t h_t \, w(x_t) \geqq k(k+1) p^{h-1}$ impliquent qu'il existe au moins un x_t avec $h_t \neq 0$ et $w(x_t) \geqq (k+1) p^{h-1}$. Alors $x_t \in G_{(k+1)p^{h-1}, p} \subset G_{k+1, p^h}$ [d'après (5.7)], et $\omega_{p^h}(x_t - 1) \geqq (k+1)$. *A fortiori* $\omega_{p^h}\left(\Pi_t (x_t - 1)^{h_t}\right) \geqq k+1$. La convergence des séries étudiées est donc établie. Le fait qu'une série $\Sigma_{(h_t)} a_{(h_t)} \Pi_t (x_t - 1)^{h_t}$ ne peut être nulle que si tous les $a_{(h_t)}$ sont nuls s'établit en posant

$$k = \mathrm{Inf}_{(h_t)} w_p(a_{(h_t)}), \qquad a_{(h_t)} = p^k a'_{(h_t)},$$

et en utilisant l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}_{p^h}$ sur $\mathfrak{A}_p$, comme dans la démonstration de (6.11). Enfin, tout $y \in \mathfrak{A}_{p^h}$ peut être mis sous la forme $\Sigma_{(h_t)} a_{(h_t)} \Pi_t (x_t - 1)^{h_t}$: en appliquant toujours l'homomorphisme de $\mathfrak{A}_{p^h}$ sur $\mathfrak{A}_p$, nous construisons une série y_1 du type considéré, qui approche $y \bmod p$, puis nous commençons la construction pour $y' \in \mathfrak{A}_{p^h}$ tel que $y = y_1 + p y'$, ... Finalement, nous obtenons y sous la forme $y_1 + p y_2 + \ldots + p^{h-1} y_p$, les y_s étant des séries du type considéré.

Si nous considérons $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ comme la limite projective des algèbres de Magnus $\mathfrak{A}_{p^h}$ avec, bien entendu, la topologie correspondante, les résultats précédents restent valables, à ceci près qu'il est nécessaire, pour obtenir tous les éléments de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ de remplacer la condition « les $a_{(h_t)}$ non nuls tels que $\Sigma_t h_t \, w(x_t) \leqq k$ sont en nombre fini pour tout entier k » par la condition moins forte « les $a_{(h_t)}$ non nuls tels que $\Sigma_t h_t \, w(x_t) \leqq k$ et $w_p(a_{(h_t)}) \leqq k$ sont en nombre fini pour tout entier k ». Nous pouvons unifier ces énoncés en exigeant seulement que les séries convergent dans l'algèbre considérée.

Si nous étions partis d'une N-suite restreinte séparante de G distincte de $(G_{i,p})$, ces derniers résultats resteraient valables. Mais l'isomorphisme entre $\overline{Z_p(G)}$ filtré à partir de la N-suite considérée (6.8) et $\mathfrak{A}_p$ n'identifierait plus les filtrations.

Déterminons maintenant les anneaux de Lie $\mathfrak{L}(G_{i,p^h})$ associés aux groupes de

dimension modp^h d'un groupe libre G($h > 1$). Ce sont des algèbres de Lie graduées sur Z_{p^h}, qui peuvent être plongées canoniquement dans l'algèbre associative libre contenue dans l'algèbre de Magnus $\mathfrak{A}_{p^h}$ (dont les générateurs sont en correspondance biunivoque avec ceux de G). Comme au début de ce paragraphe, nous désignons par L la sous-algèbre de Lie libre contenue dans $\mathfrak{A}_{p^h}$, et par R la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{A}_{p^h}$ identifiée à $\mathfrak{L}(G_{t,p^h})$. Alors $L \subset R$ et la forme générale d'un élément de degré jp^k [où $(j, p) = 1$] de R est :

$$y_{jp^k} + p^{h-1} y_{jp^{k-1}}^{p} + \ldots + p^{h-1} y_j^{p^k}, \tag{6.13}$$

où y_i désigne généralement un élément homogène de degré i de L. Il suffit, en effet, de reprendre le raisonnement qui nous a conduit à (6.1), en remplaçant l'identité

$$(1+x)^{p^k} \equiv 1 + x^{p^k} \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

par l'identité

$$(1+x)^{p^{k+h-1}} \equiv (1+x^{p^k})^{p^{h-1}} \qquad (\mathrm{mod}\, p^h).$$

Nous sommes conduits à considérer R comme une algèbre de Lie « restreinte » sur l'anneau Z_{p^h}, où l'opération $x \to x^{[p]}$ vérifiant $(ad\, x)^p = \big(ad(x^{[p]})\big)$ n'est définie que pour les éléments x tels que $px = 0$; ces éléments constituent évidemment un idéal, dans lequel l'identité de Jacobson (6.3) s'applique. Avec la définition des Z_{p^h}-algèbres de Lie restreintes qui se présente ainsi naturellement, $\mathfrak{L}(G_{t,p^h})$ est caractérisé comme une Z_{p^h}-algèbre de Lie restreinte libre.

Indiquons enfin la structure de l'anneau de Lie $\mathfrak{L}(H_i)$, où (H_i) est la N-suite déterminée dans le groupe libre plongé dans $\mathfrak{A}_p$ par la filtration $v = \omega + w_p$ (5.8). $\mathfrak{L}(H_i)$ s'identifie à une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}_p)$, algèbre associative graduée associée à l'algèbre de Magnus $\mathfrak{A}_p$ filtrée par v. Pour tout entier $k \geq 0$, la composante homogène de degré k de $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}_p)$ s'identifie canoniquement à la somme directe des composantes homogènes de degré $\leq k$ de $\mathfrak{A}_p$ (ou de $\mathfrak{A}_p$ réduit mod$p$) : un élément $y \in \mathfrak{A}_p$ tel que $v(y) \geq k$ possède une décomposition homogène de la forme

$$y = p^k y_0 + p^{k-1} y_1 + \ldots + y_k + \ldots,$$

et nous lui faisons correspondre $y'_0 + y'_1 + \ldots + y'_k$ les composantes y'_i étant les images des y_i par l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}_p$ sur $\mathfrak{A}_p$. $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}_p)$ se trouve ainsi naturellement bigradué. Cette identification de $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}_p)$ permet, en utilisant (5.8), de déterminer la structure de $\mathfrak{L}(H_i)$: la composante homogène de degré j de $\mathfrak{L}(H_i)$ est canoniquement isomorphe à la somme des composantes homogènes de degré $\leq j$ d'une algèbre de Lie libre sur Z_p dont les générateurs sont en correspondance biunivoque avec ceux de G. Plus précisément, si p est un nombre premier impair, G le groupe libre de générateurs $(x_\iota)_{\iota \in I}$, L l'algèbre de Lie libre (non restreinte) de générateurs $(y_\iota)_{\iota \in I}$ sur Z_p. (H_i) la N-suite de G définie par (5.8), et pour tout entier $i \geq 1$, L_i le sous-module de L constitué

par les éléments dont les composantes homogènes de degré $> i$ sont nulles, nous pouvons, d'une seule manière, définir des applications φ_i de H_i dans L ($i = 1, 2, \ldots$) vérifiant les conditions suivantes : si $x_i \in H_i$, $\varphi_i(x_i)$ ne dépend que de la classe de $x_i \bmod H_{i+1}$, et définit ainsi une application déterminée $\tilde{\varphi}_i$ de H_i/H_{i+1} dans L; $\tilde{\varphi}_i$ est un isomorphisme de H_i/H_{i+1} sur L_i; si $x_i \in H_i$, $x_j \in H_j$,

$$\varphi_{i+j}\big((x_i, x_j)\big) = [\varphi_i(x_i), \varphi_j(x_j)];$$

si $x_i \in H_i$, $x_i^p \in H_{i+1}$ et

$$\varphi_i(x_i) = \varphi_{i+1}(x_i^p);$$

enfin $\varphi_1(x_\iota) = y_\iota$ pour tout $\iota \in I$. Ce résultat doit être légèrement modifié pour $p = 2$.

7. Les groupes de dimension modulo n. — Si n est un entier ≥ 2 quelconque, on obtient la N-suite $(G_{i,n})$ des groupes de dimension modulo n du groupe libre G en considérant l'algèbre de Magnus correspondante $\mathfrak{A}_n$ à coefficients dans l'anneau Z_n des entiers modulo n. Nous pouvons aussi considérer l'algèbre de Magnus $\mathfrak{A}$ à coefficients entiers rationnels, et définir $(G_{i,n})$ à partir de la filtration v_n, image réciproque de l'ordre ω_n par l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}_n$. Si $n = p_1^{h_1} \ldots p_r^{h_r}$ est la décomposition de n en facteurs premiers distincts, $v_n(y) = \inf_{1 \leq s \leq r} v_{p_s^{h_s}}(y)$, pour tout $y \in \mathfrak{A}$ (cela résulte du fait qu'un entier est divisible par n si et seulement s'il est divisible par tous les $p_s^{h_s}$). Nous en déduisons immédiatement :

$$G_{i,n} = \bigcap_{1 \leq s \leq r} G_{i, p_s^{h_s}}, \tag{7.1}$$

ce qui ramène l'étude de la N-suite $(G_{i,n})$ aux suites (G_{i,p^h}) déjà étudiées.

Nous pouvons indiquer la forme générale des éléments de $G_{i,n}$ en modifiant légèrement la représentation des éléments de G donnée par le lemme (5.3) :

Lemme (7.2). — *Tout élément* Z *de* G *peut être représenté par un produit* [*convergeant au sens de la topologie associée à la suite centrale descendante* (G_i)] $z = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_i^{k_i} \ldots$, *tel que, pour tout* i, $z_i \in G_i$ *et que : ou bien* $z_i = 1$, *ou bien la classe* $\tilde{z}_i$ *de* $z_i \bmod G_{i+1}$ *puisse figurer parmi les éléments d'une base du groupe abélien libre* G_i/G_{i+1}.

Cette dernière condition est équivalente à $w_p(z_i) = 0$ dans G_i/G_{i+1} pour tout nombre premier p. Les éléments z_i et leurs exposant k_i sont choisis successivement comme dans la démonstration de (5.3). Alors :

Théorème (7.3). — *Si* $z = \Pi_i z_i^{k_i}$ *comme en* (7.2), $z \in G_{j,n}$ *si et seulement si* $ip_s^{[w_{p_s}(k_i) - h_s + 1)^+} \geq j$, *pour tout* $i \geq 1$ *et tout* s $(1 \leq s \leq r)$.

Il suffit, en effet, d'appliquer (7.1) et (5.7) en remarquant que, si l'on

pose $z_i' = z_i^{k_i/p^{w_p(k_i)}}$, $z = \Pi_i z_i'^{p^{w_p(k_i)}}$ est une représentation de z vérifiant les conditions de (5.3).

Nous pourrions de même généraliser les p-filtrations (§ 5) en considérant les filtrations de $\mathfrak{A}$ qui ne dépendent que des propriétés de divisibilité des composantes homogènes.

La topologie de G définie par la N-suite $(G_{i,n})$ est la moins fine parmi les topologies de G plus fines que toutes les p_s-topologies $(1 \leq s \leq r)$. Remarquons que les diverses p-topologies du groupe G sont indépendantes, comme le sont les diverses valuations d'un corps. Plus précisément :

Théorème (7.4). — *Soient $p_s (1 \leq s \leq r)$ des nombres premiers distincts, H_s des voisinages de l'unité dans G, pour les p_s-topologies respectives, z_s des éléments quelconques de G. Il existe alors $z \in G$ tel que $z_s z^{-1} \in H_s$ pour $1 \leq s \leq r$.*

Nous pouvons, en effet, supposer que les parties H_s sont des sous-groupes invariants contenant toutes les puissances $z_s^{p^{n_s}}$ où $z \in G$, n_s désignant des entiers convenablement choisis. Il suffit alors de déterminer des entiers α_s tels que $\alpha_s \equiv 1 \pmod{p_s^{n_s}}$ et $\alpha_s \equiv 0 \pmod{p_s^{n_{s'}}}$, pour $1 \leq s, s' \leq r$, $s \neq s'$ et de prendre $z = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_s^{\alpha_s}$.

Enfin, l'anneau de Lie $\mathfrak{L}(G_{i,n})$ est le produit direct des $\mathfrak{L}(G_{i,p_s^{h_s}})$ pour $1 \leq s \leq r$. En effet, $\mathfrak{A}_n$ est le produit direct des anneaux de Magnus $\mathfrak{A}_{p_s^{h_s}}$, ce qui montre que $\mathfrak{L}(G_{i,n})$ est isomorphe à un sous-anneau de Lie du produit direct $\Pi_{1 \leq s \leq r} \mathfrak{L}(G_{i,p_s^{h_s}})$, et (7.4) montre que cet isomorphisme applique $\mathfrak{L}(G_{i,n})$ sur $\Pi_{1 \leq s \leq r} \mathfrak{L}(G_{i,p_s^{h_s}})$.

8. Remarques et problèmes. — La correspondance indiquée au paragraphe 2 qui associe aux sous-groupes d'un groupe G muni d'une N-suite (H_i) des sous-anneaux de $\mathfrak{L}(H_i)$ n'est ni biunivoque ni *sur*. Ainsi, par exemple, on peut construire un groupe G d'ordre 16, une N-suite (H_i) dans G, et deux idéaux I_1 et I_2 de $\mathfrak{L}(H_i)$ tels que I_1 soit associé à deux sous-groupes distincts de G, que I_2 ne soit associé à aucun sous-groupe de G, et que, néanmoins, I_1 et I_2 soient transformés l'un en l'autre par un automorphisme de $\mathfrak{L}(H_i)$.

Un problème qui se pose naturellement est celui de caractériser les anneaux de Lie qui peuvent s'obtenir sous la forme $\mathfrak{L}(H_i)$. On sait, par exemple, qu'une algèbre de Lie libre sur le corps Z_p des entiers mod$p$ (premier) ne peut jamais être ainsi obtenue (Magnus [24]). Comme cas particulier, se pose le problème de caractériser les quotients successifs de la suite centrale descendante d'un p-groupe.

Toutes les N-suites que nous avons étudiées dans un groupe libre ont été obtenues par le procédé du théorème (3.2), qui revient à filtrer l'algèbre du groupe à coefficients entiers rationnels. On peut se poser le problème de caractériser les N-suites d'un groupe donné G qui peuvent être obtenues par

le procédé (3.2). Plus particulièrement, peut-on obtenir ainsi la suite centrale descendante de G ? Il suffirait alors de filtrer l'algèbre $Z(G)$ par les puissances successives de l'idéal engendré par les éléments $(z-1)$, où $z \in G$. Une réponse affirmative à ce problème semble admise dans les articles de O. Grün [6] et R.H. Fox [5]; un essai incomplet de démonstration a été donné par P. M. Cohn [4]; j'ignore si une démonstration complète ou un (contre-exemple) ont été trouvés.

Nous avons démontré (6.10) que les groupes de dimension mod$p$ d'un groupe quelconque G s'obtiennent en filtrant l'algèbre $Z_p(G)$ à coefficients entiers mod$p$. On peut se demander si ce résultat demeure exact en remplaçant les groupes de dimension mod$p$ par les groupes de dimension modp^h $(h > 1)$, et l'anneau des coefficients par Z_{p^h}.

L'une des principales difficultés rencontrées dans l'étude de l'anneau $\mathfrak{L}(H_i)$ associé à à une N-suite (H_i) d'un groupe G provient de ce que seule l'addition d'éléments homogènes du même degré dans $\mathfrak{L}(H_i)$ s'obtient à partir de la multiplication dans G par passage aux quotients. On ne peut pourtant pas se dispenser de considérer les éléments non homogènes de $\mathfrak{L}(H_i)$. L'intérêt du théorème (3.3) vient principalement de ce qu'il fait correspondre, dans une certaine mesure, des sommes d'éléments homogènes de $\mathfrak{L}(H_i)$ à des sommes d'éléments non homogènes de $\mathfrak{L}(K_i)$. On remarquera que toute l'étude des N-suites associées aux p-filtrations des groupes libres (§ 5) est fondée sur leur comparaison à la suite centrale descendante par une méthode analogue à celle de (3.3), mais plus précise. D'ailleurs l'anneau $\mathfrak{L}(H_i)$ associé à la N-suite (5.8) est canoniquement isomorphe à l'anneau bigradué obtenu en le filtrant au moyen de la suite centrale descendante, ainsi que nous l'avons indiqué à la fin du paragraphe 6.

Une des principales applications de la théorie des anneaux de Lie associés aux N-suites est l'étude du problème de Burnside : il s'agit d'étudier les groupes ayant un nombre donné (fini) de générateurs qui ne sont liés que par les relations résultant de l'identité générique $x^n = 1$ (n étant un entier fixe) et, en particulier, de déterminer s'ils sont finis. Un cas particulier de ce problème, dont la solution générale paraît encore lointaine, est le suivant : n est un nombre premier p et l'on se borne à rechercher si les sous-groupes de la suite centrale descendante du groupe G considéré coïncident à partir d'un certain rang. C'est l'« hypothèse faible » de Burnside (Baer [1]). Elle est équivalente à la nilpotence de l'anneau $\mathfrak{L}(G_i)$ associé à la suite centrale descendante de G. La suite centrale descendante coïncide avec les groupes de dimension mod$p$ en raison de l'identité générique $x^p = 1$. $\mathfrak{L}(G_i)$ est donc une algèbre de Lie graduée restreinte sur Z_p; de plus, avec les notations du paragraphe 6, $x^p = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{L}(G_i)$. Cela est évident lorsque x est homogène (6.8), et pour x non homogène, cela résulte de considérations assez délicates de Sanov [30], qui a établi, pour les composantes homogènes de degré $\leq 2p-2$, l'isomorphisme de $\mathfrak{L}(G_i)$ avec l'algèbre de Lie restreinte engendrée par des générateurs

en même nombre que ceux de G, et liés par les seules relations découlant de l'identité générique $x^p = 0$. On ne sait pas si ce résultat reste valable pour les degrés $\geq 2p-1$. Si l'on considère G comme le quotient d'un groupe libre K par le sous-groupe $K(p)$ engendré par toutes les $p^{\text{ièmes}}$ puissances dans K, $\mathfrak{L}(G_i)$ s'identifie au quotient de l'anneau de Lie libre $\mathfrak{L}(K_i)$ par l'idéal associé à $K(p)$ (2.4). Une réponse affirmative à la dernière question mentionnée entraînerait que cet idéal est complètement caractéristique dans $\mathfrak{L}(K_i)$, c'est-à-dire stable pour tous les endomorphismes de $\mathfrak{L}(K_i)$. A ma connaissance, même cette hypothèse n'a pas été démontrée.

Les N-suites associées aux p-filtrations des groupes libres permettent d'obtenir, comme conséquence du théorème (5.5), toute une série de relations entre $p^{\text{ièmes}}$ puissances et commutateurs, utilisables dans l'étude du problème de Burnside pour un exposant premier ou puissance d'un nombre premier. On en connaît d'autres, obtenues par une voie différente (*cf.* Sanov [31] et O. Grün [6]). La suite des exposants $\Phi_v(i, j)$, pour i fixé, qui apparaît dans l'énoncé de (5.5), n'est évidemment pas arbitraire. Il serait intéressant de préciser ce point en déterminant à quelles conditions doit satisfaire une suite (k_j) d'entiers ≥ 0 pour que $\Pi_{j=1}^{\infty} G_j^{p^{k_j}}$ définisse un sous-groupe du groupe libre G, au sens indiqué en (5.5).

CHAPITRE II.

Groupes nilpotents et N-groupes définis par la formule de Hausdorff.

1. Suites typiques. — Rappelons d'abord quelques résultats concernant la formule de Hausdorff ([13]). Considérons l'algèbre de Magnus A à coefficients rationnels engendrée par les générateurs indépendants x et y (chap. I, § 4). Comme précédemment, ω désignera l'ordre dans A. Pour tout $z \in A$ tel que $\omega(z) \geq 1$, nous définissons $\exp z \in A$ et $\operatorname{Log}(1+z) \in A$ au moyen des séries classiques

$$\exp z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Log}(1+z) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{z^i}{i}.$$

Nous avons bien

$$\operatorname{Log}(\exp z) = z \qquad \text{et} \qquad \exp\big(\operatorname{Log}(1+z)\big) = 1+z.$$

Mais, si $z, z' \in A$ avec $[\omega(z), \omega(z') \geq 1]$, on n'a pas

$$(\exp z)(\exp z') = \exp(z+z')$$

([13]) La formule de Hausdorff s'est dégagée assez lentement de la théorie des groupes de Lie. Son histoire est marquée par les noms de Poincaré, Schur, Campbell, Baker, Pascal, Hausdorff (sans que la liste soit probablement épuisée). Le mérite de Hausdorff est, semble-t-il, d'en avoir donné une démonstration [9] algébrique (ou « symbolique ») assez brève et compréhensible.

parce que z et z' ne commutent pas (en général). Nous poserons

$$(\exp x)(\exp y) = \exp\big(\Phi(x, y)\big);$$

$\Phi(x, y) \in A$ est définie par

$$\Phi(x, y) = \mathrm{Log}\big((\exp x)(\exp y)\big) = x + y + \frac{1}{2}[xy - yx] + \dots.$$

Nous admettrons que toutes les composantes homogènes de $\Phi(x, y)$ appartiennent à la sous-algèbre de Lie engendrée par x et y dans l'algèbre de Lie portée par A (où l'on prend comme crochet $[z, z'] = zz' - z'z$); cette sous-algèbre est une algèbre de Lie libre de générateurs x et y (chap. I, § 4). On peut donc écrire $\Phi(x, y)$ comme une somme infinie d'alternants en x et y multipliés par des coefficients rationnels ; c'est ainsi qu'on obtient la *formule de Hausdorff* :

$$\Phi(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[[x, y], y] + \frac{1}{12}[[y, x], x] + \dots.$$

Nous n'aurons pas besoin de connaître une loi explicite de formation des termes de cette formule, qui peut être écrite de diverses manières puisqu'on n'a pas de base canonique pour les alternants d'un degré donné. Par contre, dans l'algèbre associative A, $\Phi(x, y)$ s'écrit comme une suite infinie de monomes en x et y dont les coefficients (nombres rationnels) sont bien déterminés. Une remarque simple jouera un grand rôle dans la suite : désignons par Q_n l'anneau des nombres rationnels qui, écrits comme fractions irréductibles, n'admettent au dénominateur que des facteurs premiers $\leq n$ (nombres rationnels p-entiers pour $p > n$); alors le coefficient d'un monome de degré total n en x et y du développement de $\Phi(x, y)$ dans A appartient à Q_n [conséquence immédiate de la propriété arithmétique correspondante des développements de $\exp x$ et de $\mathrm{Log}(1 + x)$]. Or, le *sous-anneau* associatif engendré dans A par x et y contient comme facteur direct (en tant que groupe abélien libre) le *sous-anneau* de Lie libre engendré par x et y (chap. I, § 4); il en résulte qu'on peut écrire la formule de Hausdorff de telle manière que les alternants de degré total n en x et y se trouvent multipliés par des coefficients appartenant à Q_n.

Soit maintenant L l'*algèbre de Lie libre complétée à coefficients rationnels* engendrée par les générateurs indépendants $(x_\iota)_{\iota \in I}$, où l'ensembls d'indices I contient plus d'un élément : nous l'obtenons en construisant d'abord l'algèbre de Lie libre à coefficients rationnels de générateurs $(x_\iota)_{\iota \in I}$ qui est munie d'une graduation naturelle (où chaque x_ι a le degré 1), puis en complétant, c'est-à-dire en formant l'algèbre des « séries » dont les termes ont des degrés qui croissent indéfiniment. Nous désignerons par ω l'ordre dans L [$\omega(y)$ est le degré minimum des composantes homogènes non nulles de $y \in L$], et nous noterons L_i l'idéal de L constitué par les éléments d'ordre $\geq i$ ($i = 1, 2, \dots$). La défini-

tion de L est entièrement analogue à la définition des algèbres de Magnus. De plus, les résultats du chapitre I (§ 4) montrent que L peut être plongée canoniquement dans l'algèbre de Magnus B de générateurs $(x_i)_{i\in I}$ à coefficients rationnels.

A tous $x, y \in L$ nous pouvons faire correspondre au moyen de la formule de Hausdorff un élément déterminé de L que nous noterons simplement xy et que nous appellerons le produit de x et de y :

$$xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \cdots$$

La propriété fondamentale de la formule de Hausdorff est la suivante : L devient, par rapport au produit xy, un *groupe non abélien*. Pour le démontrer, il suffit de plonger L dans l'algèbre de Magnus B et de remarquer que

$$(xy)z = \mathrm{Log}\big((\exp x)(\exp y)(\exp z)\big) = x(yz);$$

l'existence de l'élément neutre (le zéro de L) et de l'inverse de $x \in L$ (qui coïncide avec $-x$) s'établit immédiatement.

Lorsque nous parlerons désormais sans préciser de sous-groupes de L, etc., il sera sous-entendu que nous nous référerons à l'opération xy, c'est-à-dire à la structure de groupe non abélien de L.

Pour tous $r, s \in Q$ (corps des nombres rationnels) et $x \in L$, nous avons :

$$(rx)(sx) = (r + s)x.$$

Ainsi, les puissances entières de $x \in L$ coïncident avec ses multiples entiers. De plus,

$$(x, y) = xyx^{-1}y^{-1} = [x, y] + \cdots$$

pour tous $x, y \in L$, les points de suspension indiquant des termes de degré $\geqq 3$ en x et y. On en déduit que les idéaux L_i de l'algèbre de Lie L constituent une N-suite dans le groupe L et que le groupe quotient L_i/L_{i+1} coïncide, en tant que groupe de classes suivant L_{i+1}, avec le quotient des groupes *abéliens* L_i et L_{i+1} (pour tout i).

Nous nous proposons d'étudier certaines suites d'éléments de L :

Définition (1.1). — Une suite $g(t)$ d'éléments de L dépendant du paramètre entier positif ou nul t sera dite *suite typique* (dans L) si l'on peut trouver des éléments $a_i \in L$ (i entier $\geqq 1$) tels que $a_i \in L_i$ (pour tout i) et que, pour tout t :

$$g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i.$$

H désignant une partie de L, $g(t)$ sera dite *suite typique dans* H si elle est assujettie à la condition supplémentaire $g(t) \in H$ pour tout t.

Nous désignerons par la même lettre Δ l'opérateur qui fait correspondre à une suite d'éléments $g(t)$ la suite $\Delta g(t) = g(t+1) - g(t)$ et l'opérateur qui

fait correspondre à un polynome $P(t)$ le polynome $\Delta P(t) = P(t+1) - P(t)$. Les puissances successives de l'opérateur Δ seront notées Δ^k.

THÉORÈME (1.2). — *Une suite d'éléments $g(t) \in L$ est une suite typique si et seulement si $g(0) = 0$ et $\Delta^k g(0) \in L_k$ pour tout entier $k \geqq 1$.*

Démonstration. — Soit d'abord $g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i$ une suite typique. Alors

$$\Delta g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} (t+1)^i a_i - \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i = \Sigma_{i=1}^{\infty} \left((t+1)^i - t^i \right) a_i = \Sigma_{i=1}^{\infty} \Delta t^i a_i.$$

Plus généralement :

$$\Delta^k g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \Delta^k t^i a_i$$

pour tout entier $k \geqq 1$. Or, $\Delta^k t^i = 0$ si $k > i$, donc

$$\Delta^k g(t) = \Sigma_{i=k}^{\infty} \Delta^k t^i a_i \in L_k$$

et, en particulier, $\Delta^k g(0) \in L_k$.

Réciproquement, soit $g(t)$ une suite d'éléments de L, avec $g(0) = 0$. Nous pouvons calculer les termes de la suite $g(t)$ à partir des $\Delta^k g(0)$ $(k \geqq 1)$, par la formule connue :

$$g(t) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \binom{t}{k} \Delta^k g(0),$$

où $\binom{t}{k}$ désigne le coefficient binomial que nous pouvons considérer comme un polynome en t à coefficients rationnels et de degré k. Aucune difficulté de convergence ne se présente, puisque la série considérée n'a qu'un nombre fini de termes non nuls pour toute valeur entière $\geqq 0$ de t. Pour démontrer que les relations $\Delta^k g(0) \in L_k$ entraînent que $g(t)$ est une suite typique, nous établissons plus généralement le :

LEMME (1.3). — *Soit a_k une suite d'éléments de* L *tendant vers zéro et $P_k(t)$ une suite de polynomes à coefficients rationnels sans termes constants, telles que $\deg P_k(t) \leqq \omega(a_k)$ pour tout $k \geqq 1$. Alors $g(t) = \Sigma_{k=1}^{\infty} P_k(t) a_k$ est une suite typique.*

Posons, en effet,

$$P_k(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} c_{i,k} t^i; \qquad c_{i,k} \in Q.$$

Alors

$$g(t) = \Sigma_{k=1}^{\infty} (\Sigma_{i=1}^{\infty} c_{i,k} t^i) a_k = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i (\Sigma_{k=1}^{\infty} c_{i,k} a_k).$$

La condition $\deg P_k(t) \leqq \omega(a_k)$ peut s'énoncer ainsi :

$$\omega(a_k) \geqq i \qquad \text{si} \quad c_{i,k} \neq 0;$$

l'interversion des sommations est donc licite, et

$$b_i = \Sigma_{k=1}^{\infty} c_{i,k} a_k \in L_i,$$

ce qui montre que $g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i b_i$ est une suite typique.

Nous pouvons définir sur l'ensemble des suites $g(t)$ à valeur dans L une structure d'algèbre de Lie en posant

$$(\lambda g)(t) = \lambda g(t), \qquad (g+h)(t) = g(t) + h(t), \qquad [g, h](t)] = [g(t), h(t)]$$

et une structure de groupe, en posant $(gh)(t) = g(t)h(t)$. Nous introduisons sur cet ensemble la topologie de la convergence simple : une famille $g_\nu(t)$ de suites converge vers $g(t)$ si $g_\nu(t)$ converge vers $g(t)$ pour tout t fixé. Avec ces conventions :

Théorème (1.4). — *Les suites typiques constituent, dans l'ensemble de toutes les suite d'éléments de* L *une sous-algèbre de Lie fermée, et, par conséquent, un sous-groupe.*

Démonstration. — Soient

$$g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i \qquad \text{et} \qquad h(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i b_i$$

deux suites typiques. Alors

$$(\lambda g)(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i \lambda a_i \qquad (\lambda \in \mathrm{Q}), \qquad (g+h)(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i (a_i + b_i)$$

et

$$[g, h](t) = [\Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i, \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i b_i] = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i (\Sigma_{r=1}^{i-1} [a_r, b_{i-r}]).$$

Les relations $a_i \in \mathrm{L}_i$, $b_i \in \mathrm{L}_i$ impliquent évidemment

$$\lambda a_i \in \mathrm{L}_i, \qquad a_i + b_i \in \mathrm{L}_i \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{r=1}^{i-1} [a_r, b_{i-r}] \in \mathrm{L}_i.$$

Les suites typiques constituent donc une sous-algèbre de Lie.

Soit $g_\nu(t)$ une famille de suites typiques tendant vers la suite $g(t)$. Alors, pour tout entier $k \geqq 1$, $\Delta^k g_\nu(0)$ tend vers $\Delta^k g(0)$; comme, pour tous ν, k,

$$\Delta^k g_\nu(0) \in \mathrm{L}_k, \qquad \Delta^k g(0) \in \mathrm{L}_k,$$

ce qui montre (1.2) que l'ensemble des suites typiques est fermé.

Enfin, si nous considérons

$$gh(t) = g(t) + h(t) + \frac{1}{2}[g(t), h(t)] + \ldots,$$

nous voyons que la somme des termes de degré $\leqq n$ de ce développement de Hausdorff est, pour tout entier n, une suite typique. Nous pouvons donc passer à la limite, puisque l'ensemble des suites typiques est fermé, ce qui établit que $gh(t)$ est une suite typique.

Nous allons maintenant chercher à caractériser les suites typiques en faisant abstraction de la structure d'algèbre de Lie de L, et en ne retenant que sa structure de groupe.

Nous avons déjà remarqué que si $x \in \mathrm{L}$, $r \in \mathrm{Z}$ (anneau des entiers), $rx = x^r$. Nous pouvons caractériser complètement en termes de théorie des groupes la

multiplication des éléments de L par les scalaires rationnels : si $r, s \in \mathbf{Z}$, $x \in \mathrm{L}$, nous définissons $x^{r/s} = y$ par les conditions $y \in \mathrm{L}$ et $x^r = y^s$: alors

$$y = x^{r/s} = (r/s)x.$$

Nous voyons donc que les *puissances fractionnaires* (rationnelles) des éléments de L sont bien déterminées. Elles vérifient évidemment les identités

$$(x^\lambda)^\mu = x^{\lambda\mu} \qquad \text{et} \qquad x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu} \qquad (\lambda, \mu \in \mathrm{Q}).$$

Théorème (1.5). — *Si* $\big(\mathrm{P}_i(t)\big)$ *désigne une suite de polynomes en* t *à coefficients rationnels et sans termes constants, chaque polynome* $\mathrm{P}_i(t)$ *étant précisément de degré* i*, la relation :*

$$g(t) = a_1^{\mathrm{P}_1(t)} a_2^{\mathrm{P}_2(t)} \ldots a_i^{\mathrm{P}_i(t)} \ldots$$

établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des suites typiques et l'ensemble des suites (a_i) *d'éléments de* L *telles que* $a_i \in \mathrm{L}_i$ *pour tout entier positif* i.

Démonstration. — Si (a_i) est une suite d'éléments de L tels que $a_i \in \mathrm{L}_i$, $a_i^{\mathrm{P}_i t} = \mathrm{P}_i(t) a_i$ est une suite typique pour tout i, d'après (1.3). Il en est donc de même du produit $a_1^{\mathrm{P}_1(t)} \ldots a_i^{\mathrm{P}_i(t)} \ldots = g(t)$, d'après (1.4).

Pour démontrer que la suite (a_i) est uniquement déterminée, nous nous appuierons sur le :

Lemme (1.6). — *Soit* H *un groupe,* (K_i) *une suite centrale dans* H*, c'est-à-dire une suite de sous-groupes tels que* $\mathrm{K}_1 = \mathrm{H}$, $\mathrm{K}_i \supset \mathrm{K}_{i+1}$ et $(\mathrm{H}, \mathrm{K}_i) \subset \mathrm{K}_{i+1}$ *pour tout* $i \geq 1$. *On suppose que* $\bigcap_i \mathrm{K}_i = (e)$ (*l'élément neutre de* H), *que* H *est complet pour la topologie obtenue en prenant les* (K_i) *comme système fondamental de voisinages de* e*, et que tous les quotients* $\mathrm{K}_i/\mathrm{K}_{i+1}$ *sont sans torsion. Soit* $\big(\mathrm{P}_i(t)\big)$ *une suite de polynomes à valeurs entières pour* t *entier* (14)*, chaque* $\mathrm{P}_i(t)$ *étant précisément de degré* i*. Alors, si* (a_i) *et* (b_i) *désignent deux suites d'éléments de* H *tendant vers* e*, on ne peut avoir :*

$$(\star) \qquad a_1^{\mathrm{P}_1(t)} a_2^{\mathrm{P}_2(t)} \ldots a_i^{\mathrm{P}_i(t)} \ldots = b_1^{\mathrm{P}_1(t)} b_2^{\mathrm{P}_2(t)} \ldots b_i^{\mathrm{P}_i(t)} \ldots,$$

pour toute valeur entière ≥ 0 *de* t *que si* $a_i = b_i$ *pour tout* $i \geq 1$.

Supposons que, pour un entier k donné, nous ayons démontré les relations $b_i \in a_i \mathrm{H}_k$ pour tout $i \geq 1$ (cela est évident pour $k = 1$).

Posons donc

$$b_i = a_i c_i, \qquad c_i \in \mathrm{H}_k.$$

(14) Rappelons que ces polynomes ne sont autres que les combinaisons linéaires à coefficients entiers des polynomes $\binom{t}{i}$ $(1 \leq i < \infty)$.

Notre relation (★) s'écrit :

$$a_1^{P_1(t)}\dots a_i^{P_i(t)}\dots = (a_1c_1)^{P_1(t)}\dots(a_ic_i)^{P_i(t)}\dots.$$

Prenons le quotient de H par K_{k+1}, et désignons par $\hat{x}$ l'image canonique dans H/K_{k+1} de $x \in H$. La relation (★) nous donne :

$$\hat{a}_1^{P_1(t)}\dots\hat{a}_i^{P_i(t)}\dots = (\hat{a}_1\hat{c}_1)^{P_1(t)}\dots(\hat{a}_i\hat{c}_i)^{P_i(t)}\dots.$$

Mais par hypothèse, $\hat{c}_i$ appartient au centre de H/K_{k+1}. Donc

$$(\hat{a}_i\hat{c}_i)^{P_i(t)} = \hat{a}_i^{P_i(t)}\hat{c}_i^{P_i(t)}$$

et nous pouvons regrouper les facteurs du produit

$$\hat{a}_1^{P_1(t)}\hat{c}_1^{P_1(t)}\dots\hat{a}_i^{P_i(t)}\hat{c}_i^{P_i(t)}\dots = (\hat{a}_1^{P_1(t)}\dots\ \hat{a}_i^{P_i(t)}\dots)\,(\hat{c}_1^{P_1(t)}\dots\hat{c}_i^{P_i(t)}\dots).$$

Nous parvenons ainsi à la relation :

$$\hat{c}_1^{P_1(t)}\dots\hat{c}_i^{P_i(t)}\dots = \hat{e}$$

dans le groupe abélien K_k/K_{k+1}. Remarquons que tous les (a_i), (b_i) appartiennent à K_{k+1}, sauf un nombre fini d'entre eux. Par conséquent, $\hat{c}_i = \hat{e}$, sauf pour un nombre fini d'indices. Adoptons la notation additive; supposons, dans un groupe abélien sans torsion, une suite d'éléments d_i, tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux, et tels que $\Sigma_{i=1}^{\infty} P_i(t)\,d_i = 0$, pour toute valeur entière ≥ 0 de t. Si tous les d_i ne sont pas nuls, soit l le plus grand indice tel que $d_l \neq 0$. Alors

$$\Sigma_{i=1}^{l}\,\Delta^t P_i(t)\,d_i = 0;$$

mais $\Delta^t P_i(t) = 0$ pour $i < l$, et $\Delta^t P_l(t) = l!\,\lambda_l$ [λ_l désignant le coefficient de t^l dans $P_l(t)$]. Ainsi $(l!\lambda_l)\,d_l = 0$, ce qui implique que $d_l = 0$. Tous les d_i sont donc nuls. Il en résulte que $\hat{c}_i = \hat{e}$ pour tout i, autrement dit : $b_i \in a_iK_{k+1}$ pour tout i. Cela étant vrai pour tout indice k, nous avons bien démontré les relations $a_i = b_i$, comme conséquence de la relation (★).

Remarques (1.7). — L'énoncé (1.6) admet un certain nombre de variantes, qui n'entraînent que des modifications insignifiantes dans la démonstration. Tout d'abord nous aurions pu supposer que la relation (★) n'est vérifiée que pour une infinité de valeurs de t (au lieu de toutes les valeurs entières ≥ 0 de t). En effet, tout se ramène à démontrer que, dans un groupe abélien sans torsion, une famille d'éléments $d_i\ (1 \leq i \leq n)$ ne peut satisfaire à $\Sigma_{i=1}^{n} P_i(t)\,d_i = 0$ pour une infinité de valeurs de t que si tous les d_i sont nuls. Si $P_i(t) = \Sigma_{j=1}^{i}\lambda_{i,j}t^j$, nous pouvons supposer, en multipliant éventuellement tous les $P_i(t)$ par un entier convenable, que les coefficients $\lambda_{i,j}$ sont entiers; alors

$$\lambda_{i,i} = \lambda_i \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{i=1}^{n} P_i(t)\,d_i = \Sigma_{i=1}^{n} t^i e_i;$$

avec

$$e_i = \Sigma_{j=1}^{n}\lambda_{j,i}\,d_j.$$

Un calcul de déterminant de Vandermonde montre que tous les e_i sont nuls [il suffit que la relation $\Sigma_{i=1}^{n} t^i e_i$ soit vérifiée pour $(n+1)$ valeurs de t]; les conditions $\lambda_{i,i} \neq 0$ (pour $1 \leq i \leq n$) montrent que tous les d_i sont alors nuls. Contentons-nous d'indiquer les énoncés suivants, qui se démontrent comme (1.6) :

a. On remplace dans (1.6) la condition « tous les K_i/K_{i+1} sans torsion » par la condition « le coefficient de t^i dans chaque polynome $P_i(t)$ est $1/i!$ ». Par exemple :

$$P_i(t) = \binom{t}{i}.$$

b. On remplace la condition « les (a_i) et (b_i) tendent vers e » par $a_i = b_i = e$ pour $i > n$, on suppose que le coefficient de t^i dans chaque $P_i(t)$ est égal à 1, et l'on remplace la condition « K_i/K_{i+1} sans torsion » par « l'ordre d'aucun élément (excepté l'élément neutre) des quotients K_i/K_{i+1} ne divise $n!$ ».

c. On remplace la condition « les (a_i) et (b_i) tendent vers e » par « $a_i \in K_i$ et $b_i \in K_i$ pour tout i », on suppose que le coefficient de t^i dans chaque $P_i(t)$ est égal à 1, et l'on remplace la condition « K_i/K_{i+1} sans torsion » par « l'ordre d'aucun élément (excepté l'élément neutre) de K_i/K_{i+1} ne divise $i!$, quel que soit $i \geq 1$ ».

d. On remplace la condition « K/K_{i+1} sans torsion » par la condition « l'ordre d'aucun élément de K_i/K_{i+1} (excepté l'élément neutre) ne divise n », et l'on suppose que le coefficient de t^i dans chaque $P_i(t)$ est de la forme $\frac{r}{i!}$, où r divise une puissance de l'entier n donné.

L'unicité de la représentation (1.5),

$$g(t) = a_1^{P_1(t)} \ldots, a_i^{P_i(t)} \ldots$$

des suites typiques résulte immédiatement de (1.6), en prenant $H = L$, $K_i = L_i$, et en remplaçant, si nécessaire $P_i(t)$ par $n_i P_i(t)$ et a_i par $a_i^{\frac{1}{n_i}}$, (n_i) désignant une suite d'entiers convenables.

Nous voyons, de plus, que la suite (a_i) d'éléments de L intervenant dans la définition (1.1) des suites typiques est bien déterminée par la suite $g(t)$: il suffit d'appliquer (1.6) à L considéré comme un groupe abélien. Enfin, $g(t) \in L_k$ pour tout t si et seulement si $a_i \in L_k$ pour tout i [appliquer (1.6) au groupe abélien L/L_k].

Achevons la démonstration de (1.5). Soit $g(t)$ une suite typique. Supposons que nous ayons déjà construit, pour certain entier i, des éléments $a_{1,i}$, $a_{2,i}$, ..., $a_{i,i}$, tels que $a_{r,i} \in L_r$ pour $1 \leq r \leq i$ et que

$$\big(g(t)\big)^{-1} a_{1,i}^{P_1(t)} a_{2,i}^{P_2(t)} \ldots a_{i,i}^{P_i(t)} \in L_{i+1}$$

pour tout t entier ≥ 0. Alors

$$h(t) = \big(g(t)\big)^{-1} a_{1,t}^{P_1(t)} \dots a_{t,t}^{P_t(t)}$$

est une suite typique dans L_{t+1}.

Nous avons donc, d'après la dernière proposition énoncée,

$$h(t) = \Sigma_{j=1}^{\infty} t^j b_j, \qquad \text{avec} \qquad b_j \in L_j \cap L_{t+1}.$$

Puisque chaque polynome $P_i(t)$ est de degré i et sans terme constant, nous pouvons calculer sans ambiguïté les nombres rationnels $\lambda_{j,k}$ tels que $\Sigma_{k=1}^{j} \lambda_{j,k} P_k(t) = t^j$. Alors :

$$\Sigma_{j=1}^{t+1} t^j b_j = \Sigma_{j=1}^{t+1} \big(\Sigma_{k=1}^{j} \lambda_{j,k} P_k(t)\big) b_j = \Sigma_{k=1}^{t+1} P_k(t) \, (\Sigma_{j=k}^{t+1} \lambda_{j,k} b_j).$$

Posons $c_k = -\Sigma_{j=k}^{t+1} \lambda_{j,k} b_j$. Alors la formule de Hausdorff montre immédiatement que :

$$h(t) \Pi_{k=1}^{t+1} c_k^{P_k(t)} \in L_{t+2} \quad \text{pour tout } t.$$

Or les éléments c_k appartiennent tous à L_{t+1}, ce qui implique que les éléments $c_k^{P_k(t)}$ permutent, modulo L_{t+2}, avec tous les éléments de L. Ainsi :

$$a_{1,t}^{P_1(t)} \dots a_{t,t}^{P_t(t)} c_1^{P_1(t)} \dots c_t^{P_t(t)} c_{t+1}^{P_{t+1}(t)} \equiv (a_{1,t} c_1)^{P_1(t)} \dots (a_{t,t} c_t)^{P_t(t)} c_{t+1}^{P_{t+1}(t)} \pmod{L_{t+2}}.$$

Posons

$$a_{r,t+1} = a_{r,t} c_r \qquad \text{pour} \quad 1 \leq r \leq t \quad \text{et} \quad a_{t+1,t+1} = c_{t+1}.$$

La famille $a_{r,t+1}$ possède, pour l'indice $t+1$, les mêmes propriétés que la famille $a_{r,t}$ pour l'indice t, et $a_{r,t+1} \equiv a_{r,t} \pmod{L_{t+1}}$. Nous pouvons donc poser

$$a_t = \lim_{r \geq t, r \to \infty} a_{t,r},$$

et nous voyons que

$$g(t)^{-1} a_1^{P_1(t)} \dots a_j^{P_j(t)} \dots \in L_t,$$

quel que soit t, c'est-à-dire que

$$g(t) = a_1^{P_1(t)} \dots a_j^{P_j(t)} \dots, \qquad \text{avec} \quad a_j \in L_j \quad \text{pour tout } j.$$

La construction indiquée ne fait pas intervenir de choix arbitraire.

Nous allons d'abord appliquer le théorème (1.5) en prenant $P_i(t) = \binom{t}{i}$.

Définition (1.8). — Soit une suite d'éléments $g(t)$ (t entier ≥ 0) dans un groupe quelconque H, $g(0)$ étant égal à l'élément neutre. Il existe alors dans H une suite (a_i) d'éléments déterminés, telle que :

$$g(t) = a_1^{\binom{t}{1}} a_2^{\binom{t}{2}} \dots a_i^{\binom{t}{i}} \dots \quad \text{pour tout } t.$$

L'élément a_i sera dit $i^{\text{ième}}$ *différence non abélienne* de la suite $g(t)$, et noté $\partial_i g(t)$; il ne dépend que des valeurs de $g(t)$ pour $1 \leq t \leq i$.

En effet, $\binom{t}{i} = 0$ pour tout $t < i$, et il s'agit donc toujours de produits finis dans H. Supposons déjà calculé a_i pour $1 \leq i \leq j-1$: nous devrons avoir

$$g(j) = a_1^{\binom{j}{1}} \dots a_{j-1}^{\binom{j}{j-1}} a_j,$$

ce qui détermine univoquement a_j.

Nous pouvons alors, d'après (1.5), énoncer :

THÉORÈME (1.9). — *Soit* H *un sous-groupe quelconque de* L. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite d'éléments* $g(t)$ *de* H *soit une suite typique dans* H *est que* $g(0) = 0$ *et que* $\delta_i g(t) \in L_i \cap H$ *pour tout* $i \geq 1$.

Prenons, en particulier, pour H le sous-groupe G de L engendré par ses générateurs $(x_\iota)_{\iota \in I}$. Alors G est un groupe libre par rapport aux générateurs (x_ι), et les sous-groupes $G_i = G \cap L_i$ constituent la suite centrale descendante de G. Il suffit, en effet, pour le démontrer d'appliquer les théorèmes (3.1) et (4.3) du chapitre I, en remarquant que le sous-anneau de Lie engendré par les (x_ι) dans L est libre.

Le théorème (1.9) nous donne donc une caractérisation des suites typiques dans le groupe libre G, sans plus faire aucunement intervenir l'algèbre de Lie L. Ainsi :

THÉORÈME (1.10). — *Une suite typique dans le groupe libre* G, *dont la suite centrale descendante est notée* (G_i), *est une suite* $g(t)$ *d'éléments de* G *telle que* $g(0)$ *soit l'élément neutre et que* $\delta_i g(t) \in G_i$ *pour tout entier* $i \geq 1$. *Dans l'ensemble des suites d'éléments de* G, *les suites typiques constituent un sous-groupe fermé. Si* $P_i(t)$ *est un polynome à valeurs entières pour* t *entier et de degré* i, $x^{P_i(t)}$ *est une suite typique dans* G *si et seulement si* $x \in G_i$.

Le théorème (1.10) nous permet d'établir immédiatement des identités du type de l'identité fondamentale de P. Hall ([8], § 3]). Prenons, par exemple, deux éléments x et y dans le groupe libre G ; $x^t y^t = g(t)$ est une suite typique et :

$$x^t y^t = a_1^{\binom{t}{1}} a_2^{\binom{t}{2}} \dots a_i^{\binom{t}{i}} \dots . \tag{1.11}$$

avec

$$a_1 = xy, \qquad a_2 = y^{-1}(x^{-1}, y^{-1})y, \qquad \dots, \qquad a_i = \delta_i g(t) \in G_i.$$

Pour trouver une identité de la forme $(xy)^t = x^t y^t \dots$, il suffit de considérer la suite typique : $y^{-t} x^{-t} (xy)^t = h(t)$. Ainsi :

$$(xy)^t = x^t y^t b_2^{\binom{t}{2}} \dots b_i^{\binom{t}{i}} \dots, \tag{1.12}$$

avec

$$b_2 = y^{-1}(y^{-1}, x^{-1})y, \qquad b_i = \delta_i h(t) \in G_i.$$

Rappelons que (1.11), où l'on fait $t=p$, donne l'identité (6.4) du chapitre I.

Des identités analogues s'établissent pour des suites typiques telles que (x', y), des suites typiques impliquant plus de deux éléments, etc. L'avantage des formes canoniques que nous trouvons est qu'elles découlent sans calculs de (1.10), et qu'elles ne font intervenir que des produits finis. Par contre, la vérification que les $i^{\text{èmes}}$ différences non abéliennes sont des produits de commutateurs de poids $\geq i$ entraîne des calculs pénibles, même pour les suites typiques les plus simples et les petites valeurs de i. Aussi allons-nous donner une forme non canonique des suites typiques qui met en évidence les sous-groupes G_i.

G désigne comme précédemment le groupe libre engendré par les $(x_\iota)_{\iota\in I}$ dans L. Nous choisissons une famille d'éléments $(y_\nu)_{\nu\in N}$ d'élément de G, ν parcourant un ensemble N bien ordonné, de façon que $\omega(y_\nu)<\omega(y_{\nu'})$ implique $\nu<\nu'$, et que les y_ν pour lesquels $\omega(y_\nu)=i$ constituent, $\bmod G_{i+1}$, une base du groupe abélien libre G_i/G_{i+1} (*cf.* § 6, chap. I). Alors, tout élément du complété $\overline{G}$ de G dans L s'écrit, d'une manière et d'une seule, comme un produit infini ordonné (convergeant au sens de la topologie dans L) : $\Pi_{\nu\in N}y_\nu^{h_\nu}$, où les h_ν sont des entiers qui doivent vérifier la condition suivante : pour tout i, les h_ν correspondant aux indices ν tels que $\omega(y_\nu)=i$ sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux. Nous énoncerons désormais plus simplement cette condition en disant que le produit doit converger. Les composantes homogènes de degré $\omega(y_\nu)$ des y_ν (c'est-à-dire leurs « parties principales ») constituent une base, sur l'anneau Z des entiers rationnels, du sous-anneau de Lie libre engendré par les (x_ι) dans L (chap. I, § 4). Elles constituent donc aussi une base, sur le corps Q des nombres rationnels, de l'algèbre de Lie libre dont L est le complété. Nous en déduisons sans peine que les éléments de L sont représentés univoquement par les produits convergents $\Pi_{\nu\in N}y_\nu^{h_\nu}$, où les h_ν sont des nombres rationnels. Une suite d'éléments $g(t)$ dans $\overline{G}$ (resp. dans L) peut donc être mise sous la forme $\Pi_\nu y_\nu^{h_\nu(t)}$, où les $h_\nu(t)$ sont des fonctions de t déterminées à valeurs entières (resp. rationnelles).

Théorème (1.13). — *Une suite d'éléments $g(t)=\Pi_{\nu\in N}y_\nu^{h_\nu(t)}$ est une suite typique dans $\overline{G}$ (resp. dans* L*) si et seulement si le produit converge pour tout $t\geq 0$, $h_\nu(0)=0$, pour tout $\nu\in N$, et enfin si pour tout $\nu\in N$, la fonction $h_\nu(t)$ peut être représentée par un polynome à valeurs entières (resp. un polynome à coefficients rationnels) de degré $\leq\omega(y_\nu)$.*

Démonstration. — Un produit du type considéré représente bien une suite typique, d'après (1.4). Réciproquement, soit $g(t)=\Pi_{\nu\in N}y_\nu^{h_\nu(t)}$ une suite typique dans $\overline{G}$ (resp. dans L). Désignons généralement par ν_i le plus petit indice ν tel

que $\omega(\gamma_\nu)=i$. Supposons démontré que, pour $\nu<\nu_i$, les fonctions $h(t)$ vérifient les conditions du théorème. Alors $(\Pi_{\nu<\nu_i}\gamma_\nu^{h_\nu(t)})^{-1}g(t)$ est une suite typique dans $\overline{G}_i$ (resp. L_i), donc de la forme $\Sigma_{j=1}^{\infty}t^j a_j$, avec $a_j\in L_i\cap L_j$ pour tout j. D'après les propriétés des γ_ν, nous pouvons trouver des coefficients rationnels $\lambda_{j,\nu}(1\leq j<\infty\,;\,\nu\in N)$ tels que

$$a_j\equiv\Sigma_{\nu_{i-1}\leq\nu<\nu_{i+1}}\lambda_{j,\nu}\gamma_\nu \pmod{L_{i+1}} \qquad \text{pour} \quad 1\leq j\leq i.$$

Il en résulte que

$$h_\nu(t)=\Sigma_{1\leq j\leq i}\lambda_{j,\nu}t^j,$$

ce qui démontre (1.13).

(1.14) *Remarques.* — *a.* Si, dans la définition (1.1) des suites typiques, nous remplaçons la condition $a_i\in L_i$ pour tout i par la condition plus faible $\lim_{i\to\infty}\omega(a_i)=\infty$, nous parvenons à la notion de *suite analytique* dans L. Les suites typiques ne sont donc qu'un cas particulier des suites analytiques, mais ce sont les seules dont nous ayons ici à faire usage. Tous les résultats que nous avons démontrés pour les suites typiques s'établissent, en modifiant convenablement les énoncés, pour les suites analytiques. Ainsi, dans (1.2). on doit remplacer la condition « $\Delta^k g(0)\in L_i$ pour tout i » par la condition « $\lim_{k\to\infty}\omega\big(\Delta^k g(0)\big)=\infty$ »; la même modification doit intervenir dans le théorème (1.9), les différences $\Delta^k g(0)$ étant remplacés par les différences non abéliennes $\hat{\delta}_i g(t)$. L'énoncé du lemme (1.6) s'applique directement aux suites analytiques, et permet de démontrer, pour les suites analytiques, le théorème (1.5) où il faut seulement remplacer la condition « $a_i\in L_i$ pour tout i » par la condition plus faible « $\lim_{i\to\infty}\omega(a_i)=\infty$ ».

b. Si deux suites typiques (resp. analytiques) $g(t)$ et $h(t)$ coïncident pour une infinité de valeurs de t, elles coïncident pour toutes les valeurs (entières ≥ 0) de t. Il suffit, en effet, d'appliquer aux deux suites le théorème (1.5) en prenant, par exemple, $P_i(t)=\binom{t}{i}$ [*cf.* (1.9)], puis d'appliquer la remarque (1.7).

c. Nous avons supposé, dans la définition d'une suite typique (resp. analytique) $g(t)$ que $g(0)=0$. Cette condition n'est pas essentielle, mais elle simplifie certains énoncés, et correspond aux besoins des applications.

d. Nous aurions pu, dans la définition (1.1) des suites typiques faire intervenir toutes les valeurs entières de t. Alors les théorèmes (1.2) et (1.9) ne seraient plus exacts [puisqu'ils ne font intervenir que les valeurs de $g(t)$ pour $t\geq 0$]. Par contre, les théorèmes (1.4) et (1.5) restent valables (une seule modification doit être apportée, pour démontrer que l'ensemble des suites typiques, considéré comme partie de l'ensemble des applications de Z

dans L, est fermé). De même, nous aurions pu faire intervenir toutes les valeurs rationnelles de t. Mais, avec ces définitions, la remarque b précédente resterait valable : deux suites typiques coïncidant pour une infinité de valeurs de t coïncideraient pour toutes les valeurs (entières ou rationnelles, suivant la définition adoptée) de t. Il en résulte que nous n'avons essentiellement qu'une seule définition des suites typiques, car l'extension d'une suite typique, définie comme en (1.1). à toutes les valeurs entières ou rationnelles de t est évidemment possible, et n'est possible que d'une seule manière.

Application. — Les identités telles que (1.11) et (1.12) que nous avons établies pour t entier ≥ 0 restent vraies pour t négatif, les produits envisagés étant alors effectivement infinis. (Si l'on veut considérer les valeurs non entières de t, on doit évidemment se placer dans le groupe L.) Toutes ces considérations s'appliquent au cas des suites analytiques.

e. Tous les résultats concernant les suites typiques (resp. analytiques) peuvent se généraliser à des familles d'éléments dépendant de plusieurs paramètres. On pourrait ainsi donner des identités du type de P. Hall pour $x^t y^{t'} z^{t''}$, ... Les énoncés seraient sensiblement plus compliqués, et, pour avoir des représentations en produit [*cf.* (1.8), (1.9)], on serait obligé d'ordonner totalement les couples (ou n-uples) d'entiers positifs, ce qui laisserait subsister beaucoup d'arbitraire. Aussi, semble-t-il raisonnable d'attendre les applications éventuelles avant de développer la théorie dans cette direction.

2. Inversion de la formule de Hausdorff (*Formules génériques*). — Nous commençons par appliquer le théorème (1.5) en prenant $P_i(t) = t^i$. Il en résulte la correspondance biunivoque entre les suites typiques

$$g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i$$

et les développements en produit :

$$g(t) = \Pi_{i=1}^{\infty} b_i^{t^i}, \qquad \text{avec} \quad b_i \in \mathrm{L}_i \text{ pour tout } i.$$

Nous appellerons b_i le $i^{\text{ième}}$ *résidu* de la suite typique $g(t)$. Contrairement à ce qui se passe pour les différences non abéliennes, les résidus ne se calculent pas simplement à partir des valeurs $g(t)$ de la suite typique dans le groupe L; par contre, nous allons voir comment ils se calculent au moyen des coefficients a_i et des opérations de l'algèbre de Lie L.

Nous désignons par Q_i l'ensemble des nombres rationnels qui, écrits comme fractions irréductibles, n'admettent au dénominateur que des facteurs premiers au plus égaux à i. Rappelons alors que, dans la formule de Hausdorff,

$$xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \ldots$$

la composante homogène de degré i peut s'écrire sous la forme d'une somme

d'alternants de degré total i par rapport à x et y, multipliés par des coefficients de Q_i. Nous remarquons d'abord que, dans le développement

$$\Pi_{i=1}^{n} b_i^{t^i} = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_{i,n},$$

le coefficient $a_{i,n}$ ne dépend que des b_j pour lesquels $1 \leq j \leq i$. En passant à la limite, nous voyons qu'il en est de même du coefficient a_i dans le développement de $\Pi_{i=1}^{\infty} b_i^{t^i}$. Les premiers coefficients a_i sont donnés par les formules :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3 + \frac{1}{2}[b_1, b_2], \\ a_4 = b_4 + \frac{1}{2}[b_1, b_3] + \frac{1}{12}[[b_2, b_1], b_1], \end{cases}$$

On voit facilement que, pour calculer a_i, il suffit de connaître $b_1, b_2, \ldots, b_i$ et les termes de la formule de Hausdorff jusqu'au degré $(i-1)$ inclus. Nous en déduisons que $a_i - b_i$ est une somme d'alternants par rapport à $b_1, \ldots, b_{i-1}$, multipliés par des coefficients appartenant à Q_{i-1} ; nous pouvons préciser que ces alternants ont le poids i, si l'on attribue à chaque b_j le poids j, et si l'on attribue au crochet $[u, v]$ un poids égal à la somme des poids de u et de v.

Nous savons déjà (1.5), qu'on peut calculer les b_i en fonction des a_i. Les formules (2.1) conduisent à ;

$$(2.2) \qquad \begin{cases} b_1 = a_1, \\ b_2 = a_2, \\ b_3 = a_3 - \frac{1}{2}[a_1, a_2], \\ b_4 = a_4 - \frac{1}{2}[a_1, a_3] + \frac{1}{6}[[a_2, a_1], a_1]. \end{cases}$$

Nous pouvons énoncer généralement le :

Théorème (2.3). — *Toute suite typique* $g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i$ *peut être représentée, d'une manière et d'une seule, par un produit ordonné* $g(t) = \Pi_{i=1}^{\infty} b_i^{t^i}$. *Le* $i^{\text{ième}}$ *résidu* b_i *de la suite* $g(t)$ *se calcule au moyen des opérations de l'algèbre de Lie à partir des coefficients* $a_j (1 \leq j \leq i)$; *plus précisément, pour tout* i, $b_i - a_i$ *est égal à une somme d'alternants par rapport aux* $a_j (1 \leq j \leq i-1)$ *multipliés des coefficients de* Q_{i-1}.

L'intérêt principal de ce théorème est qu'il nous permet de décrire complètement, à partir de la structure de groupe de L, sa structure d'algèbre de Lie :

Théorème (2.4). — *Soient* x *et* y *deux éléments de* L. *Alors il existe une suite d'éléments* b_i *de* L *tendant vers zéro, et une seule, telle que pour tout entier* t :

$$x^t y^t = b_1^t b_2^{t^2} \ldots b_i^{t^i} \ldots,$$

et l'on a

$$b_1 = x + y, \qquad b_2^2 = [x, y].$$

Démonstration. — Il suffit de considérer la suite typique

$$x^t y^t = t(x+y) + \frac{t^2}{2}[x, y] + \dots$$

et d'appliquer (2.3). Nous aurions pu, pour calculer $[x, y]$, utiliser la suite typique

$$(x, y^t) = c_1^t c_2^{t^2} \dots, \qquad \text{où} \quad c_1 = [x, y], \quad \dots$$

Ce théorème nous permet de caractériser la structure d'algèbre de Lie de L à partir de sa structure de groupe topologique. Il réalise, en quelque sorte, l'inversion « descriptive » de la formule de Hausdorff, c'est-à-dire qu'il définit les opérations $x+y$ et $[x, y]$ à partir de propriétés du groupe L. Il nous faut encore rechercher comment calculer ces opérations à partir des opérations connues du groupe : produit, exponentiation, passage à la limite. Remarquons qu'il est impossible de calculer la somme $x+y$ et le crochet $[x, y]$ de deux éléments de L au moyen de produits et de passages à la limite (sans considérer les puissances fractionnaires). En effet, le groupe libre G engendré par les générateurs indépendants (x_ι) de L n'est pas un sous-anneau de Lie, non plus que son adhérence $\overline{G}$.

Il serait sans doute intéressant (pour le problème de Burnside en particulier) de pouvoir caractériser, de façon « constructive », le plus petit sous-groupe de L qui contienne G et soit en même temps un sous-anneau de Lie. Faute de pouvoir résoudre ce problème, nous allons considérer un sous-groupe M de L qui contiendra G, sera un sous-anneau de Lie, et ne sera « pas trop grand » pour les applications que nous en voulons donner.

Définition (2.5). — Dans l'algèbre de Lie libre complétée à coefficients rationnels L, nous désignerons par M l'ensemble des éléments dont les composantes homogènes de degré i sont des sommes d'alternants de degré i par rapport aux générateurs indépendants (x_ι) de L, multipliés par des coefficients appartenant à Q_i (pour tout entier $i \geqq 1$). M est en même temps une sous-algèbre de Lie fermée et un sous-groupe de L.

Le fait que M soit une sous-algèbre fermée de L résulte immédiatement de la définition ; la propriété arithmétique des coefficients de la formule de Hausdorff, rappelée plus haut, montre que M est un sous-groupe.

Théorème (2.6). — *Soit*

$$g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i = \Pi_{i=1}^{\infty} b_i^{t^i}$$

une suite typique à valeurs dans M. *Alors, pour tout* $i \geqq 1$,

$$a_i \in \mathrm{M} \qquad \text{et} \qquad b_i \in \mathrm{M}.$$

Démonstration. — Considérons le *groupe abélien* $L/M = N$. Le groupe abélien N est gradué, comme L et son sous-groupe homogène M. Sa composante homogène de degré i est le quotient des composantes homogènes de degré i de L et de M : c'est donc un groupe de torsion, mais (d'après la définition de M), l'ordre d'aucun de ses éléments ne divise $i!$ Considérons alors la relation $g(t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} t^i a_i$, où $g(t) \in M$ pour tout entier $t \geqq 0$. Si nous désignons par $\hat{a}$ la classe mod M de $a \in L$, nous avons donc $\Sigma_{i=1}^{\infty} t^i \hat{a}_i = 0$ dans N. De plus, puisque $g(t)$ est une suite typique, $a_i \in L_i$ pour tout i, et $\hat{a}_i \in N_i = L_i + M/M = L_i/M \cap L_i$. Le quotient N_i/N_{i+1} s'identifie à la composante homogène de degré i de N, et nous pouvons appliquer (1.7c), qui nous donne le résultat cherché : $\hat{a}_i = 0$ pour tout i.

Pour démontrer que $b_i \in M$ pour tout i, nous ne pouvons pas appliquer la même méthode au groupe *non abélien* L, car M n'en est pas un sous-groupe invariant. Par contre, il nous suffit d'appliquer le résultat précédent, joint au théorème (2.3) (nous pourrions aussi établir la proposition directement, en démontrant par récurrence sur j, que $b_i \in M + L_j$ pour tous i, j).

Considérons maintenant dans le groupe libre G engendré par les générateurs $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de L une famille d'éléments $(y_\nu)_{\nu \in N}$ possédant les mêmes propriétés qu'en (1.13). Nous avons vu que tout élément de L s'écrit univoquement comme un produit bien ordonné convergent : $\Pi_\nu y_\nu^{h_\nu}$, où $h_\nu \in Q$.

Lemme (2.7). — *Soit* $z \in L$, $z = \Pi_\nu y_\nu^{h_\nu}$. *Alors* $z \in M$ *si et seulement si* $h_\nu \in Q_{\omega(y_\nu)}$ *pour tout* $\nu \in N$.

La démonstration procède, comme d'habitude, par récurrence sur $\omega(y_\nu)$. Désignons généralement par ν_i le plus petit indice ν pour lequel $\omega(y_\nu) = i$. Supposons déjà démontré $h_\nu \in Q_{\omega(y_\nu)}$ pour $\nu < \nu_i$. Considérons $z_i = (\Pi_{\nu < \nu_i} y_\nu^{h_\nu})^{-1} z$. Pour tout $\nu < \nu_i$, nous avons $y_\nu \in M$ (puisque $y_\nu \in G$) et $y_\nu^{h_\nu} = h_\nu y_\nu \in M$; puisque $h_\nu \in Q_{\omega(y_\nu)}$. Ainsi $z_i \in M \cap L_i$, et les exposants $h_\nu (\nu_i \leqq \nu < \nu_{i+1})$ sont uniquement déterminés par la relation :

$$z_i - \Sigma_{\nu_i \leqq \nu < \nu_i} h_\nu y_\nu \in L_{i+1}.$$

Cette relation entraîne $h_\nu \in Q_i$ pour $\nu_i \leqq \nu < \nu_{i+1}$, puisque $z_i \in M \cap L_i$ et que les $(\gamma_\nu)_{\nu_i \leqq \nu < \nu_{i+1}}$ constituent, modulo L_{i+1}, une base de la composante homogène de degré i du sous-anneau de Lie libre engendré par les $(x_\iota)_{\iota \in I}$.

Nous pouvons maintenant définir des formules « constructives » d'inversion de la formule de Hausdorff. Supposons que L possède deux générateurs indépendants, notés x et y, et qu'on ait fait choix d'une suite d'éléments z_i possédant les propriétés de la famille $(y_\nu)_{\nu \in N}$ précédente. Cela peut se faire, par exemple, en utilisant le procédé de Marshall Hall [7]. Alors il existe deux suites d'exposants rationnels, h_i et k_i, tels que l'on ait :

$$x + y = \Pi_{i=1}^{\infty} z_i^{h_i}, \qquad [x, y] = \Pi_{i=1}^{\infty} z_i^{k_i}, \tag{2.8}$$

où

$$h_i \in Q_{\omega(z_i)}, \qquad k_i \in Q_{\omega(z_i)}.$$

On aura, par exemple,

$$x+y=xy(x,y)^{-\frac{1}{2}}\dots,\qquad [x,y]=(x,y)\left((x,y),y\right)^{\frac{1}{2}}\dots.$$

Connaissant les premiers termes de la formule de Hausdorff, on pourra calculer les premiers termes des formules d'inversion, par l'algorithme exposé dans la démonstration de (2.7).

Nous étudierons plus loin (§ 4) dans quels groupes il est possible d'appliquer les formules d'inversion de façon qu'elle définissent une structure d'anneau de Lie, et qu'on puisse, au moyen de la formule de Hausdorff, retrouver la structure de groupe dont on était parti. Nous aurons besoin, pour cela, de résultats auxiliaires, exposés au paragraphe 3. Par contre, on démontre immédiatement que les formules d'inversion s'appliquent dans M.

(2.9) *Remarque.* — Les formules d'inversion (2.8) dépendent formellement du choix de la suite z_i, mais les valeurs des produits correspondants n'en dépendent manifestement pas. Nous pouvons plus généralement chercher à résoudre le problème suivant : soit k un nombre rationnel ; existe-t-il une suite u_i de produits de commutateurs en x et y de poids $\geqq 3$ et une suite d'exposants k_i, telles que le produit infini ordonné $xy(x,y)^k u_1^{k_1}u_2^{k_2}\dots u_i^{k_i}\dots$ converge lorsque l'on substitue à x et y deux éléments quelconques de L et définisse ainsi dans L une opération associative? La réponse est affirmative, quel que soit k. Si $k\neq -\frac{1}{2}$; on obtient la loi de groupe non abélien $\left(x^{\frac{2k+1}{2}}y^{\frac{2k+1}{2}}\right)^{\frac{2}{2k+1}}$, et en particulier la loi du groupe opposé yx pour $k=-\frac{3}{2}$; si $k=-\frac{1}{2}$, on obtient la loi de groupe abélien $x+y$ que nous avons déjà trouvée [15].

3. Quelques problèmes d'extension et de prolongement. — *Définitions et notations.* P désignant un ensemble de nombres premiers, n un entier positif, on exprimera par la notation n/P le fait que tous les facteurs premiers de n appartiennent à P.

Un groupe multiplicatif G (dont l'unité est notée 1) sera dit *sans* P-*torsion* si $x\in\mathrm{G}$, n/P et $x^n=1$ impliquent $x=1$. G sera dit P-*divisible* si $x\in\mathrm{G}$, n/P impliquent qu'il existe $y\in\mathrm{G}$ avec $y^n=x$ (il suffirait, dans ces deux définitions, de prendre pour n un nombre premier appartenant à P). Un élément $x\in\mathrm{G}$ sera dit élément de P-torsion s'il existe n, avec n/P et $x^n=1$; si tous les éléments de G sont de P-torsion, G sera dit un *groupe de* P-*torsion*.

Dans tout ce paragraphe nous désignerons (P_i) une suite d'ensemble de nombres premier $\mathrm{P}_1\subset\mathrm{P}_2\subset\dots\subset\mathrm{P}_i\subset\mathrm{P}_{i+1}\subset\dots$. Il sera commode [dans la

(15) Ce genre de questions sera étudié dans un article à paraître sous le titre : *Éléments d'une théorie algébrique des groupes analytiques.*

démonstration de (3.2)] de désigner par P_0 l'ensemble vide : ainsi n/P_0 signifiera $n = 1$.

Nous aurons à considérer dans un groupe G des suites de sous-groupes invariants (H_i), où $i = 1, 2, \ldots$. Il s'agira toujours, sauf mention expresse du contraire, de suites décroissantes commençant à G :

$$H_1 = G \supset H_2 \supset \ldots \supset H_i \supset H_{i+1} \supset \ldots.$$

Rappelons qu'une telle suite est dite *finie* si $H_i = (1)$ à partir d'une certaine valeur de i; resp. *séparante* si $\bigcap_i H_i = (1)$; (H_i) est une *suite centrale* si $(G, H_i) \subset H_{i+1}$ pour tout i; resp. une N-*suite* si $(H_i, H_j) \subset H_{i+j}$ pour tout i, j.

Lemme (3.1). — *Soit* G *un groupe nilpotent de classe au plus égale à* c, x *et* y *deux éléments de* G. *Alors :*

a. Si $(x^r, y^s) = 1$, $(x, y)^{(rs)^{c-1}} = 1$;

b. Si $x^r = y^s = 1$ *et si* t *désigne le plus grand commun diviseur des entiers* r *et* s, $(xy)^{rst^{c-2}} = 1$.

Démonstration. — Considérons le sous-groupe H de G engendré par x et y, et sa suite centrale descendante (H_i). La classe de H ne dépasse pas celle de G, et ainsi $H_{c+1} = (1)$. Considérons (*cf.* chap. I, § 2) l'anneau de Lie $\mathfrak{L}(H_i) = \Sigma_i H_i/H_{i+1}$. Il est engendré par les classes $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ de x et y mod H_2; $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont de degré 1 dans $\mathfrak{L}(H_i)$, et les éléments de degré 2 sont des multiples entiers de $[\tilde{x}, \tilde{y}]$. Nous en déduisons que si, pour un entier n, $n[\tilde{x}, \tilde{y}] = 0$, $n\tilde{z} = 0$ pour tout $\tilde{z} \in \mathfrak{L}(H_i)$, $\tilde{z}$ étant homogène de degré ≥ 2. Il suffit de raisonner par récurrence sur le degré de $\tilde{z}$: si $\tilde{z}$ est homogène de degré $i \geq 3$, $\tilde{z}$ est une somme de crochets $[\tilde{u}, \tilde{v}]$, où $\deg\tilde{u} + \deg\tilde{v} = i$; alors une au moins des relations $2 \leq \deg\tilde{u} < i$ et $2 \leq \deg\tilde{v} < i$ est vérifiée; si, par exemple, $2 \leq \deg\tilde{u} < i$, $n\tilde{u} = 0$ par l'hypothèse de récurrence, donc $n\tilde{z} = 0$. Revenant à la définition de $\mathfrak{L}(H_i)$, nous voyons que $z \in H_i$ implique $z^n \in H_{i+1}$ et, par une récurrence évidente $z^{n^j} \in H_{i+j}$. En particulier, $z \in H_2$ implique $z^{n^{c-1}} = 1$.

Alors, dans le cas a, $rs[\tilde{x}, \tilde{y}] = 0$, puisque $rs[\tilde{x}, \tilde{y}[= [r\tilde{x}, s\tilde{y}]$ s'identifie à la classe de (x^r, y^s) mod H_3. Ainsi $(x, y)^{(rs)^{t-1}} = 1$.

Dans le cas b,

$$r[\tilde{x}, \tilde{y}] = [r\tilde{x}, \tilde{y}] = 0 \qquad \text{et} \qquad s[\tilde{x}, \tilde{y}] = [\tilde{x}, s\tilde{y}] = 0,$$

puisque ces éléments s'identifient respectivement aux classes mod H_3 de (x^r, y) et (x, y^s). Il existe des entiers r' et s' tels que

$$r'r + s's = t, \qquad \text{d'où} \qquad t[\tilde{x}, \tilde{y}] = 0.$$

Enfin x et y commutent modulo H_2, si bien que $(xy)^{\frac{rs}{t}} \in H_2$, et ainsi $(xy)^{rst^{c-2}} = 1$.

A partir de ce lemme, on démontre immédiatement des théorèmes classiques de la théorie des groupes nilpotents, tels que : l'ensemble des éléments de P-torsion d'un groupe nilpotent est un sous-groupe ; un groupe nilpotent de torsion est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow, etc.

THÉORÈME (3.2). — *Soit, dans un groupe* G, (H_i) *une suite centrale finie* (*resp. une* N*-suite finie*). *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite centrale finie* [*respectivement* N*-suite finie*] (K_i), *telle que, pour tout* i, $H_i \subset K_i$ *et que* K_i/K_{i+1} *soit sans* P_i*-torsion, est que* H_i *soit sans* P_i*-torsion* (*pour tout* i).

Démonstration. — La condition est nécessaire. En effet, supposons l'existence d'une suite (K_i) de sous-groupes de G ayant les propriétés voulues. Soit $x \in H_i$, n/P_i, $x^n = 1$. Alors, si $x \neq 1$, il existe j tel que $x \in K_j$ et $x \notin K_{j+1}$ [puisque (K_i) est finie]. De plus $j \geqq i$, puisque $K_i \supset H_i$. Alors n/P_j (puisque $P_j \supset P_i$), et $x^n = 1 \in K_{j+1}$ implique $x \in K_{j+1}$, contrairement à l'hypothèse (puisque K_j/K_{j+1} est sans P_j-torsion).

La condition est suffisante. Supposons chaque H_i sans P_i-torsion. Définissons F_j par la relation : $x \in F_j$ si et seulement s'il existe n/P_{j-1} tel que $x^n \in H_j$ $(j \geqq 1)$. Si nous considérons l'homomorphisme canonique f_j de G sur G/H_j, nous voyons que $x \in F_j$ si et seulement si $f_j(x)$ est un élément de P_{j-1}-torsion dans G/H_j. F_j est donc un sous-groupe invariant de G, contenant H_j (c'est l'image réciproque, par f_j, du sous-groupe de (P_{j-1}-torsion de G/H_j).

Posons maintenant $L_i = \bigcap_{j=1}^{i} F_j$. Alors L_i est un sous-groupe invariant de G,

$$L_1 = G \supset L_2 \supset \ldots \supset L_i \supset L_{i+1} \supset \ldots,$$

et $L_i \supset H_i$ pour tout i. Montrons que $H_{c+1} = (1)$ entraîne $L_{c+1} = (1)$. Soit $x \in L_{c+1}$. Il existe alors des entiers $n_1, \ldots, n_c$ tels que n_i/P_i et $x^{n_i} \in H_{i+1}$. Supposons démontré que $x^{n_i} = 1$ $(i \geqq 2)$. Alors $x^{n_{i-1}} \in H_i$ et $(x^{n_{i-1}})^{n_i} = 1$, ce qui implique $x^{n_{i-1}} = 1$. Comme $x^{n_i} \in H_{i+1} = (1)$, on parvient à $x^{n_1} = 1$ qui implique $x = 1$. Montrons que L_i/L_{i+1} est sans P_i-torsion. Soit $x \in L_i$, n/P_i, $x^n \in L_{i+1}$. Puisque $L_{i+1} = L_i \cap F_{i+1}$, il suffit d'établir que $x \in F_{i+1}$. Or, puisque $x^n \in F_{i+1}$, il existe n'/P_i tel que $(x^n)^{n'} \in H_{i+1}$. Mais nn'/P_i et ainsi $x^{nn'} \in H_{i+1}$, ce qui implique $x \in F_{i+1}$. Nous avons donc établi le théorème dans le cas d'une suite finie de sous-groupes invariants. Montrons de plus que si (K_i) est une suite finie de sous-groupes invariants telle que, pour tout i, $H_i \subset K_i$ et que K_i/K_{i+1} soit sans P_i-torsion, $L_i \subset K_i$ pour tout $L_i \subset K_i$. Sinon nous pourrions trouver $x \in L_i$ et $j < i$ avec $x \in K_j$, $x \notin K_{j+1}$. Mais alors $x \in F_{j+1}$; donc il existe n/P_j tel que $x^n \in H_{j+1} \subset K_{j+1}$. Puisque K_j/K_{j+1} est sans P_j-torsion, $x \in K_{j+1}$, contrairement à l'hypothèse. La suite (L_i) est donc celle qui décroît le plus vite parmi les suites répondant à la question.

Utilisons maintenant le fait que (H_i) est une suite centrale. Soit $x \in G$,

$y \in L_i$. Pour tout j tel que $1 \leq j \leq i$, il existe n_j / P_{j-1} tel que $y^{n_j} \in H_j$. Donc $(x, y^{n_j}) \in H_{j+1}$ et ainsi $(x, y)^{n_j^{c-1}} \in H_{j+1}$ [appliquer (3.1 a) à G/H_{j+1}]. Comme n_j^{c-1} / P_j, $(x, y) \in F_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq i$, et $(x, y) \in L_{j+1}$, ce qui montre que (L_i) est une suite centrale.

Enfin, supposons que (H_i) soit une N-suite. Soit $x \in L_i$ et $y \in L_j$. Nous voulons montrer que $(x, y) \in L_{i+j}$. Pour tout k tel que $2 \leq k \leq i+j$, nous pouvons trouver i' et j' tels que $1 \leq i' \leq i$, $1 \leq j' \leq j$ et $i' + j' = k$. Alors, puisque $x \in F_{i'}$ et $y \in F_{j'}$, il existe $m / P_{i'-1}$ et $n / P_{j'-1}$ tels que $x^m \in H_{i'}$, $y^n \in H_{j'}$, et ainsi $(x^m, y^n) \in H_k$. Appliquant (3.1 a) à G/H_k, nous voyons que $(x, y)^{(mn)^{c-1}} \in H_k$, donc $(x, y) \in F_k$, puisque mn / P_{k-1}. Ainsi $(x, y) \in L_{i+j}$.

Lemme (3.3). — *Soit* (H_i) *une suite centrale séparante dans* G *supposé* (H_i)*-complet* [16] :

a. Si H_i / H_{i+1} *est* P_i*-divisible pour tout* i, *chaque* H_i *est* P_i*-divisible.*

b. Si H_i / H_{i+1} *est sans* P_i*-torsion pour tout* i, $x \in H_i$, $y \in H_i$, n / P_i *et* $x^n = y^n$ *impliquent* $x = y$. *En particulier,* H_i *est sans* P_i*-torsion.*

c. Si H_i *est* P_i*-divisible et sans* P_i*-torsion pour tout* i, *alors* H_i / H_{i+1} *est* P_i*-divisible et sans* P_i*-torsion pour tout* i.

d. Si tous les P_i *sont égaux à un même ensemble de nombres premiers* P, *et si, pour tout* i, H_i / H_{i+1} *est sans* P*-torsion, alors* $x \in H_i$, n / P et $y^n = x$ *impliquent* $y \in H_i$. *En particulier, si* G *est* P*-divisible, il en est de même de tous les* H_i.

Démonstration. — *a.* Soit $x \in H_i$, n / P_i. Supposons établie l'existence d'un $y \in H_i$ tel que $y^n \equiv x \pmod{H_{i+j}}$, $j \geq 0$. Alors $xy^{-n} \in H_{i+j}$ et H_{i+j} / H_{i+j+1} est P_i-divisible. Il existe donc $z \in H_{i+j}$ tel que $z^n \in xy^{-n} \pmod{H_{i+j+1}}$ et, puisque (H_i) est une suite centrale,

$$x \equiv (yz)^n \pmod{H_{i+j+1}}, \quad \text{avec} \quad yz \equiv y \pmod{H_{i+j}}.$$

b. Si l'on avait $x \neq y$, soit $x = yz$, $z \in H_j$, $z \notin H_{j+1}$ (avec $j \geq i$). Alors $y^n \equiv y^n z^n \pmod{H_{j+1}}$, et puisque H_j / H_{j+1} est sans P_i-torsion, $z \in H_{j+1}$ contrairement à l'hypothèse.

c. Il est évident que H_i / H_{i+1} est P_i-divisible (comme groupe quotient d'un groupe P_i-divisible). Montrons que si H_i / H_{i+1} n'était pas sans P_i-torsion, H_i aurait un élément de P_i-torsion. Nous pourrions trouver en effet n / P_i, $x \in H_i$, $x \notin H_{i+1}$, avec $x^n \in H_{i+1}$. Supposons déjà construit $y \in x H_{i+1}$ tel que $y^n \in H_{i+j}$. Alors il existe $z \in H_{i+j}$, avec $z^n = y^n$ et, par conséquent, $(yz^{-1})^n \in H_{i+j+1}$, $yz^{-1} \equiv y \pmod{H_{i+j}}$. Il en résulte donc l'existence dans H_i d'un élément $u \notin H_{i+1}$ avec $u^n = 1$, contrairement à l'hypothèse.

d. Soit $y \in H_j$, $y \notin H_{j+1}$. Alors $x = y^n \notin H_{j+1}$ et ainsi $j \geq i$, $y \in H_i$.

---

(16) C'est-à-dire que G est complet pour la topologie où les sous-groupes (H_i) forment un système fondamental de voisinages de l'élément neutre.

LEMME (3.4) (Unicité des prolongements d'homomorphismes). — *Soient* G *un groupe,* G′ *un sous-groupe de* G, (K_i) *une suite finie de sous-groupes invariants de* G *telle que, pour tout* i, $K_i(G' \cap K_i)K_{i+1}$ *soit un groupe de* P_i*-torsion. Soit, d'autre part,* H *un groupe,* (L_i) *une suite centrale finie dans* H *telle que, pour tout* i, $L_i L_{i+1}$ *soit sans* P_i*-torsion. Soient enfin* f *et* g *deux homomorphismes de* G *dans* H *tels que* $f(K_i) \subset L_i$ *et* $g(K_i) \subset L_i$ *pour tout* i. *Alors* f *et* g *sont identiques si leurs restrictions à* G′ *coïncident.*

Démonstration. — Supposons démontré que f et g coïncident sur K_{i+1}, et montrons que f et g coïncident sur K_i [l'hypothèse de récurrence sera évidemment satisfaite pour i assez grand, puisque (K_i) est finie]. Soit $x \in K_i$. Par hypothèse il existe n premier à P_i, $y \in G'$, $z \in K_{i+1}$ tels que $x^n = yz$. Alors

$$f(x^n) = f(yz) = f(y)f(z) = g(y)g(z) = g(yz) = g(x^n).$$

Ainsi

$$f(x)^n = g(x)^n, \qquad f(x) \in L_i, \quad g(x) \in L_i, \quad \text{ce qui implique } f(x) = g(x), \text{ d'après (3.3}b\text{)}.$$

LEMME (3.5) (Existence du prolongement simple). — *Soient* G *un groupe,* G′ *un sous-groupe invariant de* G, (K_i) *une suite centrale finie dans* G. *On suppose que* $G' \supset K_{j+1}$ *et que* G/G' *est un groupe cyclique d'ordre* n, *avec* n *premier à* P_j, *engendré par la classe* mod G′ *d'un élément* x *de* K_j. *Soient, d'autre part,* H *un groupe,* (L_i) *une suite centrale finie dans* H *telle que chaque* $L_i L_{i+1}$ *soit sans* P_i*-torsion. Soit enfin* f *un homomorphisme de* G′ *dans* H *tel que* $f(G' \cap K_i) \subset L_i$ *pour tout* i. *Alors, il existe un prolongement* g *de* f *à* G *tel que, pour tout* i, $g(K_i) \subset L_i$ *si et seulement s'il existe* $u \in L_j$ *tel que* $u^n = f(x^n)$.

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la satisfaite. Tout élément de G s'écrit sous la forme $x^r y$, $y \in G'$. Posons $g(x^r y) = u^r f(y)$; g est alors une application univoque de G dans H. Si, en effet,

$$x^r y = x^{r'} y', \qquad x^{r-r'} = y' y^{-1} \in G'.$$

Donc

$$r - r' = ns, \qquad y' y^{-1} = (x^n)^s \qquad \text{et} \qquad f(y')f(y)^{-1} = u^{ns},$$

d'où

$$u^r f(y) = u^{r'} f(y'),$$

ce qui montre que g est univoque.

Soit maintenant $y \in G'$; alors $xyx^{-1} \in G'$ et, si g est un homomorphisme, on doit avoir

$$f(xyx^{-1}) = uf(y)u^{-1}.$$

Nous allons démontrer la relation équivalente

$$f\big((x, y)\big) = \big(u, f(y)\big).$$

Considérons la suite typique (x^t, y) à valeurs dans K_{j+1}. D'après (1.10), il existe une suite finie d'éléments de K_{j+1} : $a_1, \ldots, a_l$ telle que

$$(x^t, y) = a_1^t a_2^{\binom{t}{2}} \ldots a_l^{\binom{t}{l}}.$$

De plus $a_1 = (x, y)$. Alors, appliquant l'homorphisme f :

$$f\big((x^t, y)\big) = f(a_1)^t \ldots f(a_l)^{\binom{t}{l}}.$$

Considérons, d'autre part, la suite typique $\big(u^t, f(y)\big)$ dans L_{j+1}. D'après (1.10), il existe une suite finie d'éléments de L_{j+1} : $b_1, \ldots, b_m$ telle que

$$\big(u^t, f(y)\big) = b_1^t \ldots b_m^{\binom{t}{m}}.$$

De plus, $b_1 = \big(u, f(y)\big)$. Posons maintenant $t = nt'$; pour toutes les valeurs entières de t', $f\big((x^{nt'}, y)\big) = \big(u^{nt'}, f(y)\big)$. Ainsi

$$f(a_1)^{nt'} \ldots f(a_l)^{\binom{nt'}{l}} = b_1^{nt'} \ldots b_m^{\binom{nt'}{m}}$$

pour toutes les valeurs entières de t'. D'après (1.7d) que nous appliquons au groupe L_{j+1} avec sa suite centrale $L_{j+i}(i \geqq 1)$, en prenant $P_i(t) = \binom{nt}{i}$, cela implique $f(a_i) = b_i$ pour tout i, et, en particulier

$$f(a_1) = f\big((x, y)\big) = b_1 = \big(u, f(y)\big).$$

Nous avons donc $f(xyx^{-1}) = uf(y)u^{-1}$ et, par une récurrence évidente,

$$f(x^r y x^{-r}) = u^r f(y) u^{-r}$$

pour tout entier r. Il en résulte que g est un homomorphisme. Soient, en effet, $x^r y$ et $x^{r'} y'$ deux éléments de $G(y, y' \in G')$. Ainsi

$$x^r y x^{r'} y' = x^{r+r'} x^{-r'} y x^{r'} y'.$$

Alors

$$g(x^r y x^{r'} y') = u^{r+r'} f(x^{-r'} y x^{r'} y') = u^{r+r'} f(x^{-r'} y x^{r'}) f(y') = u^r f(y) u^{r'} f(y') = g(x^r y) g(x^{r'} y').$$

Il reste seulement à démontrer que $g(K_i) \subset L_i$ pour i. Soit d'abord $i \leqq j$; alors $x^r y \in K_i$, $y \in G'$ impliquent $y \in G' \cap K_i$. Dans ce cas

$$g(x^r y) = u^r f(y) \in L_i, \qquad \text{puisque} \quad u \in L_j \quad \text{et} \quad f(G' \cap K_i) \subset L_i.$$

Si maintenant $i > j$,

$$x^r y \in K_i \subset G' \qquad \text{et} \qquad g(x^r y) = f(x^r y) \in L_i.$$

Théorème (3.6). — *Soient* G *un groupe,* G′ *un sous-groupe de* G, (K_i) *une suite centrale finie dans* G, *telle que, pour tout* i, $K_i/(K_i \cap G')K_{i+1}$ *soit un groupe de* P_i*-torsion. Soient* H *un groupe,* (L_i) *une suite centrale finie dant* H *telle que, pour*

tout i, L_i/L_{i+1} soit P_i-divisible et sans P_i-torsion. Soit enfin f un homomorphisme de G' dans H tel que, pour tout i, $f(G' \cap K_i) \subset L_i$. Alors il existe un homomorphisme g et un seul de G dans H, prolongeant f, et tel que $g(K_i) \subset L_i$ pour tout i.

Démonstration. — Nous considérons les couples (Γ, h) constitués par un sous-groupe Γ de G contenant G', et un homomorphisme h de Γ dans H, prolongeant f, et tel que $h(\Gamma \cap K_i) \subset L_i$ (pour tout i). Nous introduisons naturellement une relation d'ordre dans l'ensemble de ces couples, en posant $(\Gamma_1, h_1) \leq (\Gamma_2, h_2)$ si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ et si h_2 est un prolongement de h_1. Alors l'ensemble ainsi ordonné est inductif, et d'après le lemme classique de Zorn, il existe un couple (Γ', h') maximal. Montrons que $\Gamma' = G$. Sinon soit $j+1$ le plus petit entier tel que $K_{j+1} \subset \Gamma'$. Soit $x \in K_j$, $x \notin \Gamma'$. Alors $x\Gamma' x^{-1} = \Gamma'$. Soit Γ le sous-groupe de G engendré par Γ' et x. Γ/Γ' est un groupe cyclique engendré par la classe de x modulo Γ', et d'ordre n avec n/P_j. Puisque chaque L_i/L_{i+1} est P_i-divisible, L_j est P_j-divisible (3.3a). Donc il existe $u \in L_j$ tel que $u^n = h'(x^n)$. Nous pouvons donc appliquer (3.5), en faisant jouer à Γ, Γ', $(\Gamma \cap K_i)$, x, h' les rôles respectifs de G, G', (K_i), x, f dans l'énoncé de ce lemme. Nous en déduisons l'existence d'un prolongement h de h' à Γ tel que $h(\Gamma \cap K_i) \subset L_i$ pour tout i, contrairement à l'hypothèse que (Γ', h') est maximal. Ainsi $\Gamma' = G$, le prolongement g de f à G existe et est unique d'après (3.4).

Définition (3.7). — Soit G un groupe, (K_i) une suite centrale finie telle que, pour tout i, K_i/K_{i+1} soit sans P_i-torsion. Nous dirons qu'un groupe $\overline{G}$ contenant G comme sous groupe et muni d'une suite centrale finie $(\overline{K}_i)$ est une (P_i, K_i)-complétion de G si $K_i = K_i \cap G$, $\overline{K}_i/\overline{K}_{i+1}$ est sans P_i-torsion et P_i-divisible et enfin $\overline{K}_i/K_i\overline{K}_{i+1}$ est un groupe de P_i-torsion, pour tout $i \geq 1$ (16).

Nous démontrerons que, sous les hypothèses de (3.7), un groupe G admet une (P_i, K_i)-complétion qui est bien déterminée à un isomorphisme canonique près. Nous pouvons considérer cette proposition comme classique dans le cas des groupes abéliens :

Soit A un groupe abélien sans P-torsion ; alors il existe un groupe abélien $\overline{A}$, dit P-complétion de A, tel que $\overline{A}$ contienne A, soit sans P-torsion, P-divisible et que $\overline{A}/A$ soit un groupe de P-torsion. Ces propriétés déterminent $\overline{A}$ à un isomorphisme canonique près conservant les éléments de A ; si de plus B est un groupe sans P-torsion, contenant A et tel que B/A soit un groupe de P-torsion, B s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $\overline{A}$ (17).

(16) Pour simplifier les énoncés, nous nous sommes permis un abus de langage en considérant une extension de G comme un groupe contenant G. Il serait plus correct de parler d'un groupe contenant une image isomorphe déterminée de G.

(17) Rappelons que $\overline{A}$ peut être obtenu comme un produit tensoriel $Q_P \otimes A_P$, où Q_P désigne l'anneau des nombres rationnels de la forme $\frac{r}{s}$, où $r \in Z$, s/P.

Considérons d'abord un groupe G et une suite centrale (resp. N-suite) finie (K_i) dans G telle que K_i/K_{i+1} soit sans P_i-torsion pour tout i et que K_i/K_{i+1} soit P_i-divisible pour $i \geqq j+1$, j désignant un entier positif fixé. Soient G^1 une extension de G, (K_i^1) une suite centrale (resp. N-suite) finie dans G^1. On suppose que :

$$G^1 = G K_j^1, \qquad G \cap K_i^1 = K_i;$$

K_i^1/K_{i+1}^1 est sans P_i-torsion ; $K_i^1/K_iK_{i+1}^1$ est un groupe de P_i-torsion (pour tout i). On démontre facilement que ces conditions impliquent que

$$K_i^1 = K_i \quad \text{pour } i \geqq j+1 \qquad \text{et que} \qquad K_i^1 = K_iK_{i+1}^1 \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq j-1.$$

Par conséquent,

$$K_i^1/K_iK_{i+1}^1 = (1) \qquad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Désignons par A le groupe abélien sans P_j-torsion K_j/K_{j+1}, et par $\overline{A}$ une P_j-complétion de A déterminée. Nous pouvons considérer $K_j^1/K_{j+1}^1 = K_j^1/K_{j+1}$ comme une extension de K_j/K_{j+1}. Le quotient $(K_j^1/K_{j+1})/(K^j/K_{j+1})$ s'identifie à K_j^1/K_j et est donc un groupe de P_j-torsion. Par conséquent, K_j^1/K_{j+1} s'identifie canoniquement à un sous-groupe de A^1 de $\overline{A}$ (avec $A \subset A_1 \subset \overline{A}$).

Soit G^2 une extension de G munie d'une suite centrale (resp. N-suite) (K_i^2) possédant, par rapport à $G(K_i)$ les mêmes propriétés que G^1, (K_i^1). Il lui correspond un sous-groupe A^2 de $\overline{A}$. Interprétons la relation d'inclusion $A^1 \subset A^2$. Soit $x^{(1)} \in K_j^1$; alors il existe n/P_j tel que $(x^{(1)})^n = x \in K_j$; la relation $A^1 \subset A^2$ signifie qu'il existe dans K_j^2 un élément $x^{(2)}$ tel que

$$(x^{(2)})^n = x \qquad (\mathrm{mod}\, K_{j+1}).$$

Mais, puisque K_i/K_{i+1} est P_i-divisible pour $i \geqq j+1$, la démonstration du lemme (3.3 *a*) montre qu'on peut choisir $x^{(2)}$ de telle sorte que

$$(x^{(2)})^n = x = (x^{(1)})^n.$$

Alors, en appliquant comme dans la démonstration du théorème (3.6), le lemme de Zorn et le lemme (3.5), on démontre que la relation $A^1 \subset A^2$ équivaut à l'existence d'un homomorphisme f de G^1 dans G^2, induisant l'identité sur G et tel que $f(K_i^1) \subset K_i^2$ pour tout i ; f est nécessairement unique d'après (3.4) ; et l'on démontre immédiatement que c'est un isomorphisme.

Nous voyons donc que la donnée de A^1 détermine l'extension G^1, (K_i^1) à un isomorphisme canonique près conservant les éléments de G. A quels sous-groupes de $\overline{A}$ contenant A correspondent effectivement des extensions de G ? On démontre sans peine que, si A^1 correspond à une extension, il en est de même de tout sous-groupe de A^1 contenant A. Nous voulons démontrer qu'il correspond une extension à $\overline{A}$ lui-même ; pour cela nous appliquons encore le lemme de Zorn : l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-groupes de $\overline{A}$

contenant A et auxquels correspondent des extensions est inductif. Soit, en effet, $(A^\iota)_{\iota\in I}$ une famille de tels sous-groupes, ι parcourant un ensemble I totalement ordonné ([18]). Nous choisissons des modèles G^ι, (K_i^ι) des extensions correspondantes, qui sont déterminés à des isomorphismes canoniques près. Pour $\iota<\lambda$, nous avons, un isomorphisme déterminé $f_{\lambda\iota}$ de G^ι, (K_i^ι) dans G^λ, (K_i^λ), la propriété de transitivité permettant de considérer la limite inductive $\hat{G}$, $(\hat{K}_i)$ des G^ι, (K_i^ι) est satisfaite, et l'on démontre immédiatement que $\hat{G}$, $(\hat{K}_i)$ possède les propriétés voulues et correspond à la réunion des sous-groupes A^ι. D'après le lemme de Zorn, l'existence d'une extension G correspondant à A est donc ramenée au problème suivant : si K_j/K_{j+1} n'est pas P_j-divisible, existe-t-il une extension propre G^1, (K_i^1) de G ayant les propriétés indiquées? Établissons d'abord le :

Lemme (3.8). — *Soit* G *un groupe,* (K_i) *une suite centrale finie dans* G *telle que* K_i/K_{i+1} *soit* P_i*-divisible et sans* P_i*-torsion pour* $i\geq j+1$ (*j désignant un entier positif fixe*). *Soit* α *un automorphisme de* G *tel que :*

(A) : *pour tout i et tout* $x\in K_i$, $\alpha x.x^{-1}\in K_{i+j}$ [*ou resp.* (B) *pour tout* $x\in G$, $\alpha x.x^{-1}\in K_{j+1}$ *et, pour tout i et tout* $x\in K_i$, $\alpha x.x^{-1}\in K_{i+1}$].

Alors si n/P_{j+1}, *il existe un automorphisme* β *de* G *et un seul vérifiant* (A) [*resp.* (B)] *et tel que* $\beta^n=\alpha$.

Démonstration. — Soit c la longueur de la suite centrale (K_i), c'est-à-dire l'entier c tel que $K_c\neq(1)$ et $K_{c+1}=(1)$. Notre démonstration va procéder par récurrence sur c. Remarquons d'abord que si $c\leq j$, la condition (A) [resp. (B)] implique que α et β sont l'automorphisme identique, et la proposition est triviale. Nous allons donc supposer $c\geq j+1$, et la proposition démontrée pour les suites de longueur strictement inférieure à c.

1° Considérons le groupe $G^*=G/K_c$ avec sa suite centrale (K_i^*) définie par $K_i^*=K_i/K_c$ pour $1\leq i\leq c-1$, et $K_i^*=(1)$ pour $i\geq c$. La longueur de (K_i^*) est au plus $c-1$; l'automorphisme α conserve K_c et définit donc un automorphisme α^* de G^*. Nous voyons immédiatement que les conditions imposées à (K_i) et α sont satisfaites dans le groupe G^* pour (K_i^*) et α^*. Il existe un automorphisme β^* de G^* et un seul, vérifiant (A) [resp. (B)] par rapport à (K_i^*) et tel que $(\beta^*)^n=\alpha^*$.

Considérons le groupe K_2 avec sa suite centrale (K_i'), où $K_i'=K_{i+1}$. (K_i') est de longueur $c-1$. La restriction de α à K_2 vérifie la condition (A) [resp. vérifie la condition (B) en remplaçant j par $\mathrm{Sup}(j-1, 1)$]. Dans tous les cas, les hypothèses faites sur G, (K_i) et α sont vérifiées pour K_2, (K_i') et la restriction de α. Il existe donc un automorphisme γ de K_2 et un seul, vérifiant (A) [resp. (B) modifiée] et tel que γ^n coïncide avec la restriction de α.

([18]) Les A^ι sont eux-mêmes ordonnés par inclusion.

Considérons enfin le groupe $K_2/K_c = K_2^*$, avec sa suite centrale $(K_i'^*)$ ([19]), de longueur $\leq c-2$. Les hypothèses du lemme sont vérifiées pour K_2^*, $(K_i'^*)$ et la restriction de α^* à K_2^*. Nous déduisons donc de notre hypothèse de récurrence (concernant l'unicité) que la restriction de β^* à K_2^* coïncide avec γ^* (obtenu à partir de γ par passage aux quotients).

2° Nous allons chercher à établir l'existence d'un automorphisme β_1 de G conservant K_c et tel que l'automorphisme β_1^* de G^* obtenu par passage aux quotients coïncide avec β^*. Nous commençons par choisir une application β_1 de G dans lui-même telle que la classe $\bmod K_c$ de $\beta_1(x)$ ne dépende que de la classe $\bmod K_c$ de x, et que l'application β_1^* de G^* dans lui-même associé à β_1 coïncide avec β^* : cela peut se faire, par exemple, en choisissant un système de représentants pour les classes de G $\bmod K_c$. Le fait que β^* soit un automorphisme implique :

$$\beta_1(xy) = \beta_1(x)\beta_1(y)g(x, y), \qquad \text{où} \quad x \in G,\ y \in G,\quad g(x, y) \in K_c.$$

Si l'on modifie généralement le choix de β_1, on devra remplacer $\beta_1(x)$ par

$$\beta_1'(x) = \beta_1(x)f(x),$$

où f désigne une application quelconque de G dans K_c. Alors,

$$\begin{aligned}\beta_1'(xy) &= \beta_1(xy)f(xy) = \beta_1(x)\beta_1(y)g(x, y)f(x, y)\\ &= \beta_1'(x)\beta_1'(y)g(x, y)f(x, y)f(x)^{-1}f(y)^{-1}.\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que K_c est contenu dans le centre de G. Ainsi $g(x, y)$ se trouve remplacé par $g(x, y)f(xy)f(x)^{-1}f(y)^{-1}$. Or, nous voulons remplacer $g(x, y)$ par 1. $\beta_1(x)$ peut donc être choisi parmi les automorphismes de G si et seulement s'il existe $f: G \to K_c$ telle que

$$g(x, y) = f(x)f(y)f(x, y)^{-1}.$$

Remarque. — En calculant de deux manières différentes $\beta_1(xyz)$, nous verrions que, quel que soit l'automorphisme β^* de G/K_c que nous cherchons à « remonter » dans G,

$$g(y, z)g(xy, z)^{-1}g(x, yz)g(x, y)^{-1} = 1.$$

β^* définit donc un élément du second groupe de cohomologie $H^2(G/K_c, K_c)$ qui doit être nul. Le résultat s'interprète facilement dans le langage de la cohomologie : le groupe des automorphismes de G/K_c opère (à droite) sur $H^2(G/K_c, K_c)$ et l'élément de $H^2(G/K_c, K_c)$ correspondant à l'extension G doit être invariant par β^*.

3° Supposons que nous ayons pu choisir β_1 de telle sorte que β_1 coïncide

---

([19]) $K_i'^* = K_{i+1}^*$.

avec γ sur K_2 et que $g(x, y)$ ne dépende que des classes de x et de $y \bmod K_2$. Alors

$$g(1, x) = g(x, 1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta_1(xy) = \beta_1(x)\beta_1(y)$$

si x ou y appartient à K_2. Étudions les puissances de β_1,

$$\begin{aligned}\beta_1^2(xy) &= \beta_1\big(\beta_1(x)\beta_1(y)g(x, y)\big) = \beta_1\big(\beta_1(x)\beta_1(y)\big)g(x, y)\\ &= \beta_1^2(x)\beta_1^2(y)g\big(\beta_1(x), \beta_1(y)\big)g(x, y).\end{aligned}$$

Mais $\beta_1(x)x^{-1} \in K_2$ et $\beta_1(y)y^{-1} \in K_2$. Donc

$$g\big(\beta_1(x), \beta_1(y)\big) = g(x, y) \qquad \text{et} \qquad \beta_1^2(xy) = \beta_1^2(x)\beta_1^2(y)g(x, y)^2.$$

Par une récurrence évidente, on démontre que

$$\beta_1^r(xy) = \beta_1^r(x)\beta_1^r(y)g(x, y)^{r\cdot}$$

pour tout entier positif r. Mais l'automorphisme α vérifie $\alpha(x) = \beta_1^n(x)f(x)$, où f est une application de G dans K_c. Nous en déduisons, d'après ce qui précède :

$$g(x, y)^n = f(x)f(y)f(xy)^{-1}.$$

K_c est abélien, sans P_{j+1}-torsion et P_{j+1}-divisible. Il existe donc une application déterminée f' de G dans K_c telle que

$$f'(x)^n = f(x) \qquad \text{et} \qquad g(x, y)f'(xy)f'(x)^{-1}f'(y)^{-1} = 1,$$

ce qui nous permet de choisir pour β_1 un automorphisme de G.

4° Si β_1 coïncide avec γ sur K_2, et si $g(x, y)$ ne dépend que des classes mod K_2 de x et de y, nous avons pour $x \in G$, $y \in K_2$:

$$\beta_1(xy) = \beta_1(x)\beta_1(y)g(x, y) = \beta_1(x)\gamma(y)g(x, 1) = \beta_1(x)\gamma(y).$$

De même :

$$\beta_1(yx) = \gamma(y)\beta_1(x).$$

Nous allons d'abord chercher à vérifier la première relation. Soit $x \in G$, $x \notin K_2$; choisissons arbitrairement $\beta_1(x)$. Alors tout élément de xK_2 s'écrit univoquement sous la forme xy, avec $y \in K_2$, et nous devrons prendre $\beta_1(xy) = \beta_1(x)\gamma(y)$. Nous aurons alors

$$\beta_1(xyy') = \beta_1(x)\gamma(yy') = \beta_1(x)\gamma(y)\gamma(y') = \beta_1(xy)\gamma(y'),$$

c'est-à-dire que la première relation sera vérifiée sur la classe xK_2. Cherchons si, de plus, la deuxième relation peut être vérifiée : nous avons certainement

$$\beta_1(yx) = \gamma(y)\beta_1(x)\theta(y),$$

où θ désigne une application de K_2 dans K_c. On voit immédiatement que θ ne dépend pas du choix de $\beta_1(x)$ [une modification de ce choix conduit à multi-

plier tous les $\beta_1(x)$ par un même élément de K_c quand x parcourt la classe mod K_2 considérée]. De même, $\theta(y)$ est indépendant du choix de x comme représentant de la classe xK_2, car

$$\beta_1(yxy') = \beta_1(yx)\gamma(y') = \gamma(y)\beta_1(x)\theta(y)\gamma(y') = \gamma(y)\beta_1(xy')\theta(y) \quad \text{pour} \quad y, y' \in K_2.$$

Ainsi θ ne dépend que de β^* et de γ, et nous devons montrer que $\theta(y) = 1$. Nous savons que θ est un homomorphisme; en effet :

$$\beta_1(yy'x) = \gamma(yy')\beta_1(x)\theta(yy') = \gamma(y)\beta_1(y'x)\theta(y) = \gamma(y)\gamma(y')\beta_1(x)\theta(y')\theta(y),$$

d'où

$$\theta(yy') = \theta(y)\theta(y').$$

Cherchons à calculer les homomorphismes θ correspondant aux puissances β_1^r. Nous avons

$$\beta_1^2(yx) = \beta_1\big(\gamma(y)\beta_1(x)\theta(y)\big) = \beta_1\big(\gamma(y)\beta_1(x)\big)\theta(y) = \gamma^2(y)\beta_1^2(x)\theta\big(\gamma(y)\big)\theta(y).$$

Par une récurrence évidente, nous parvenons à

$$\beta_1^r(yx) = \gamma^r(y)\beta_1^r(x)\theta\big(\gamma^{r-1}(y)\big)\theta\big(\gamma^{r-2}(y)\big)\dots\theta(y).$$

Mais l'homomorphisme θ associé à β_1^n et γ^n doit être égal à 1, puisque le problème qui nous occupe admet comme solution l'automorphisme α. Ainsi

$$\theta(\gamma^{n-1}y)\dots\theta(y) = 1.$$

Supposons démontré $\theta(y) = 1$ pour $y \in K_{i+1}$, ce qui est évident pour $i = c$, et montrons que $\theta(y) = 1$ pour $y \in K_i$. Nous avons pour tout entier r

$$\theta\big(\gamma^r(y)\big) = \theta(y)\theta\big(y^{-1}\gamma^r(y)\big) = \theta(y),$$

puisque, pour $y \in K_i$, $y^{-1}\gamma^{r-1}(y) \in K_{i+1}$. Ainsi, pour $y \in K_i$, $\theta(y)^n = 1$, ce qui implique $\theta(y) = 1$. Finalement nous parvenons à $\theta(y) = 1$ pour tout $y \in K_2$, et nous pouvons construire un automorphisme β_1 de G, coïncidant avec γ sur K_2, et tel que $\beta_1^* = \beta^*$.

5° Formons maintenant l'automorphisme $\alpha\beta_1^{-n}$ de G. Si nous posons

$$\alpha\beta_1^{-n}(x) = x\,\delta(x),$$

nous voyons que $\delta(x) \in K_c$ pour tout $x \in G$, et que $\delta(x) = 1$ pour tout $x \in K_2$. Alors

$$xy\,\delta(xy) = x\,\delta(x)\,y\,\delta(y) = xy\,\delta(x)\,\delta(y).$$

Ainsi δ est un homomorphisme de G dans K_c. Nous déterminons univoquement $\delta'(x)$ par la condition

$$\big(\delta'(x)\big)^n = \delta(x), \qquad \delta'(x) \in K_c.$$

Alors $\beta_2(x) = x\,\delta'(x)$ représente un automorphisme de G qui permute avec l'automorphisme β_1, car $\delta'(x) = 1$ pour $x \in K_2$; nous avons

$$\beta_2''(x) = x\big(\delta'(x)\big)^n = x\,\delta(x) = \alpha\beta_1^{-n}(x).$$

Posons donc $\beta = \beta_1\beta_2$; β est un automorphisme de G répondant à toutes les conditions du lemme. Si β' est un autre automorphisme vérifiant ces conditions, nous avons

$$\beta'\beta^{-1}(x) = x\,\delta''(x),$$

où δ'' représente un homomorphisme de G dans K_c, tel que $\delta''(x) = 1$ pour $x \in K_2$. Ainsi β et β' permutent et

$$(\beta')^n\beta^{-n}(x) = x\big(\delta''(x)\big)^n = x \qquad \text{pour tout } x \in G,$$

ce qui implique

$$\delta''(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta = \beta'.$$

Remarque. — Si l'on suppose que α vérifie (A) et que β vérifie la condition plus faible (B), on en déduit facilement que β vérifie la condition (A). De même, si y est un élément de G invariant par α, y est invariant par β.

Lemme (3.9). — *Soit* G *un groupe,* (K_i) *une suite centrale (resp.* N*-suite) finie dans* G *telle que* K_i/K_{i+1} *soit sans* P_i*-torsion pour tout* i*, et* P_i*-divisible pour* $i \geqq j+1$. *Soient* $y \in K_j$, $p \in P_j$ *tels qu'il n'existe pas d'élément* x *dans* K_j *avec* $x^p = y$. *Alors il existe une extension* G′ *de* G *et une suite centrale (resp.* N*-suite) finie* (K'_i) *dans* G′, *les conditions suivantes étant vérifiées :*

1° $K'_i \cap G = K_i$ *pour tout* i ;
2° $K'_i = K_i$ *pour* $i \geqq j+1$;
3° $K'_i = K_iK'_{i+1}$ *pour* $1 \leqq i \leqq j-1$;
4° *Enfin,* K'_j *est engendré par* K_j *et un élément* x *tel que* $x^p = y$.

Démonstration. — Soit α l'automorphisme $z \to y^{-1}zy$ de G ; α vérifie la condition (B) de (3.8) dans le cas de la suite centrale, la condition (A) dans le cas de la N-suite. Nous construisons, conformément à (3.8), l'automorphisme β de G vérifiant la même condition que α, et tel que $\beta^p = \alpha$. La relation $\alpha(y) = y$ implique $\beta(y) = y$. Cela nous permet de construire un groupe G′ contenant G comme sous-groupe invariant, le quotient G′/G étant cyclique d'ordre p et engendré par la classe mod G de $x \in G'$, avec $x^p = y$; de plus, pour $z \in G$, $x^{-1}zx = \beta(z)$. Il nous suffira pour cela de prendre sur l'ensemble des couples (n, z), où n parcourt l'ensemble des entiers et z parcourt G, la loi de groupe $(n, z)(n', z') = \big(n+n', \beta^{n'}(z)z'\big)$. Puis nous prendrons le quotient de ce groupe par le sous-groupe central engendré par (p, y^{-1}). Nous identifierons $z \in G$ à la classe de $(0, z)$, et nous définirons x comme la classe de $(1, 1)$. Nous définirons dans G′ une suite de sous-groupes (K'_i) en posant $K'_i = K_i$

pour $i \geqq j+1$ et $K'_i = \{K_i, x\}$ pour $1 \leqq i \leqq j$, $\{K_i, x\}$ désignant le sous-groupe engendré par K_i et x. Les conditions (1° à 4°) de l'énoncé se vérifient immédiatement. Il reste à montrer que (K'_i) est une suite centrale (resp. N-suite) dans G'. Pour cela on remarquera que (K'_i) est en tout cas une suite de sous-groupes invariants de G', et l'on calculera le commutateur $(x^n z,\ x^{n'} z')$ en s'appuyant, par exemple, sur la formule

$$(ab, cd) = (b, c)^a (a, c)\,(b, d)^{ca} (a, d)^c \quad [cf.\ (1.1),\ \text{chap. I}]$$

et en tenant compte de ce que l'automorphisme intérieur $z \to xzx^{-1}$ vérifie la condition (B) (resp. A).

Remarquons que, pour $i \neq j$, K'_i/K'_{i+1} s'identifie à K_i/K_{i+1}, $K'_i/K'_{i+1}K_i$ étant réduit à l'élément neutre. Le quotient $K'_j/K_j K'_{j+1}$ est cyclique, d'ordre p, avec $p \in P_j$, et l'on démontre immédiatement que K'_j/K'_{j+1} est une extension cyclique, sans P_j-torsion, de K_j/K_{j+1}.

Le lemme (3.9) établit précisément le résultat qui nous manquait pour affirmer l'existence d'une (P_i, K_i)-complétion :

Théorème (3.10). — *Soit* G *un groupe,* (K_i) *une suite centrale (resp.* N*-suite) finie dans* G *telle que, pour tout* i, K_i/K_{i+1} *soit sans* P_i*-torsion. Alors,* G *admet une* (P_i, K_i)*-complétion, c'est-à-dire une extension* $\overline{G}$ *munie d'une suite centrale (resp.* N*-suite) finie* $\overline{K}_i$ *de telle sorte que, pour tout* i, $K_i = \overline{K}_i \cap G$, $\overline{K}_i/\overline{K}_{i+1}$ *soit sans* P_i*-torsion et* P_i*-divisible et que* $\overline{K}_i/K_i\overline{K}_{i+1}$ *soit un groupe de* P_i*-torsion. Cette* (P_i, K_i)*-complétion est unique à un isomorphisme près conservant les éléments de* G [20].

Démonstration. — Supposons que l'existence de la (P_i, K_i)-complétion ait été démontrée lorsqu'on impose à G, (K_i) la condition supplémentaire que K_i/K_{i+1} est P_i-divisible pour $i \geqq j$ (ce qui est évident pour $j = 1$, le groupe G coïncidant avec sa complétion). Prenons un groupe G et une suite centrale (resp. N-suite) finie (K_i) dans G telle que K_i/K_{i+1} soit sans P_i-torsion pour tout i, et P_i-divisible pour $i \geqq j+1$. Alors le lemme (3.9) et les développements qui suivent la définition (3.7) montrent l'existence d'une extension G' de G munie d'une suite centrale (resp. N-suite) finie (K'_i) telle que, pour tout i, $K_i = G \cap K'_i$, K'_i/K'_{i+1} soit sans P_i-torsion, $K'_i/K_i K'_{i+1}$ soit un groupe de P_i-torsion et qu'enfin, pour tout $i \geqq j$, K'_i/K'_{i+1} soit P_i-divisible. La (P_i, K'_i)-complétion de G', qui existe d'après notre hypothèse de récurrence, fournit la (P_i, K_i)-complétion de G

(20) M. Serre m'a communiqué une nouvelle démonstration de ce théorème, après avoir pris connaissance de ma rédaction. La méthode de M. Serre revient à remplacer le lemme (3.8) par l'utilisation de la suite spectrale d'une extension de groupe (*cf.* G. Hochschild et J. P. Serre, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 74, 1953, p. 110-134). Bien que M. Serre soit parvenu ainsi à un résultat plus fort, j'ai préféré laisser à mon exposé son caractère élémentaire en conservant ma démonstration originale.

cherchée. L'unicité de cette complétion, à un isomorphisme canonique près conservant les éléments de G, résulte du théorème (3.6).

Remarque. — Dans la (P_i, K_i)-complétion $\overline{G}$ de G, chaque sous-groupe $G\overline{K}_{i+1}$ est invariant dans $G\overline{K}_i$. Par contre, G n'est pas, en général, un sous-groupe invariant de G.

Extension des théorèmes précédents aux N-*groupes.* — Nous allons indiquer quelles modifications dans les énoncés introduit la substitution de suites séparantes de sous-groupes aux suites finies qui interviennent dans les théorèmes de ce paragraphe.

(3.11) Si, dans la démonstration du théorème (3.2), on remplace (H_i) par une suite séparante, en conservant la définition des sous-groupes L_i, la même démonstration montre que (L_i) est une suite centrale (resp. une N-suite), que L_i/L_{i+1} est sans P_i-torsion que $L_i \supset H_i$ (pour tout i) et enfin que (L_i) décroît le plus vite parmi toutes les suites possédant cette propriété. Par contre :

$$\bigcap_i L_i = \bigcap_i F_i$$

est, en général, différent de (1). Si, par exemple, nous prenons pour chaque P_i l'ensemble de tous les nombres premiers et pour (H_i) les groupes de dimension $\mathrm{mod}\, p(G_{i,p})$ d'un groupe libre G, $L_i = G$ pour tout i, bien que $(G_{i,p})$ soit séparante et chaque $G_{i,p}$ sans torsion. Il faut donc poser comme condition supplémentaire $\bigcap_i F_i = (1)$ pour obtenir une suite séparante (L_i).

Théorème (3.12). — *Soit* G *un groupe,* G′ *un sous-groupe de* G, (K_i) *une suite centrale séparante dans* G *telle que, pour tout* i, $K_i/(K_i \cap G')K_{i+1}$ *soit un groupe de* P_i*-torsion. Soient* H *un groupe,* (L_i) *une suite centrale séparante dans* H, *telle que* H *soit* (L_i)*-complet et que, pour tout* i, L_i/L_{i+1} *soit* P_i*-divisible et sans* P_i*-torsion. Soit enfin,* f *un homomorphisme de* G′ *dans* H *tel que, pour tout* i, $f(G' \cap K_i) \subset L_i$. *Alors, il existe un homomorphisme* g *et un seul de* G *dans* H, *prolongeant* f *et tel que* $g(K_i) \subset L_i$ *pour tout* i.

Démonstration. — Par hypothèse, H s'identifie à la limite projective de ses quotients H/L_i, munis de leurs homomorphismes naturels [puisque (L_i) est séparante et $H(L_i)$-complet]; d'autre part, G s'identifie à un sous-groupe de la limite projective de ses quotients G/K_i munis de leurs homomorphismes naturels [puisque (K_i) est séparante]. Alors, le théorème (3.6) montre qu'on peut, pour tout i prolonger d'une seule manière l'homomorphisme de G dans H/L_i obtenu en composant avec f l'homomorphisme canonique de H sur H/L_i.

Plus précisément, on écrira le diagramme commutatif suivant (21) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
G/K_1 & \leftarrow & G/K_2 & \leftarrow\ldots\leftarrow & G/K_i & \leftarrow & G/K_{i+1} & \leftarrow\ldots\leftarrow & G \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
G'/G'\cap K_1 & \leftarrow & G'/G'\cap K_2 & \leftarrow\ldots\leftarrow & G'/G'\cap K_i & \leftarrow & G'/G'\cap K_{i+1} & \leftarrow\ldots\leftarrow & G' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\
H/L_1 & \leftarrow & H/L_2 & \leftarrow\ldots\leftarrow & H/L_i & \leftarrow & H/L_{i+1} & \leftarrow\ldots\leftarrow & H
\end{array}$$

D'après le théorème (3.6), il est possible, d'une manière et d'une seule d'introduire dans ce diagramme, sans détruire sa commutativité, des homomorphismes $g_i : G/K_i \to H/L_i$. L'existence et l'unicité des homomorphismes g_i entraînent immédiatement l'existence et l'unicité d'un homomorphisme g de G, dans H répondant aux conditions de (3.12).

Théorème (3.13). — *Soit* G *un groupe,* (K_i) *une suite centrale* (*resp.* N-*suite*) *séparante dans* G *telle que, pour tout* i, K_i/K_{i+1} *soit sans* P_i-*torsion. Alors,* G *admet une* (P_i, K_i)-*complétion, c'est-à-dire une extension* G *munie d'une suite centrale* (*resp.* N-*suite*) *séparante* $(\overline{K}_i)$ *de telle sorte que* $\overline{G}$ *soit* $(\overline{K}_i)$-*complet et que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout* i; $K_i = \overline{K}_i \cap G$, $\overline{K}_i/\overline{K}_{i+1}$ *est* P_i-*divisible sans* P_i-*torsion, et* $K_i/K_i\overline{K}_{i+1}$ *est un groupe de* P_i-*torsion. Cette* (P_i, K_i)-*complétion est déterminée à un isomorphisme canonique près conservant les éléments de* G.

Démonstration. — G s'identifie à un sous-groupe de la limite projective de ses quotients G/K_j, munis de leurs homomorphismes naturels. Nous pouvons, d'après (3.10) construire les $(P_i, K_i/K_j)$-complétion des groupes G/K_j. D'après (3.6), il existe des homomorphismes de ces groupes les uns sur les autres qui prolongent les homomorphismes naturels des groupes G/K_j. Nous pouvons donc construire la limite projective $\overline{G}$ des $(P_i, K_i/K_j)$-complétion des groupes G/K_j, et introduire dans G la suite centrale (resp. N-suite) $\overline{K}_j$ de telle sorte que la $(P_i, K_i/K_j)$-complétion de G/K_j s'identifie à $\overline{G}/\overline{K}_j$. On vérifie alors immédiatement que G muni de sa suite centrale (resp. N-suite) séparante $(\overline{K}_i)$ est une (P_i, K_i)-complétion de G. L'unicité de $\overline{G}$ à un isomorphisme canonique près résulte de l'unicité dans le cas d'une suite finie (3.10) ou encore du théorème (3.12).

4. Groupes nilpotents et N-groupes définis par la formule de Hausdorff. — Nous conservons les notations antérieures; (V_i) désignera, dans ce paragraphe, la suite d'ensembles de nombres premiers obtenue en prenant pour V_i l'ensemble de tous les nombres premiers $\leqq i$. Comme précédemment, Q_i désigne l'anneau

(21) Pour la définition et l'usage de tels diagrammes, *cf.* Eilenberg-Steenrod, *Fundations of algebraic Topology* (Princeton).

des nombres rationnels de la forme $\frac{r}{n}$ (r entier, n/V_i). V_∞ désignera l'ensemble de tous les nombres premiers; selon l'usage, nous parlerons de groupes sans torsion, de torsion, divisibles, au lieu de groupes sans V_∞-torsion, de V_∞-torsion, V_∞-divisibles. Par contre, pour éviter une équivoque, nous serons obligés de parler de la (V_∞, K_i)-complétion lorsque, dans la définition (3.7), $P_i = V_\infty$ pour tout i.

(4.1). *Caractérisation des anneaux de Lie* L *et* M *à partir du groupe libre* G. — Considérons, comme au paragraphe 1, l'algèbre de Lie libre complétée à coefficients rationnels L, engendrée par les générateurs indépendants $(x_\iota)_{\iota\in I}$. Nous avons vu qu'en définissant sur L une structure de groupe par la formule de Hausdorff, les (x_ι) engendrent un groupe libre G. En posant $G_i = G \cap L_i$ où L_i désigne l'ensemble des éléments de L d'ordre $\geq i$, on obtient la suite centrale descendante de G. Nous savons de plus que, pour tout i, L_i/G_iL_{i+1} est un groupe de torsion, que L_i/L_{i+1} est divisible et sans torsion (c'est un espace vectoriel sur le corps Q) et que G_i/G_{i+1} est sans torsion (c'est un groupe abélien libre). Si nous appliquons le théorème (3.13), nous voyons que L peut être défini, à un isomorphisme canonique près conservant les éléments de G, comme sa (V_∞, G_i)-complétion.

Considérons maintenant, comme au paragraphe 2, l'anneau de Lie $M \subset L$. En posant $M_i = M \cap L_i$ [22], (M_i) est une N-suite dans M, M est (M_i)-complet, M_i/M_{i+1} est V_i-divisible et sans V_i-torsion pour tout i. Enfin, pour tout i, M_i/G_iM_{i+1} est un groupe de V_i-torsion. Toutes ces propriétés résultent immédiatement de la définition de M. Alors, d'après (3.13), M peut être défini à un isomorphisme canonique près conservant les éléments de G comme la (V_i, G_i)-complétion de G.

Ces définitions de L et de M à partir d'un groupe libre G justifient les notations L(G) et M(G) que nous utiliserons pour les désigner.

Soit, maintenant $\mathfrak{L}$ un anneau de Lie. Désignons par $(\mathfrak{L}_i)$ la suite centrale descendante de $\mathfrak{L}$, c'est-à-dire la suite d'idéaux définie par

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}_{i+1} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_i] \quad \text{pour tout } i.$$

Tout comme dans le cas des groupes, on a

$$[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] \subset \mathfrak{L}_{i+j} \quad \text{pour tous } i, j.$$

Nous pouvons, plus généralement, définir dans $\mathfrak{L}$ la notion de suite centrale (resp. N-suite) d'idéaux, ainsi que la notion de suite finie ou séparante. Cherchons à déterminer à quelles conditions doit satisfaire $\mathfrak{L}$ pour qu'il soit possible

(22) Signalons que (M_i) n'est pas la suite centrale descendante de M, ni son adhérence.

d'y définir, au moyen de la formule de Hausdorff, une loi de groupe. La difficulté est double : d'une part, la formule de Hausdorff

$$xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$$

apparaît comme une série infinie, qui devra donc converger dans L au sens d'une certaine topologie; d'autre part, la formule de Hausdorff ne fait pas seulement intervenir les opérations de l'anneau de Lie, mais aussi des multiplications $x \to \lambda x$, où $\lambda \in Q$, $x \in \mathfrak{L}$, qui n'ont aucun sens dans un anneau de Lie quelconque. Nous allons seulement indiquer une catégorie d'anneaux de Lie où l'on peut appliquer la formule de Hausdorff, sans chercher à discuter ici un problème dont l'énoncé même est trop imprécis.

THÉORÈME (4.2). — *Soit $\mathfrak{L}$ un anneau de Lie, (H_i) une suite centrale séparante d'idéaux dans $\mathfrak{L}$, telle que $\mathfrak{L}$ soit (H_i)-complet et que, pour tout i, H_i/H_{i+1} soit V_i-divisible et sans V_i-torsion. Alors, il est possible de définir univoquement sur $\mathfrak{L}$ une structure de groupe au moyen de la formule de Hausdorff, en convenant de choisir dans H_i les termes de degré total i en x et y (pour tout $i \geqq 1$). Avec cette nouvelle structure de groupe, (H_i) reste une suite centrale et les deux groupes H_i/H_{i+1} définis à partir de la structure de groupe abélien de $\mathfrak{L}$ et de sa nouvelle structure de groupe coïncident (en tant que groupes de classes).*

Démonstration. — D'après (3.3), H_i est V_i-divisible et sans V_i-torsion pour tout i. Autrement dit, nous pouvons considérer H_i comme un Q_i-module, en posant

$$y = \frac{r}{s}x \qquad \text{si} \quad sy = rx \ (x, y \in H_i;\ s/V_i,\ r \in Z).$$

Le produit d'un élément x de $\mathfrak{L}$ et d'un nombre rationnel λ se trouve ainsi bien défini, à condition qu'il existe un indice i tel que $\lambda \in Q_i$, $x \in H_i$. Or, puisque (H_i) est une suite centrale d'idéaux dans $\mathfrak{L}$, tout alternant de degré total i appartient à H_i. Si nous prenons soin de représenter la composante homogène de degré i dans la formule de Hausdorff, comme une somme d'alternants de degré i multipliés par des éléments de Q_i, nous voyons qu'on peut calculer univoquement cette composante dans $\mathfrak{L}$. La série $xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$ converge quels que soient x et $y \in \mathfrak{L}$, puique $\mathfrak{L}$ est supposé (H_i)-complet. Il reste à montrer que nous obtenons bien une structure de groupe. Nous pourrions, pour cela, construire un homomorphisme de l'anneau de Lie M(G) sur $\mathfrak{L}$, G désignant un groupe libre convenable [*cf.* la démonstration de (4.3)]. Mais nous pouvons raisonner directement. Si x, y, z sont trois éléments quelconques de $\mathfrak{L}$, nous calculons $(xy)z - x(yz)$, en remarquant que chaque H_i est non seulement un Q_i-module, mais une Q_i-algèbre de Lie : $(xy)z - x(yz)$ se ramène ainsi à une somme d'alternants en x, y, z multipliés par des scalaires rationnels. Or,

nous pouvons choisir ces alternants parmi une certaine famille qui, au cas où le sous-anneau de Lie engendré par x, y et z serait libre, en constituerait une base (*cf.*, par exemple, l'algorithme de M. Hall [7]). Mais, la propriété fondamentale de la formule de Hausdorff nous montre que les coefficients des alternants considérés sont alors tous nuls, puisque une Q-algèbre de Lie libre contient l'anneau de Lie libre engendré par ses générateurs indépendants (autrement dit : un anneau de Lie libre est sans torsion). Nous avons donc défini univoquement sur $\mathcal{L}$ une structure de groupe, que nous notons multiplicativement. Les relations

$$(x, y) \in [x, y] + \mathrm{H}_{i+1} \qquad \text{si} \quad x \text{ ou } y \in \mathrm{H}_i,$$
$$xy \in x + y + \mathrm{H}_{i+1} \qquad \text{si} \quad x \text{ ou } y \in \mathrm{H}_i$$

s'établissent immédiatement, ainsi que la relation

$$x\mathrm{H}_i = x + \mathrm{H}_i \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{L} \qquad \text{et} \qquad \text{tout } i \geqq 1,$$

ce qui achève la démonstration.

L'intérêt principal du théorème (4.2) provient de l'existence de sa réciproque :

Théorème (4.3). — *Soit* G *un groupe,* (H_i) *une suite centrale séparante dans* G. *On suppose que* G *est* (H_i)*-complet et que, pour tout* i, $\mathrm{H}_i/\mathrm{H}_{i+1}$ *est* V_i*-divisible et sans* V_i*-torsion. Alors, étant donné deux éléments quelconques* x *et* y *de* G, *il existe une suite* (a_i) *d'éléments de* G *et une seule telle que* $a_i \in \mathrm{H}_i$ *pour tout* i *et que*

$$x^t y^t = a_1^t a_2^{t^2} \dots a_i^{t^i} \dots$$

pour tout entier t, *le produit convergeant au sens de la* (H_i)*-topologie. Si l'on pose*

$$x + y = a_1, \qquad [x, y] = a_2^2,$$

on définit sur G *une structure d'anneau de Lie. On retrouve la structure de groupe de* G *en appliquant, dans l'anneau de Lie défini sur* G, *le procédé du théorème* (4.2) *avec la suite centrale* (H_i).

Démonstration. — Soit G′ un groupe libre, f un homomorphisme de G′ *sur* G, (G'_i) la suite centrale descendante de G′. Désignons par M une $(\mathrm{V}_i, \mathrm{G}'_i)$-complétion de G′ que nous considérons, d'après (4.1) à la fois comme un groupe et comme un anneau de Lie. Puisque (H_i) est une suite centrale, $f(\mathrm{G}'_i) \subset \mathrm{H}_i$ pour tout i. D'après le théorème (3.12), il existe un homomorphisme g et un seul de M sur G, qui prolonge f et qui vérifie $g(\mathrm{M}_i) \subset \mathrm{H}_i$.

Soient x, y deux éléments quelconques de G, ξ, η des éléments de M tels que $g(\xi) = x$, $g(\eta) = y$. Alors, d'après (1.5), (2.4) et (2.6), il existe dans M une suite d'éléments (α_i) telle que $\alpha_i \in \mathrm{M}_i$ pour tout i et que, pour tout entier t :

$$\xi^t \eta^t = \alpha_1^t \alpha_2^{t^2} \dots \alpha_i^{t^i} \dots .$$

De plus,

$$\alpha_1 = \xi + \eta \qquad \text{et} \qquad \alpha_2^2 = [\xi, \eta].$$

Puisque $g(M_i) \subset H_i$, $g(\alpha_i) = a_i \in H_i$ pour tout i. Appliquons l'homomorphisme g : pour tout entier t, et pour tout $i \geqq 1$,

$$x^t y^t \equiv a_1^t a_2^{t^2} \dots a_i^{t^i} \pmod{H_{i+1}},$$

c'est-à-dire que

$$x^t y^t = a_1^t a_2^{t^2} \dots a_i^{t^i} \dots .$$

D'après (1.6) et (1.7c), la suite (a_i) est univoquement déterminée dans G par la donnée de x et y. Par conséquent, a_1 et a_2^2 sont des fonctions déterminées de x et y, et nous pouvons poser

$$x + y = a_1 \qquad \text{et} \qquad [x, y] = a_2^2.$$

Alors,

$$g(\xi + \eta) = g(\xi) + g(\eta) \qquad \text{et} \qquad g([\xi, \eta]) = [g(\xi), g(\eta)],$$

pour tous $\xi, \eta \in M$. Il est bien connu que toute structure algébrique quotient d'une structure d'anneau de Lie par une relation d'équivalence compatible avec les opérations, est une structure d'anneau de Lie. G devient ainsi un anneau de Lie, et g est un homomorphisme de M sur G à la fois pour les structures de groupe et d'anneau de Lie.

Dans l'anneau de Lie M les formules d'inversion (2.8) permettent de calculer la somme et le crochet de deux éléments; aucune difficulté ne provient des puissances fractionnaires qui sont univoquement déterminées dans M. Si l'on utilise l'homomorphisme g de M sur G, on voit que les mêmes formules d'inversion permettent de calculer la somme et le crochet de deux éléments de G. Mais, il est nécessaire de faire une convention, analogue à celle du théorème (4.2) : pour tout i, le sous-groupe H_i de G est V_i-divisible (3.3). Il faut alors convenir que toute puissance z^k intervenant dans les formules (2.8) [ou dans des formules plus générales, cf. (2.9)] doit être choisie dans H_i si $z \in H_i$ (pour tout i).

Au moyen des formules (2.8), on démontre immédiatement que (H_i) est une suite centrale d'idéaux dans l'anneau de Lie L. L'homomorphisme g montre alors que la structure de groupe de G se reconstitue à partir de sa structure d'anneau de Lie par le procédé (4.2), en utilisant la suite (H_i).

La structure d'anneau de Lie définie sur G ne dépend évidemment que de la structure de groupe de G et du choix de la suite centrale (H_i).

Corollaire (4.4). — *Soient* G *et* G′ *deux groupes,* (H_i) *et* (H'_i) *deux suites centrales dans* G *et* G′ *respectivement, vérifiant les conditions de* (4.3). *Alors, si* f *est un homomorphisme de* G *dans* G′ *tel que* $f(H_i) \subset H'_i$ *pour tout* i, f *est en même temps un homomorphisme pour les structures d'anneaux de Lie de* G *et* G′.

La démonstration résulte immédiatement de l'énoncé de (4.3).

Remarque. — Si nous appliquons le corollaire au cas où $G = G'$ et où f est l'identité, nous voyons que deux suites (H_i) et (H'_i) satisfaisant aux conditions de (4.3) définissent sur G la même structure d'anneau de Lie, si, pour tout i, $H_i \subset H'_i$.

Nous allons appliquer cette remarque au cas des groupes de torsion et des groupes sans torsion.

LEMME (4.5). — *Pour qu'un groupe de torsion* G *possède une suite* (H_i) *vérifiant les conditions* (4.3), *il faut et il suffit que* G *soit un produit direct de p-groupes, chacun des p-groupes étant de classe strictement inférieure à p. Dans ce cas, la suite centrale descendante de* G *répond à la question.*

Démonstration. — Puisque (H_i) est une suite centrale séparante, G doit être un N-groupe de torsion; G est donc le produit direct de ses p-sous-groupes de Sylow. Si (G_i) est la suite centrale descendante de G, G_i doit être sans V_i-torsion, puisque $G_i \subset H_i$ (pour tout i), d'après (3.2) et (3.11). Or, il est évident, que si G est un p-groupe, G_i ne peut être sans V_i-torsion pour un entier $i \geqq p$ que si $G_i = (1)$. La condition de (4.5) est donc nécessaire.

Si, réciproquement, elle est satisfaite, G_i/G_{i+1} est un groupe abélien de torsion sans p-composantes, pour tout p premier $\leqq i$. On sait alors que G_i/G_{i+1} est V_i-divisible et sans V_i-torsion.

Comme la suite centrale descendante de G décroît plus vite que toute autre suite centrale, le corollaire (4.4) montre que la structure d'anneau de Lie définie sur G par une suite (H_i) vérifiant les conditions de (4.3) coïncide avec la structure d'anneau de Lie définie par (G_i). Par conséquent, cette structure d'anneau de Lie est caractéristique, c'est-à-dire ne dépend que de la structure de groupe. L'anneau de Lie G se décompose en un produit direct de p-anneaux de Lie, c'est-à-dire d'anneaux de Lie, qui sont des p-groupes si on les considère comme des groupes abéliens. Ces p-sous-anneaux de Lie de G coïncident avec les p-sous-groupes de Sylow de G. Aussi allons-nous nous borner désormais à la considération des p-groupes; les théorèmes généraux sur les groupes de torsion considérés s'en déduisent en formant des produits directs.

La somme et le crochet de deux éléments x et y d'un p-groupe G de classe inférieure à p peuvent se calculer au moyen des formules d'inversion (2.8). Les exposants fractionnaires qui interviennent appartiennent tous à Q_{p-1}.

Soient $x \in G$, $x^{p^h} = 1$, n/V_{p-1}, $r \in Z$; pour calculer $x^{\frac{r}{n}}$, nous déterminons deux entiers λ et μ tels que $\lambda n + \mu p^h = r$, et nous posons $x^{\frac{r}{n}} = x^{\lambda}$. Il en résulte que $x^{\frac{r}{n}}$ est une puissance entière de x. Pour avoir une formule indépendante de h, il nous suffit d'écrire $\frac{r}{n} \in Q_{p-1}$ comme un entier p-adique :

$$\frac{r}{n} = \Sigma_{i=0}^{\infty} a_i p^i,$$

où tous les coefficients a_i sont des entiers. Alors, pour h donné, on peut prendre $\lambda = \Sigma_{i=0}^{h-1} a_i p^i$, d'où la notation $x^{\frac{r}{n}} = x^{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i}$. Ces remarques montrent que, dans le cas d'un p-groupe de classe inférieure à p, tout sous-groupe est en même temps un sous-anneau (et réciproquement, comme le montrent les mêmes considérations appliquées à la formule de Hausdorff dans un p-anneau de Lie). De plus, pour définir la structure d'anneau de Lie sur un p-groupe G, il n'est pas nécessaire de supposer que G soit de classe inférieure à p : il suffit que tout sous-groupe engendré par trois éléments de G soit de classe inférieure à p. En effet, pour calculer la somme et le crochet de deux éléments x, y de G, il nous suffit d'appliquer les formules d'inversion en supposant que x et y engendrent un sous-groupe de classe inférieure à p. Pour vérifier que nous obtenons bien un anneau de Lie, il nous suffit de montrer que les identités génériques (distributivité, identité de Jacobi, etc.) sont satisfaites : or, elles ne font intervenir que trois éléments génériques de G. Elles sont donc satisfaites si tout sous-groupe à trois générateurs est de classe inférieure à p. Le même raisonnement montre la possibilité d'appliquer la formule de Hausdorff dans tout p-anneau de Lie dont chaque sous-anneau à trois générateurs est de classe inférieure à p.

La condition imposée aux sous-groupes à trois générateurs ne résulte pas de la même condition imposée aux sous-groupes à deux générateurs, qui suffit pourtant pour calculer $x+y$ et $[x, y]$ ainsi que pour démontrer

$$x+y=y+x, \qquad [x, y][y, x]^{-1}=1, \qquad [x, x]=1$$

(c'est-à-dire les identités génériques à un ou deux éléments). Comme contre exemple, on peut prendre le groupe générique à trois générateurs où tout élément x vérifie $x^3=1$ (*cf.* chap. I, § 1 et [20]). De même, un p-groupe dont tous les sous-groupes à trois générateurs sont de classe $<p$, n'est pas nécessairement de classe $<p$. Il suffit, d'après ce qui précède, de donner un exemple pour les p-anneaux. Or, on peut construire une algèbre de Lie, de dimension 91 sur le corps Z_5 des entiers modulo 5, qui est engendré par quatre générateurs, qui est de classe 5, et dont toutes les sous-algèbres à trois générateurs sont de classe au plus égale à 4 ([23]).

Nous pouvons donc énoncer valablement le :

THÉORÈME (4.6). — *Chaque p-anneau de Lie, tel que tout sous-anneau à trois générateurs soit de classe inférieure à p, est porteur d'une structure de p-groupe, définie par la formule de Hausdorff. Réciproquement, chaque p-groupe tel que tout sous-groupe à trois générateurs soit de classe inférieure à p, est porteur d'une structure de p-anneau de Lie, définie au moyen des formules d'inversion* (2.8) *de la formule de Hausdorff. Pour les structures considérées, les notions*

([23]) La construction, un peu longue, est exposée au paragraphe 5.

de sous-groupe (resp. sous-groupe invariant) et de sous-anneau (resp. idéal) coïncident, ainsi que les notions d'homomorphisme de groupes et d'homomorphisme d'anneaux de Lie ([24]).

Ce résultat constitue apparemment l'exemple le plus simple d'une correspondance entre certaines structures de groupes et d'anneaux de Lie.

Nous allons maintenant étudier les groupes nilpotents sans torsion, et retrouver les résultats de Malcev [26], [27].

Soit G un groupe nilpotent sans torsion, (G_i) sa suite centrale descendante. Alors, d'après le théorème (3.2), il existe dans G une N-suite finie (H_i) dont les quotients H_i/H_{i+1} sont sans torsion, et qui décroît le plus vite parmi toutes les suites centrales de G possédant cette propriété. La démonstration de (3.2) se simplifie considérablement, et les sous-groupes H_i peuvent être ainsi définis : Soit $x \in G$; alors, $x \in H_i$, si et seulement s'il existe un entier $n \neq 0$, tel que $x^n \in G_i$. Nous appellerons (H_i) *la suite rectifiante* de G. La suite rectifiante (H_i) possède donc les propriétés suivantes : c'est une N-suite; si c est la classe de G, $H_{c+1} = (1)$; H_i/H_{i+1} est sans torsion pour tout i, et si (K_i) est une suite centrale dans G dont les quotients sont sans torsion, $K_i \supset H_i$ pour tout i. Si G et G′ sont deux groupes nilpotents sans torsion, (G_i) et (G'_i) leurs suites centrales descendantes, (H_i) et (H'_i), leurs suites rectifiantes, et enfin, f un homomorphisme de G dans G′, alors, $f(H_i) \subset H'_i$ pour tout i. Nous savons, en effet, que $f(G_i) \subset G'_i$; alors si $x \in H_i$, $n \neq 0$, $x^n \in G_i$,

$$f(x)^n = f(x^n) \in f(G_i) \subset G'_i, \qquad \text{d'où} \qquad f(x) \in H'_i.$$

Si G est un groupe nilpotent sans torsion et divisible, tous les sous-groupes de sa suite rectifiante sont divisibles (3.3d).

Définition (4.7). — Soit G un groupe nilpotent sans torsion. Nous appellerons « *complétion de Malcev* » de G une extension G′ de G qui devra être un groupe nilpotent sans torsion et divisible, et vérifier la condition suivante : si $x \in G'$, il existe un entier $n \neq 0$ tel que $x^n \in G$.

On remarquera que cette définition ne fait pas intervenir de suites de sous-groupes dans les groupes considérés. Sa légitimité va résulter du :

Théorème (4.8). — *Un groupe nilpotent sans torsion* G, *possède une complétion de Malcev* G′, *qui est déterminée à un isomorphisme canonique près, conservant les éléments de* G.

Démonstration. — Soit (H_i) la suite rectifiante de G. Construisons, confor-

([24]) L'existence d'une correspondance biunivoque entre p-groupes finis de classe inférieure à p et p-anneaux finis de classe inférieure à p avait été indiquée par Magnus [23] avec une esquisse de démonstration plutôt sommaire. J'ai abouti indépendamment au même résultat que je n'ai pas vu mentionné dans la littérature ultérieure.

mément à (3.10), une (V_∞, H_i)-complétion de G, soit $\overline{G}$, $(\overline{H}_i)$. Alors $\overline{G}$ est un groupe nilpotent (plus précisément un groupe de même classe que G); il est sans torsion (3.3*b*) et divisible (3.3*a*). Soit $x \in \overline{G}$; supposons déjà trouvé un entier $n \neq 0$ tel que $x^n = gy$, où $g \in G$, $y \in \overline{H}_i$. Alors, puisque $\overline{H}_i/H_i\overline{H}_{i+1}$ est un groupe de torsion, il existe $n' \neq 0$ tel que $y^{n'} \in H_i\overline{H}_{i+1}$. Mais y est central modulo H_{i+1}, ce qui montre que $(gy)^{n'} \in g^{n'}y^{n'}\overline{H}_{i+1}$. Ainsi $x^{nn'} \in G\overline{H}_{i+1}$, et l'on voit que $\overline{G}$ est une complétion de Malcev de G.

Soit maintenant G′ une complétion de Malcev de G, H'_i la suite rectifiante de G′. Alors, $H_i = G \cap \overline{H}_i \subset G \cap H'_i$, puisque $(G \cap H'_i)$ est une suite centrale à quotients sans torsion.

Les groupes H'_i/H'_{i+1} sont divisibles et sans torsion. Nous pouvons donc appliquer (3.6), qui nous montre l'existence d'un homomorphisme f de $\overline{G}$ dans G′ conservant les éléments de G [et tel que $f(\overline{H}_i) \subset H'_i$ pour tout i]. Montrons que f est un isomorphisme de $\overline{G}$ sur G′, et que si g est un homomorphisme de $\overline{G}$ dans G′, conservant les éléments de G, il coïncide nécessairement avec f. Soit $x \in \overline{G}$, $x \neq 1$; alors il existe $n \neq 0$ tel que $x^n \in G$. Puisque $\overline{G}$ est sans torsion, $x^n \neq 1$. Alors,

$$f(x^n) = x^n = f(x)^n \neq 1,$$

ce qui montre que $f(x) \neq 1$; de plus, $f(x)^n = g(x)^n$, ce qui implique

$$f(x) = g(x),$$

d'après (3.3*b*). Enfin, si $y \in G'$, il existe $n \neq 0$ tel que $y^n \in G$; puisque $\overline{G}$ est divisible, il existe $x \in \overline{G}$ tel que $x^n = y^n$. Alors,

$$f(x)^n = f(x^n) = x^n = y^n,$$

ce qui montre que $f(x) = y$. Remarquons que si nous prenons $G' = \overline{G}$, f est l'identité, ce qui montre que $\overline{H}_i$ est la suite rectifiante de $\overline{G}$.

Théorème (4.9). — *Soit* G *un groupe nilpotent sans torsion. Alors, toute extension* G′ *de* G *qui est un groupe nilpotent sans torsion et vérifie la condition suivante : « si* $x \in G'$, *il existe un entier* $n \neq 0$ *tel que* $x^n \in G$ », *s'identifie (canoniquement) à un sous-groupe d'une complétion de Malcev de* G.

Démonstration. — Soit $\overline{G}'$ une complétion de Malcev de G′. Alors $\overline{G}'$ est une complétion de Malcev de G : il suffit de remarquer que, si $x \in \overline{G}'$, il existe $n \neq 0$ tel que $x^n \in G'$, puis $n' \neq 0$ tel que $x^{nn'} \in G$.

Théorème (4.10). — *Soient* G, G′ *deux groupes nilpotents sans torsion,* $\overline{G}$, $\overline{G}'$ *leurs complétions de Malcev, f un homomorphisme de* G *dans* G′. *Alors il*

existe un homomorphisme g et un seul de $\overline{G}$ dans $\overline{G}'$ qui prolonge f. Si f est un isomorphisme de G dans G' (resp. homomorphisme de G sur G'), il en est de même de g.

Démonstration. — Soient $(\overline{H}_i)$, $(\overline{H}'_i)$ les suites rectifiantes de $\overline{G}$ et $\overline{G}'$. Les suites $(G \cap H_i)$ et $(G' \cap \overline{H}'_i)$ sont respectivement les suites rectifiantes de G et G'. Par conséquent, $f(G \cap \overline{H}_i) \subset G' \cap \overline{H}'_i$ pour tout i, et le prolongement g de f à G existe d'après (3.6). Son unicité, et la dernière partie du théorème se démontrent comme en (4.8).

Remarque (4.11). — Nous pouvons considérer les éléments de la complétion de Malcev G d'un groupe nilpotent sans torsion, comme des puissances fractionnaires des éléments de G (*cf.* § 1) en posant

$$y = x^{\frac{r}{s}} \quad \text{si} \quad x^r = y^s \qquad (r, s \in \mathbf{Z}).$$

Cela nous permet d'obtenir directement l'ensemble G comme quotient du produit cartésien $\mathbf{Z} \times G$ par la relation d'équivalence

$$(n, x) \equiv (n', x') \quad \text{si et seulement si} \quad x'^n = x^{n'},$$

en associant à la classe de (n, x) l'élément $x^{\frac{1}{n}}$ de $\overline{G}$. Des difficultés notables apparaissent si l'on veut expliciter la loi de groupe sur G. On se ramène, étant donné $x, y \in G$, $n \in \mathbf{Z}$, à calculer $z \in G$ et $n' \in \mathbf{Z}$ tels que $x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{n'}}$. Dans le cas abélien, il suffit de prendre $z = xy$ et $n' = n$ (alors, $\overline{G} = G \otimes \mathbf{Q}$). Dans le cas général, il est impossible de prendre pour z un mot en x et y ([25]) indépendant de n. On peut établir le résultat suivant : si le groupe G est de classe $\leqq c$, on peut prendre $n' = n^{\frac{c(c+1)}{2}}$; z est alors représenté par un mot en x et y (qui dépend de l'entier n). Par exemple, pour

$$c = 2, \qquad n' = n^3 \qquad \text{et} \qquad z = x^{n^2} y^{n^2} (y, x)^{\frac{n(n^2-1)}{2}}.$$

L'existence de ces formules se démontre de la manière suivante : on considère le groupe H engendré par deux générateurs indépendants x et y, (H_i) sa suite centrale descendante, et enfin H' le sous-groupe de H engendré par x^n et y^n, n désignant un entier positif donné. Alors, on démontre, par récurrence sur i, que

$$(xy)^{n^{\frac{i(i-1)}{2}}} \in H' H_{i+1} \quad (cf. \text{ chap. I, § 2-4}).$$

L'existence de ces formules nous permet de définir la complétion de Malcev et de démontrer les théorèmes (4.8) à (4.10) pour une catégorie de groupes sans

([25]) C'est-à-dire un élément du groupe libre engendré par les symboles x et y.

torsion plus étendue que les groupes nilpotents : la catégorie des *groupes sans torsion dont chaque sous-groupe à trois générateurs est nilpotent* [*cf.* (4.6)].

(4.12) *Extension des résultats précédents aux* N*-groupes topologiques sans torsion.* — Soit G un N-groupe sans torsion. Nous pouvons définir, comme précédemment, la suite rectifiante (H_i) de G : c'est, parmi les suites centrales de G dont les quotients sont sans torsion, celle qui décroît le plus vite. Mais nous ne pouvons pas affirmer en général que la suite rectifiante soit séparante [*cf.* (3.11)]. Pour généraliser convenablement les résultats précédents, nous introduirons une catégorie de groupes topologiques, que nous appellerons N*-groupes topologiques sans torsion*. Par définition, un N-groupe topologique sans torsion, sera un groupe dont la topologie est définie en prenant comme système fondamental de voisinage de l'unité les sous-groupes d'une suite centrale séparante dont les quotients sont sans torsion. Tous les homomorphismes de groupes de cette catégorie seront supposés continus ; de même, une extension G′ d'un N-groupe topologique sans torsion G sera un groupe topologique contenant G comme sous-groupe topologique.

Définition (4.13). — Nous appellerons, suivant Malcev, R-groupe un N-groupe topologique sans torsion qui sera supposé, de plus, divisible et complet (par rapport à sa topologie).

Théorème (4.14). — *Soit* G *un* N*-groupe topologique sans torsion. Nous appellerons complétion de Malcev de* G *une extension* $\overline{G}$ *qui devra être un* R*-groupe et vérifier de plus la condition suivante : pour tout* $x \in \overline{G}$ *et tout voisinage* H *de l'unité dans* $\overline{G}$, *il existe un entier* $n \neq 0$ *tel que* $x^n \in GH$ [26]. *La complétion de Malcev d'un* N*-groupe topologique sans torsion existe, et est déterminée à un isomorphisme canonique près, conservant les éléments de* G.

Démonstration. — Soit (H_i) une suite centrale séparante dans G dont les quotients sont sans torsion et qui définit sa topologie. Construisons, conformément à (3.13) la (V_∞, H_i)-complétion de G, soit $\overline{G}$, $(\overline{H}_i)$. Alors, on démontre comme en (4.8) que $\overline{G}$, muni de sa $(\overline{H}_i)$-topologie, est une complétion de Malcev de G. Soit G′ une autre complétion de Malcev de G, (K'_i) une suite centrale de G′ à quotients sans torsion et définissant sa topologie. Posons, pour tout i, $K_i = G \cap K'_i$: alors G'/K'_i s'identifie à une complétion de Malcev du groupe nilpotent sans torsion G/K_i, et G′ est la limite projective de ses quotients G'/K'_i, puisqu'il est (K'_i)-complet. Or, (K_i) et (H_i) définissent la même topologie dans G ; donc, pour tout entier i, il existe un entier j tel que $H_j \subset K_i$.

(26) Si l'on introduit une métrique convenable pour définir la topologie de $\overline{G}$, cela revient à exiger que la distance de G à l'ensemble des puissances positives d'un élément quelconque de $\overline{G}$ soit nulle.

Alors l'homomorphisme naturel de G/H_j sur G/K_i se prolonge en un homomorphisme de la complétion de Malcev $\overline{G}/\overline{H}_j$ sur G'/K'_i (4.10). D'où, par composition, un homomorphisme φ_i de $\overline{G}$ sur G'/K'_i, tel que $\varphi_i(H_j) \subset K'_i$. Les homomorphismes φ_i sont compatibles (c'est-à-dire forment un diagramme commutatif) avec les homomorphismes naturels des quotients G'/K'_i dont G' est la limite projective; par conséquent, φ_i peut être considéré comme le composé de l'homomorphisme naturel de G' sur G'/K'_i avec un homomorphisme φ déterminé de $\overline{G}$ dans G', dont on vérifie immédiatement qu'il laisse invariant les éléments de G. Jusqu'à présent, nous avons seulement utilisé le fait que la (H_i)-topologie de G est plus fine que sa (K_i)-topologie. Nous pourrons construire de même l'homomorphisme ψ de G' dans G conservant les éléments de G, en utilisant le fait que la (K_i)-topologie est plus fine que la (H_i)-topologie. On démontre alors immédiatement, que φ et ψ sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre, et que φ est entièrement déterminé par la condition de conserver les éléments de G et d'être un homomorphisme (continu) de $\overline{G}$ dans G'.

Les théorèmes (4.9) et (4.10) s'étendent sans difficulté à la catégorie des N-groupes topologiques sans torsion.

Remarquons que (4.14) nous permet de préciser la caractérisation (4.1) de l'algèbre de Lie libre complétée $L(G)$ à partir du groupe libre G : $L(G)$ est la complétion de Malcev de G topologisé par sa suite centrale descendante.

Théorème (4.15). — *Tout* R-*groupe* G *est, canoniquement, porteur d'une structure d'algèbre de Lie sur le corps* Q *des nombres rationnels. La structure de groupe de* G *s'obtient à partir de sa structure d'algèbre de Lie par la formule de Hausdorff.*

Démonstration. — Soit G un R-groupe, (H_i) une suite centrale séparante dans G, dont les quotients sont sans torsion et qui définit sa topologie. Chaque sous-groupe H_i est divisible (3.3*c*), et nous pouvons donc appliquer le théorème (4.3). Il nous reste donc seulement à démontrer que les opérations de l'algèbre de Lie sont indépendantes du choix de (H_i). Soit donc (K_i) une autre suite possédant les mêmes propriétés. Alors, la suite $(H_i \cap K_i)$ définit encore la topologie de G; ses quotients sont sans torsion (si $x \in H_i \cap K_i$, $n \neq 0$, $x^n \in H_{i+1} \cap K_{i+1}$, on a $x \in H_{i+1}$ et $x \in L_{i+1}$) et, par conséquent, divisibles. La remarque qui suit le corollaire (4.4) nous montre que les suites (H_i) et (K_i) définissent toutes deux la même structure d'algèbre de Lie que la suite $(H_i \cap K_i)$.

Dans le cas des groupes nilpotents divisibles et sans torsion, on considère la topologie discrète, et l'on obtient canoniquement une structure d'algèbre de Lie nilpotente (et de même classe que le groupe).

Tout homomorphisme (continu) de R-groupes est en même temps un homomorphisme pour leurs structures d'algèbres de Lie (4.4). De même, la notion de sous-groupe (resp. sous-groupe invariant) fermé divisible et de sous-algèbre de Lie (resp. idéal) fermée divisible coïncident [*cf.* (4.6)].

Grâce à la complétion de Malcev, nous pouvons considérer tout N-groupe topologique sans torsion et en particulier, tout groupe nilpotent sans torsion, comme plongé canoniquement dans une algèbre de Lie sur le corps Q.

L'application du théorème (4.3) à des groupes nilpotents mixtes (c'est-à-dire possédant des éléments d'ordre fini et des éléments d'ordre infini), se heurte à une difficulté qui n'apparaît pas dans le cas des groupes de torsion ou des groupes sans torsion : on aboutit à différentes structures d'anneaux de Lie, suivant la suite centrale considérée.

Nous pouvons toutefois caractériser les sous-groupes des groupes possédant une suite centrale qui vérifie les propriétés établies en (4.3). Bornons-nous aux groupes nilpotents.

THÉORÈME (4.16). — *Pour qu'un groupe nilpotent* G *soit sous-groupe d'un groupe* G′ *possédant une suite centrale finie* (H'_i) *telle que, pour tout* i, H'_i/H'_{i+1} *soit* V_i*-divisible et sans* V_i*-torsion, il faut et il suffit que, pour tout* i, *le* $i^{\text{ième}}$ *sous-groupe* G_i *de la suite centrale descendante de* G *soit sans* V_i*-torsion.*

Démonstration. — Soit $H_i = H'_i \cap G$. Alors, H_i est sans V_i-torsion ainsi que $G_i \subset H_i$. Réciproquement, si G_i est sans V_i-torsion, le théorème (3.2) nous permet de construire canoniquement une suite centrale finie (H_i) dans G, telle que H_i/H_{i+1} soit sans V_i-torsion. Il nous suffit alors de former (3.6) une (V_i, H_i)-complétion de G pour nous placer dans les conditions de l'énoncé (4.3).

La difficulté indiquée provient de ce qu'il n'est pas possible de définir canoniquement une suite centrale finie (K_i) dont les quotients sont non seulement sans V_i-torsion, mais aussi V_i-divisibles, même en postulant l'existence d'une telle suite.

Exemple. — Prenons le groupe G défini sur le produit cartésien $Z \times Z \times Q_2 \times T_2$ par la multiplication

$$(p, q, r, s)(p', q', r', s') = (p + p', q + q', r + r' - p'q, s + s');$$

Z désigne comme précédemment l'anneau des entiers rationnels, Q_2 l'anneau des nombres rationnels de la forme $\frac{m}{2^n}$ $(m, n \in Z)$, et enfin, T_2 le groupe additif quotient Q_2/Z. Nous désignons par $\bar{r}$ l'image de $r \in Q_2$ par l'homomorphisme canonique de Q_2 sur T_2.

G est un groupe nilpotent de classe 2. Posons $H_1 = G$, et prenons pour H_2 l'ensemble des éléments de la forme $(0, 0, r, 0)$. Alors, toutes les conditions du théorème (4.3) sont remplies pour la suite (H_i). La structure d'algèbre de Lie ainsi définie est la suivante :

$$\text{si} \quad x = (p, q, r, s), \qquad x' = (p', q', r', s'),$$

alors

$$[x, x'] = (x, x') = (0, 0, pq' - qp', 0)$$

et

$$x + x' = \left(p + p', q + q', r + r' - \frac{(pq' + qp')}{2}, s + s'\right).$$

Or, nous définissons un automorphisme φ de G en posant

$$\varphi(x) = (p, q, r, s + r).$$

Si nous posons donc $K_1 = G$, $K_2 = \varphi(H_2)$, la suite (K_i) vérifie tout comme (H_i) les propriétés de (4.3). Mais cela nous conduit à une nouvelle addition sur G :

$$\begin{aligned} x \oplus x' &= \varphi\left(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(x')\right) \\ &= \left(p + p', q + q', r + r' - \left(\frac{pq' - qp'}{2}\right), s + s' - \overline{\left(\frac{pq' + qp'}{2}\right)}\right). \end{aligned}$$

On a bien $x \oplus x' \neq x + x'$ si $pq' + qp'$ est un entier impair.

Dans le cas général, j'ignore si deux structures d'anneaux de Lie définies sur un groupe nilpotent G par le procédé du théorème (4.3) sont toujours transformées l'une en l'autre par un automorphisme de G (comme dans l'exemple précédent).

(4.17) *Complétion de Malcev des groupes sans* P-*torsion.* — La théorie de la complétion de Malcev que nous avons exposée dans le cas le plus important, celui des groupes sans torsion, peut s'étendre à des catégories plus vastes de groupes nilpotents ou de N-groupes topologiques. Nos démonstrations reposent en effet, sur les résultats du paragraphe 3, et particulièrement sur le lemme (3.3*d*). Nous pouvons donc considérer la catégorie des groupes nilpotents sans P-torsion, P désignant un ensemble quelconque de nombres premiers. Nous définirons la *suite* P-*rectifiante* d'un groupe nilpotent sans P-torsion comme la suite centrale décroissant le plus vite parmi celles dont les quotients successifs sont sans P-torsion. Une P-*complétion de Malcev* d'un groupe nilpotent sans P-torsion G, sera une extension $\overline{G}$ de G possédant les propriétés suivantes : $\overline{G}$ est un groupe nilpotent sans P-torsion et P-divisible et, pour tout $x \in \overline{G}$, il existe un entier n/P tel que $x^n \in G$. On définira de même la P-complétion de Malcev d'un N-groupe topologique complet dont la topologie est définie par une suite centrale séparante dont les quotients successifs sont sans P-torsion. Les théorèmes (4.8) à (4.14) s'étendent alors sans modification notable des démonstrations. Les résultats nouveaux ainsi démontrés ne semblent pas présenter pour l'instant beaucoup d'intérêt, mais ils montrent tout au moins l'avantage que présente l'exposé de la complétion de Malcev sans faire appel à la théorie des groupes de Lie.

Remarque (4.18). — Il est possible d'exposer plus simplement que nous ne

l'avons fait la théorie de l'inversion de la formule de Hausdorff pour des catégories de groupes plus restreintes : les groupes nilpotents de classe $\leqslant n$, sans V_n-torsion et V_n-divisibles. La variante (1.7*b*) du lemme (1.6) correspond à ce cas. La simplification annoncée provient de ce qu'on peut alors éviter l'usage du théorème (3.6). Considérons, en effet, un groupe libre G, de générateurs indépendants $(x_i)_{i\in I}$, et sa complétion de Malcev L(G) lorsqu'on considère G comme un N-groupe sans torsion topologisé par sa suite centrale descendante (4.1). Considérons les sous-groupes $\Gamma_{(i)}$ de L(G) engendrés par les éléments $x_i^{n^{i-1}}$; alors, tous les $\Gamma_{(i)}$ sont des groupes libres engendrés par les générateurs indépendants $x_i^{(n-1)^{i-1}}$, et leur réunion Γ est une V_n-complétion de Malcev de G, considéré comme N-groupe sans V_n-torsion topologisé par sa suite centrale descendante (4.17). On voit ainsi comment tout homomorphisme f de G dans un groupe nilpotent H, V_n-divisible et sans V_n-torsion peut se prolonger en un homomorphisme unique g de Γ dans H : il suffira de prolonger successivement f aux groupes $\Gamma_{(i)}$. Si l'on suppose de plus que H est de classe n au plus, un homomorphisme g de Γ *sur* H permet d'établir la structure de Q_n-algèbre de Lie de H [*cf.* (4.5)].

5. Construction d'un groupe particulier. — Nous voulons construire une algèbre de Lie sur le corps Z_5 des entiers mod5, qui soit de classe 5 et dont toutes les sous-algèbres à trois générateurs soient de classe $\leqslant 4$.

Considérons d'abord l'algèbre de Lie libre L_0 engendrée sur le corps Z_5 par les cinq générateurs indépendants x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Nous noterons généralement $[y_1, y_2, \ldots, y_s]$ l'alternant par rapport à $y_1, \ldots, y_s \in L_0$ défini par la relation de récurrence :

$$[y_1, \ldots, y_{s-1}, y_s] = [[y_1, \ldots, y_{s-1}], y_s].$$

Nous savons que L_0 est une algèbre de Lie graduée, et même multigraduée, si l'on considère les degrés par rapport à chacun des générateurs.

Les éléments multilinéaires de degré total 5 (c'est-à-dire homogènes de degré 1 par rapport à chacun des générateurs) constituent, d'après les formules de Witt [33], un Z_5-module de dimension 24. Or, chacun d'eux est égal à une combinaison linéaire des éléments $[x_1, x_i, x_j, x_k, x_l]$, où (i, j, k, l) désigne l'une des 24 permutations des indices (2, 3, 4, 5). Ces éléments sont donc linéairement indépendants sur Z_5.

Nous allons maintenant prendre le quotient L de L_0 par l'idéal engendré par :

1° tous les éléments de degré total $\geqslant 6$;

2° tous les éléments de degré total 5 qui sont de degré au moins égal à 2 par rapport à l'un des générateurs x_i;

3° tous les éléments multilinéaires de degré total 5 qui sont de la forme

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] - \varepsilon_\sigma [x_1, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}],$$

où σ désigne une permutation des indices 2, 3, 4, 5, et ε_σ sa signature.

Pour ne pas alourdir les notations, nous désignerons désormais par x_i l'image canonique dans L du générateur précédemment noté x_i de Γ_0 (qui n'interviendra plus).

On voit facilement que L est encore une algèbre multigraduée par rapport aux générateurs x_i. C'est une algèbre de classe 5, puisque

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = X \neq 0;$$

de plus, tout alternant de degré 5 est un multiple de X. Pour calculer $[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$, où $y_i \in L$, nous pouvons remplacer chaque y_i par sa composante homogène de degré total 1. Posons donc

$$y_i = \Sigma_{j=1}^{5} a_{i,j} x_j \qquad (1 \leq i \leq 5;\ a_{i,j} \in Z_5);$$

le calcul de $[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$ se ramène alors au calcul des alternants $[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$, où (i, j, k, l, m) représente une permutation des indices (1, 2, 3, 4, 5). D'après la construction de L, nous avons :

$$[x_1, x_i, x_j, x_k, x_l] = \varepsilon X, \tag{5.1}$$

où ε désigne la signature de la permutation (i, j, k, l) des indices (2, 3, 4, 5). Nous obtenons ensuite :

$$\begin{cases} [x_i, x_1, x_j, x_k, x_l] = -[x_1, x_l, x_j, x_k, x_l] = -\varepsilon X, \\ [x_i, x_j, x_1, x_k, x_l] = -[x_1, [x_i, x_j], x_k, x_l] = -2\varepsilon X, \\ [x_i, x_j, x_k, x_1, x_l] = -[x_1, [x_l, x_j, x_k], x_l] = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

et de même :

$$[x_l, x_j, x_k, x_l, x_1] = 0.$$

Les formules (5.1) et (5.2) nous permettent de calculer $[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5] = \lambda X$, le coefficient $\lambda \in Z_5$ étant égal au déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -2a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \lambda. \tag{5.3}$$

Pour montrer que toute sous-algèbre à trois générateurs z_1, z_2, z_3 est de classe ≤ 4, il suffit de montrer que tous les alternants de la forme $[z_i, z_j, z_k, z_l, z_m]$, où les indices i, j, k, l, m prennent indépendamment les valeurs 1, 2, 3, sont nuls. Or, dans ce cas, le déterminant (5.3) est nul, puisque, si on le développe suivant les éléments de la première colonne, chaque mineur a au moins deux lignes égales. Par contre, il existe des sous-algèbres de L à quatre générateurs qui sont de classe 5 : ainsi

$$[x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_2, x_4, x_5] = -3X \neq 0.$$

Il est facile de calculer la dimension (sur Z_3) de la sous-algèbre engendrée par x_1+x_2, x_3, x_4, x_5. Le module de ses éléments de degré 5 a (comme pour L) la dimension 1. Quant aux éléments de degré ≤ 4, ils constituent des modules dont les dimensions sont les mêmes que pour une algèbre de Lie libre à quatre générateurs, c'est-à-dire (pour les degrés 1, 2, 3, 4 respectivement) : 4, 6, 20, 60.

Si nous définissons sur cette sous-algèbre de Lie une structure de groupe au moyen de la formule de Hausdorff, nous voyons que nous avons construit un groupe à quatre générateurs, d'ordre 5^{91}, de classe 5, et tel que chacun de ses sous-groupes à trois générateurs soit de classe 4 au plus (l'ordre de chaque élément du groupe, sauf l'élément neutre, est 5). L'énoncé du théorème (4.6) se trouve ainsi légitimé.

Bibliographie.

(Les titres d'articles en russe ont été traduits.)

[1] Baer (R.). — *The higher commutator subgroups of a group* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1944, p. 143-160).

[2] Birkhoff (G.). — *Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices* (*Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 526-532).

[3] Chirchov (A. I.). — *Sur la représentation des anneaux de Lie dans les anneaux associatifs* (*Ousp. Mat. Naouk.*, t. 8, 1953, p. 173-175).

[4] Cohn (P. M.). — *Generalization of a theorem of Magnus* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, 3e série, t. 2, 1952, p. 297-310).

[5] Fox (R. H.). — *Free differential calculus* (I) (*Ann. Math.*, t. 57, 1953, p. 547-560).

[6] Grün (O.). — *Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung* (*J. R. An. Math.*, t. 182, 1940, p. 158-177).

[7] Hall (M.). — *A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 575-581).

[8] Hall (P.). — *A contribution to the theory of groups of prime power order* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, t. 36, 1934, p. 29-95).

[9] Hausdorff (F.). — *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie* (*Ber. Sächs Ges.*, t. 58, 1906, p. 19-48).

[10] Jacobson (N.). — *Abstract derivations and Lie algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 42, 1937, p. 206-224).

[11] Jacobson (N.). — *Restricted Lie algebras of characteristic p* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1941, p. 15-25).

[12] Jennings (S. A.). — *The structure of the group-ring of a p-group over a modular field* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1941, p. 175-185).

[13] Kaloujnine (L.). — *Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, p. 2067-2069).

[14] Kaloujnine (L.). — *Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait (généralisation d'un théorème de M. Ph. Hall)* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 400-402).

[15] Lazard (M.). — *Sur les algèbres enveloppantes universelles de certaines algèbres de Lie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 788-791).

[16] Lazard (M.). — *Sur certaines suites d'éléments dans les groupes libres et leurs extensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 36-38).

[17] Lazard (M.). — *Détermination et généralisation des groupes de dimension des groupes libres* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1222-1224).

[18] Lazard (M.). — *Problèmes d'extension concernant les* N*-groupes; inversion de la formule de Hausdorff* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1377-1379).

[19] Leray (J.). — *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue* (chap. I, § 1) (*J. Math. pures et appl.*, t. 29, 1950, p. 10-14).

[20] Lévi (F.) et van der Vaerden (B. L.). — *Ueber eine besondere Klasse von Gruppen* (*Abh. Mat. Sem. Hamb.*, t. 9, 1952, p. 154-158).

[21] Magnus (W.). — *Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring* (*Math. Ann.*, t. 111, 1935, p. 259-280).

[22] Magnus (W.). — *Ueber Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren* (*J. R. An. Math.*, t. 177, 1937, p. 105-115).

[23] Magnus (W.). — *Ueber Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe* (*J. R. An. Math.*, t. 182, 1940, p. 142-149).

[24] Magnus (W.). — *A connection between the Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside* (*Ann. Math.*, t. 52, 1950, p. 111-126).

[25] Malcev (A. I.). — *Sur une classe d'espaces homogènes* (*Izvest. Akad. Nauk S. S. S. R.*, sér. Math., t. 13, 1949, p. 9-32).

[26] Malcev (A. I.). — *Groupes nilpotents sans torsion* (*Izvest. Akad. Nauk S. S. S. R.*, sér. Math., t. 13, 1949, p. 201-212).

[27] Malcev (A. I.). — *Sur les algèbres de Lie normées sur le corps des nombres rationnels* (*Dok. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 62, 1948, p. 745-748).

[28] Poincaré (H.). — *Sur les groupes continus* (*Œuvres*, t. III, p. 173-212, Paris, 1934).

[29] Samuel (P.). — *Algèbre locale* (*Mém. Soc. Math.*, t. 123, 1953).

[30] Sanov (I. N.). — *Sur une liaison entre des groupes périodiques dont la période est un nombre premier et des anneaux de Lie* (*Izvest. Akad. Nauk S. S. S. R.*, sér. Mat., t. 16, 1952, p. 23-58).

[31] Sanov (I. N.). — *Sur un système de relations dans les groupes périodiques dont la période est une puissonce d'un nombre premier* (*Izvest. Akad. Nauk S. S. S. R.*, sér. Mat., t. 15, 1951, p. 477-502).

[32] Schafarevitch (I. R.). — *Sur les p-extensions* (*Mat. Sbor.*, t. 20, 1947, p. 351-363).

[33] Witt (E.). — *Treue Darstellung Liescher Ringe* (*J. R. An. Math.*, t. 177, 1937, p. 152-160).

[34] Zassenhaus (H.). — *The theory of groups* (New-York, Chelsea, 1949).

[35] Zassenhaus (H.). — *Ueber liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik* (*Abh. Mat. Sem. Hamb.*, t. 13, 1940, p. 1-100).

[36] Zassenhaus (H.). — *Ein Verfahren, jeder endlichen p-Gruppe einen Lie-Ring mit der Charakteristik p zuzuzuordnen* (*Abh. Mat. Sem. Hamb.*, t. 13, 1940, p. 200-207).

TRISECTRICES
DES ANGLES D'UN TRIANGLE

PAR M.-B. GAMBIER.

1. DÉFINITIONS. HISTORIQUE. BUT DE CE TRAVAIL (1). — Soit ABC un triangle plan; A, B, C, nombres compris entre 0 et π, sont les mesures des angles, au sens de la géométrie élémentaire; posons

$$A_h = A + 2h\pi, \qquad B_k = B + 2k\pi, \qquad C_l = C + 2l\pi,$$

h, k, l étant égaux chacun à 0, 1 ou 2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tournant autour de A en balayant d'abord l'aire ABC peut s'appliquer sur la demi-droite $\overrightarrow{AC}$ par une rotation de valeur absolue A_h; *la rotation de valeur absolue* $\frac{1}{3}A_h$ *donne la demi-droite* $\alpha_{h,B}$, *trisectrice de* A_h *adjacente à* AB *et, la rotation double, la demi-droite* $\alpha_{h,C}$ *trisectrice de* A_h, *adjacente à* AC; par permutations circulaires, on définit de même $(\beta_{k,C})$, $(\beta_{k,A})$, puis $(\gamma_{l,A})$, $(\gamma_{l,B})$. Les trisectrices de B_k, C_l adjacentes à BC se coupent au point M_{kl} qui, suivant les valeurs de k, l peut être sur une demi-droite $(\beta_{k,C})$, $(\gamma_{l,B})$ ou la demi-droite opposée (la figure 1 fournira l'indication précise).

Le Professeur Frank Morley [1], de l'Université Johns Hopkins, a, vers 1900, dans son Cours oral, montré que *le lieu des foyers des cardioïdes tangentes aux côtés du triangle* ABC *est constitué de neuf droites, parallèles par groupes de trois aux directions moyennes des côtés du triangle;* Morley explique ensuite qu'en menant d'un point B les tangentes $B\alpha$, $B\beta$, $B\gamma$ à une cardioïde de foyer M, on a

$$(B\alpha, BM) + (B\beta, BM) + (B\gamma, BM) = 0 \pmod{\pi},$$

(1) La Bibliographie sera donnée en fin de ce travail.

si BC *est tangente double*, BA *tangente simple, on a*

$$2(\mathrm{BC},\ \mathrm{BM}) + (\mathrm{BA},\ \mathrm{BM}) = 0,$$

de sorte que BM *est trisectrice adjacente à* BC *de l'un des angles* B_k; *si* CA *est elle-même tangente,* M *est intersection des supports de* $(\beta_{k,0}), (\gamma_{l,0})$. *Il existe* 9 *points* M_{kl}, 9 N_{lh}, 9 P_{hk}, *en prenant les trisectrices adjacentes à* BC, CA, AB. *Ces* 27 *points sont répartis par groupes de six sur neuf droites que nous appellerons droites de Morley et sont sommets de* 27 *triangles équilatéraux, dont trois ont pour sommets des points* M, *trois des points* N, *trois des points* P; *neuf autres sont du type* $M_{kl}N_{lh}P_{hk}$ *avec* $h + k + l = 0, 3, 6$ *et sont de même sens de rotation que* ABC; *les neuf derniers correspondent à* $h + k + l = 2$ *ou* 5 *et sont de sens opposé à* ABC.

Ces résultats, à peine esquissés par Morley, furent indiqués vers 1913 aux Professeurs Glanville Taylor et W. L. Marr [2] d'Edimbourg par divers correspondants; les auteurs anglais en jeu ont, dans trois Mémoires consécutifs, étudié en détail la figure de Morley, se bornant aux propriétés des trisectrices, sans s'occuper des cardioïdes, tandis que Morley a, au contraire, indiqué de nombreuses propriétés de tangentes aux cardioïdes, sans presque se soucier des trisectrices et ce n'est qu'en 1933, dans un traité didactique que Morley donne enfin un énoncé abrégé de son théorème. En 1923, Bricard [3] fait connaître en France le résultat de Morley et donne, tout en signalant l'existence des autres triangles équilatéraux, une démonstration, qualifiée par lui-même d'artificielle, relative au triangle équilatéral formé par les trisectrices intérieures; de 1931 à 1939, le Bulletin corporatif X-*Information* [4] a publié de nombreuses démonstrations relatives au triangle intérieur; la lecture de ces articles m'a fait connaître le théorème de Morley et écrire en 1931 et 1937 des articles pédagogiques dans l'*Enseignement Scientifique* [5]; une démonstration due à M. Sasportes, ingénieur au Corps des Mines, m'avait frappé par son élégance et je l'ai exposée au *Bulletin des Sciences Mathématiques;* l'auteur n'avait pas remarqué que *son procédé permet d'étudier non seulement le point* M_{00}, *mais aussi chacun des neuf points* M_{kl} *et donne, pour chacun d'eux, non seulement un triangle* MNP *ayant son sommet* M *confondu avec* M_{kl}, *mais aussi un nouveau* MN_1P_1, *de même sommet* M, *avec* N_1 *sur* MP *et* P_1 *sur* MN; *l'objet de ce travail sera de montrer comment ce procédé permet de développer toute cette théorie*. Je citerai encore une petite étude du Professeur Marchand [6] de Lausanne, puis une étude puissante de H. Lebesgue [7] où ce dernier étend les résultats aux *n*-sectrices. Enfin en 1949 j'ai publié dans *Mathesis* une synthèse des résultats connus jusqu'alors, contenus tous dans les Mémoires de Glanville Taylor et Marr; grâce à un résultat inédit qu'un ancien polytechnicien, H. Martiny (promotion 1903), a bien voulu me communiquer, je pourrai présenter la plupart des résultats complémentaires dus aux auteurs anglais sous forme presque totalement géométrique.

2. Division ou multiplication des angles. — Au lieu de partir d'un triangle ABC donné et de diviser ses angles en trois, il est plus simple de donner les points B, C, de choisir un point M du plan et de multiplier par trois les angles (BC, BM), (CB, CM); les symétriques de BC par rapport à BM et CM se coupent en M'; ensuite la symétrique de BM par rapport à BM', de CM par rapport à CM' se coupent en A et le point M est l'un des points M_{kl} du triangle ABC obtenu; la figure 1 indique, suivant les régions, les valeurs de k, l; les courbes séparatrices

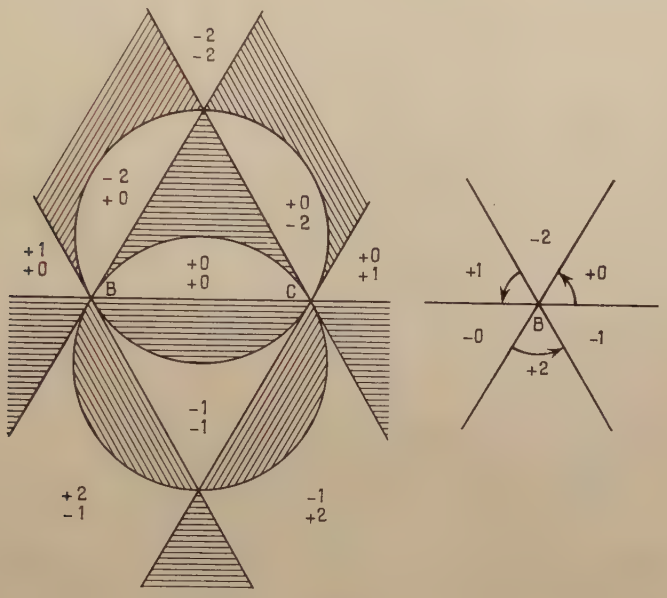

Fig. 1.

sont les cercles issus de B, C, lieux des points d'où le segment BC est vu sous l'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$, et les droites issues de B et C, inclinées sur BC à $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$; si M vient sur l'un des cercles, A est rejeté à l'infini; si M vient sur l'une de ces quatre droites, A est confondu avec B ou C ou indéterminé sur BC. Nous avons figuré BC horizontale, B à gauche de C; les 18 régions obtenues sont deux à deux symétriques par rapport à BC, de sorte que l'on peut se borner aux régions non hachurées; dans chaque région conservée, nous avons indiqué les valeurs de k, l, précédées du signe + (ou —) suivant que M est sur la demi-droite $\beta_{k,C}$ (ou l'opposée) et de même pour $\gamma_{2,A}$ (le nombre k est écrit au-dessus du nombre l); nous avons aussi indiqué à part les trois secteurs balayés par les demi-droites $(\beta_{0,C})$, $(\beta_{1,C})$, $\beta_{2,C})$; quand M est dans l'une des neuf régions conservées, A est dans le demi-plan supérieur et le sens de circulation $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ est le sens direct trigonométrique habituel. Pour mémoire, si M est pris sur le cercle de diamètre BC, M' est rejeté à l'infini, mais A est lui aussi sur le

même cercle et cela ne gêne en rien. Nous ferons encore remarquer que la donnée de M, détermine M′, puis A; le symétrique du vecteur $\overrightarrow{BC}$ par rapport à la droite indéfinie BM donne la direction positive de $\beta_{k,A}$ et le symétrique du vecteur $\overrightarrow{BA}$ par rapport à la droite indéfinie BM′ donne la direction positive de $\beta_{k,C}$ sans avoir besoin de recourir à la figure 1.

L'avantage de ce procédé est que, d'un seul coup, nous exposons le procédé de M. Sasportes pour chacun des points M_{kl}, sans avoir besoin, provisoirement,

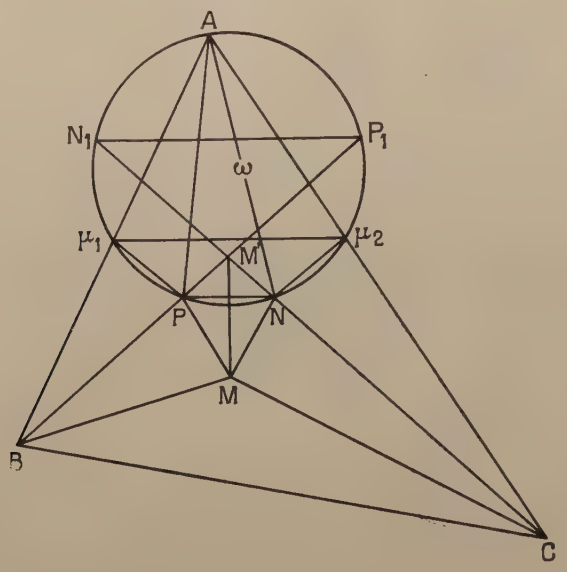

Fig. 2.

d'indiquer la valeur précise des entiers k, l et, qu'au lieu de dessiner une figure contenant les trois points A, B, C, les 27 points M, N, P, les côtés du triangle, les 18 trisectrices, les 9 droites de Morley et un certain nombre de points et droites auxiliaires, nous avons une figure simple ne décourageant pas le lecteur. La figure 2 est dessinée pour le cas où M est M_{00}, mais le raisonnement reste valable pour l'ensemble des 9 points M_{kl}, grâce au fait que nous employons *des droites orientées*, donnant *des angles définis* $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, que nous pourrons ensuite diviser par 2 de façon à obtenir *des angles définis* $(\mathrm{mod}\, \pi)$. Les notations employées sont celles de Glanville Taylor.

Soit maintenant la remarque essentielle pour ce qui suit : la *vraie bissectrice* des demi-droites $\overrightarrow{BC}$, $(\beta_{k,A})$ est le *support* de $(\beta_{k,C})$ considéré comme droite indéfinie; le *cycle* de centre M_{kl} et tangent à $\overrightarrow{BC}$ est *tangent, non pas à* $(\beta_{k,A})$, *mais à la demi-droite opposée* (résultat qui n'exige pas de savoir si M est sur la demi-droite $\beta_{k,C}$ ou l'opposée); le support de $(\gamma_{l,B})$ est *la vraie bissectrice* de $\overrightarrow{CB}$

et $(\gamma_{l,A})$, donc la *fausse bissectrice* de $\overset{\rightarrow}{BC}$ et $(\gamma_{l,A})$, de sorte que le *cycle en jeu se trouve tangent à* $(\gamma_{l,A})$ *et à l'opposée de* $(\beta_{k,A})$: MM′ *est la vraie bissectrice de* $(\gamma_{l,A})$, $(\beta_{k,A})$. Nous écrivons $(\mathrm{mod}\,2\pi)$

$$(1)\qquad \begin{cases} (\gamma_{l,A}, \overset{\rightarrow}{CB}) + (\overset{\rightarrow}{BC}, \beta_{k,A}) = \frac{2}{3}(B_k + C_l), \\ (\gamma_{l,A}, \overset{\rightarrow}{CB}) + (\overset{\rightarrow}{CB}, \overset{\rightarrow}{BC}) + (\overset{\rightarrow}{BC}, \beta_{k,A}) = (\gamma_{l,A}, \beta_{k,A}) = \pi + \frac{2}{3}(B_k + C_l). \end{cases}$$

En divisant par 2, *nous obtenons une égalité* $(\mathrm{mod}\,\pi)$ *relative à droites non orientées*

$$(2)\qquad (\gamma_{l,A}, MM') = (MM', \beta_{k,A}) = \frac{\pi}{2} + \frac{B_k + C_l}{3} \qquad (\mathrm{mod}\,\pi).$$

C'est maintenant que nous faisons la construction indiquée par M. Sasportes (en l'étendant aux deux couples N, P et N_1, P_1 au lieu du seul N, P) : nous menons par M les droites *non orientées* MNP_1 et MPN_1 définies par

$$(3)\qquad (MM', MNP_1) = -\frac{\pi}{6}, \qquad (MM', MPN_1) = \frac{\pi}{6} \qquad (\mathrm{mod}\,\pi).$$

La droite MNP_1 rencontre CM′ en N et BM′ en P_1 ; de même MPN_1 rencontre BM′ en P et CM′ en N_1 (la suite montre que N, P, N_1, P_1 sont à distance finie). La droite MM′ est axe de symétrie pour les droites *indéfinies* BM′, CM′ d'une part, puis MNP_1 et MPN_1 de l'autre, pour chacun des couples (P, N) ou (P_1, N_1) ; le triangle MNP est *isocèle*, et même *équilatéral*, car on a

$$(4)\qquad (\overset{\rightarrow}{MN}, \overset{\rightarrow}{MP}) = 2(MNP_1, MM') = \frac{\pi}{3} \qquad (\mathrm{mod}\,2\pi).$$

Ce triangle MNP *est de même sens que* ABC ; MN_1P_1 *est, lui aussi, équilatéral, mais de sens opposé à* ABC.

Nous voulons prouver que AN, AP *sont les supports de* $(\alpha_{h,C})$, $(\alpha_{h,B})$ *où h est un entier à déterminer ; de même* AN_1, AP_1 *les supports de* $(\alpha_{h_1,C})$, $(\alpha_{h_1,B})$, h_1 *étant aussi à déterminer.*

Le symétrique μ_1 de M par rapport à BM′ est sur BA ; les angles (μ_1P, μ_1P_1), (N_1P, N_1P_1) sont égaux : le premier est symétrique de (MP, MP_1), égal à $\left(\frac{-\pi}{3}\right)$, par rapport à BPM′$P_1$ et le second symétrique du même angle par rapport à la médiatrice de MN_1 ; μ_1, N_1 sont cocycliques avec P, P_1 ; le cercle circonscrit au trapèze isocèle PNP_1N_1 contient μ_1 et aussi μ_2 symétrique de M par rapport à CM′ ; PN, $\mu_1\mu_2$, N_1P_1 sont trois cordes parallèles de ce cercle. L'égalité (2), changée de signe, est

$$(2')\qquad (BM', MM') = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}(B_k + C_l) \qquad (\mathrm{mod}\,\pi)$$

ajoutant (MM', MNP_1), égal à $\left(\frac{-\pi}{6}\right)$, aux deux membres, on a

$$(5)\quad \begin{cases} (BM', MNP_1) = (P_1P, P_1N) = -\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}(B + C + 2k\pi + 2l\pi) \pmod{\pi} \\ \qquad\qquad = \frac{A}{3} - \frac{2(k+l)\pi}{3} \pmod{\pi}. \end{cases}$$

Les cordes *consécutives* $\mu_1 P$, PN, $N\mu_2$ sont égales ($\mu_1 P = PM$ par symétrie autour de BM' $N\mu_2 = NM$ par symétrie autour de CM' et MNP est équilatéral); les angles $(P_1\mu_1, P_1P)$, (P_1P, P_1N), $(P_1N, P_1\mu_2)$ sont égaux et leur somme est égale à A, ou $(A\mu_1, A\mu_2)$, toujours (mod π) : *donc le point* A *lui-même est sur le cercle étudié, résultat essentiel.* La valeur trouvée pour (P_1P, P_1N) est aussi la valeur commune de $(A\mu_1, AP)$ [ou (AB, AP)], (AP, AN), $(AN, A\mu_2)$ [ou AN, AC], de sorte que AP, AN *sont deux trisectrices associées, respectivement adjacentes à* AB, AC, *d'un certain angle que l'on peut représenter par* $A + \lambda\pi$, *où* λ *est un certain entier, indéterminé à un multiple près de* 3; on peut donc supposer λ *pair*, congru (mod 1) à 0, 2, 4; nous posons $\lambda = 2h$, et nous écrivons

$$(6)\qquad (AP, AN) = (P_1P, P_1N) = \frac{A}{3} - \frac{2(k+l)\pi}{3} = \frac{A}{3} + 2h\frac{\pi}{3} \pmod{\pi},$$

d'où résulte que $2(h+k+l)$, *donc* $h+k+l$, *est multiple de* 3

$$(7)\qquad \boxed{h + k + l \equiv 0 \pmod 3.}$$

Si, au lieu d'ajouter (MM', MNP_1) aux deux membres de (2'), nous ajoutons (MM', MPN_1) qui est égal à $\left(\frac{\pi}{6}\right)$, on obtient

$$(8)\qquad (PP_1, PN_1) = \frac{A}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{2(k+l)\pi}{3}.$$

Les cordes *consécutives* $\mu_1 P_1$, P_1N_1, $N_1\mu_2$ sont égales (même raison que précédemment) et puisque A est sur le cercle étudié, on a

$$(A\mu_1, AP_1) = (AP_1, AN_1) = (AN_1, A\mu_2) \pmod{\pi},$$

la valeur commune étant celle de (PP_1, PN_1) ou $\frac{A}{3} + \frac{\pi}{3} - 2(k+l)\frac{\pi}{3}$; la somme de ces angles est égale à A (mod π), d'où

$$\frac{A}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{2(k+l)\pi}{3} = \frac{A}{3} + 2h_1\frac{\pi}{3};$$

par suite, $2(h_1 + k + l) - 1$ est multiple de 3, donc aussi $4(h_1 + k + l) - 2$, ou encore $(h_1 + k + l) - 2$; on écrit, au lieu de (7),

$$(9)\qquad \boxed{h_1 + k + l \equiv 2 \pmod 3.}$$

On voit que l'on peut prendre $h_1 = h + 2 \pmod 3$.

3. Étude des droites de Morley. — Le point M étant choisi, la figure 1 indique la valeur des indices k, l; nous obtenons *rationnellement* d'abord N_{lh}, P_{hk}, N_{lh_1}, P_{h_1k}, puis A, puis l'ensemble des points M, N, P restants, puisqu'il suffit de faire tourner chacune des trisectrices déjà connues de $\pm\frac{\pi}{3}$ autour du sommet correspondant.

Un fait, un peu imprévu, est que h, k, l ne peuvent prendre arbitrairement chacun les valeurs 0, 1, 2 *et que nous ne trouvons que* 18 *triangles équilatéraux, correspondant à $h+k+l=0$, 3, 6 d'une part, $h+k+l=2,5$ de l'autre.* Faisons le tableau des neuf triangles de même sens que ABC :

(10)
$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&0&0&1&2&0&2&1\\ 1&1&1&1&2&0&1&0&2\\ 2&2&2&2&0&1&2&1&0 \end{array}\right.$$

Il est clair que la relation $h+k+l$ égale à un multiple de 3 est conservée en augmentant chaque entier h, k, l d'une unité (puis le ramenant éventuellement à l'une des valeurs 0, 1, 2) et c'est ainsi que la seconde, puis la troisième ligne se déduisent de la première, *chaque colonne contient une triade de triangles que l'on devra toujours associer entre eux : la suite le prouvera.*

On forme, de même, les triangles de sens opposé à ABC

(11)
$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2&0&0&0&2&0&0&0&2\\ 0&1&1&1&0&1&1&1&0\\ 1&2&2&2&1&2&2&2&1 \end{array}\right.$$

Les triangles de chaque triade verticale seront aussi à associer ensemble.

Le même procédé réussit pour les triangles non équilatéraux qui seront indispensables à étudier et à répartir entre trois triades de triangles associés :

(12)
$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 2&1&1&1&2&1&1&1&2\\ 0&2&2&2&0&2&2&2&0 \end{array}\right.$$

Les 27 points M_{kl}, N_{lh}, P_{hk} sont alignés six par six sur neuf droites, dont deux passent par chaque point. Cette proposition fondamentale s'obtient sans effort : chacun des 27 points est sommet commun de deux triangles équilatéraux de Morley, d'espèce différente, ayant en commun les supports des deux côtés issus de ce point : MNP, MN_1P_1 avec N_1 sur MP et P_1 sur MN, de sorte que l'on obtient déjà les alignements MNP_1 et MN_1P. Nous formons le tableau suivant (on peut permuter A, B, C, les lettres M, N, P ou forcer les indices tous d'une unité) :

0	$N_{00}P_{00}M_{00}$	3	$N_{11}P_{11}M_{11}$	6	$N_{22}P_{22}M_{22}$
2	$P_{00}M_{02}N_{20}$	2	$P_{11}M_{10}N_{01}$	5	$P_{22}M_{21}N_{12}$
3	$M_{02}N_{21}P_{10}$	3	$M_{10}N_{02}P_{21}$	3	$M_{21}N_{10}P_{02}$
5	$N_{21}P_{12}M_{22}$	2	$N_{02}P_{20}M_{00}$	2	$N_{10}P_{10}M_{11}$
3	$P_{12}M_{20}N_{01}$	3	$P_{20}M_{01}N_{12}$	3	$P_{01}M_{12}N_{20}$
2	$M_{20}N_{00}P_{02}$	2	$M_{01}N_{11}P_{10}$	5	$M_{12}N_{22}P_{21}$
	$N_{00}P_{00}M_{00}$		$N_{11}P_{11}M_{11}$		$N_{22}P_{22}M_{22}$

Prenons la première colonne et la première ligne : le côté $P_{00}N_{00}$ a donné le triangle $P_{00}N_{00}M_{00}$ et sur le côté $P_{00}N_{00}$ nous trouvons M_{02}, sommet du nouveau triangle $P_{00}M_{02}N_{20}$ de genre opposé à $P_{00}M_{00}N_{00}$; on a forcé de deux unités l'indice de M_{00}; le même procédé permet de déduire de $P_{00}M_{02}N_{20}$ le sommet N_{21} aligné avec P_{00} et M_{02} : cette fois il faut non plus *augmenter* le second indice du dernier sommet N_{20} de deux unités, mais le *diminuer* de deux unités, ou si l'on veut, l'augmenter d'une unité, ce qui donne $M_{02}N_{21}P_{10}$, N_{21} étant aligné avec les sommets déjà inscrits dans les deux premières colonnes; on continue de même en augmentant ou diminuant de deux unités, alternativement le second indice du dernier sommet marqué sur la ligne déjà obtenue; on obtient $N_{21}P_{12}M_{22}$, puis $P_{12}M_{20}N_{01}$, puis $M_{10}N_{00}P_{02}$, et, si nous continuons on retrouve $N_{00}P_{00}M_{00}$, de sorte que *la suite se reproduirait périodiquement de six en six : l'opération est terminée;* la seconde colonne, puis la troisième s'obtiennent en forçant chaque indice d'une unité. Nous avons, dans la première colonne, obtenu les sommets alignés $N_{00}P_{00}M_{02}N_{21}P_{12}M_{20}$ dans l'ordre des permutations circulaires des lettres M, N, P, mais la figure montrera que la disposition topologique est différente. Nous pouvons maintenant former le tableau complet des droites de Morley en rangeant les lettres M, N, P par couples :

$$\Delta\begin{cases}\delta_0 & M_{02}M_{20}N_{00}N_{21}P_{00}P_{12}\\ \delta_1 & M_{10}M_{01}N_{11}N_{02}P_{11}P_{20}\\ \delta_2 & M_{21}M_{12}N_{22}N_{10}P_{22}P_{01}\end{cases}\qquad \Delta'\begin{cases}\delta'_0 & N_{02}N_{20}P_{00}P_{21}M_{00}M_{12}\\ \delta'_1 & N_{10}N_{01}P_{11}P_{02}M_{11}M_{20}\\ \delta'_2 & N_{21}N_{12}P_{22}P_{10}M_{22}M_{01}\end{cases}$$

$$\Delta''\begin{cases}\delta''_0 & P_{02}P_{20}M_{00}M_{21}N_{00}N_{12}\\ \delta''_1 & P_{10}P_{01}M_{11}M_{02}N_{11}N_{20}\\ \delta''_2 & P_{21}P_{12}M_{22}M_{10}N_{22}N_{00}\end{cases}$$

Nous passons de la colonne Δ, à Δ', puis à Δ'' en permutant circulairement M, N, P sans toucher aux indices.

Les droites d'une même colonne sont parallèles. — En effet $N_{00}P_{00}$, $N_{11}P_{11}$, $N_{22}P_{22}$ sont perpendiculaires à $M_{00}M'_{00}$, $M_{11}M'_{11}$, $M_{22}M'_{22}$ qui sont les bissectrices de couples de trisectrices associées, issues de B et C, adjacentes à BA et CA; quand l'indice augmente d'une unité, ces trisectrices tournent autour de B et C d'un même angle, mais en sens inverse (il s'agit ici des trisectrices *orientées*), de sorte que la bissectrice conserve la même direction. On remarquera que M'_{00}, M'_{11}, M'_{22} sont sur une même hyperbole équilatère dont le centre est le milieu de BC, contenant ces deux points B et C, dont les asymptotes sont parallèles à $M_{00}M'_{00}$ et à la droite perpendiculaire; les points M_{00}, M_{11}, M_{22} sont sur une hyperbole analogue dont les directions asymptotiques sont parallèles aux bissectrices de l'angle $BM_{00}C$.

En ajoutant aux deux membres de (2), (NP, MM′) qui est égal à $\frac{\pi}{2}$, on a

$$(\mathrm{NP}, \mathrm{MM}') + (\mathrm{MM}', \beta_{k,\mathrm{A}}) = (\mathrm{NP}, \beta_{k,\mathrm{A}}) = \frac{\mathrm{B}_k + \mathrm{C}_l)}{3} \qquad (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Ajoutant encore $(B_{k,A}, BC)$ qui est égal à $\left(-\frac{2B_k}{3}\right)$ et changeant les signes,

$$(13) \qquad (BC, N_{lk}P_{hk}) = \frac{B_k - C_l}{3} \qquad (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Or, pour définir *une direction moyenne* δ de BC, CA, AB, on écrit

$$3(Ox, \delta) = (Ox, BC) + (Ox, CA) + (Ox, AB)$$

et, faisant coïncider Ox avec BC, on a

$$(14) \qquad 3(BC, \delta) = (BC, CA) + (BC, AB) = B - C \qquad (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Donc les directions Δ, Δ', Δ'' *sont les directions moyennes des côtés du triangle* ABC.

4. Étude des triangles de Morley. — En lisant avec soin le tableau Δ, Δ', Δ'' nous apercevons *trois triangles équilatéraux formés avec les neuf points* M.

$$(15) \qquad \begin{cases} M_{00}M_{12}M_{21} : & M_{12}M_{21} \text{ sur } \delta_2, & M_{21}M_{00} \text{ sur } \delta''_0, & M_{00}M_{12} \text{ sur } \delta'_0 ; \\ M_{11}M_{20}M_{02} : & M_{20}M_{02} \text{ sur } \delta_0, & M_{02}M_{11} \text{ sur } \delta''_1, & M_{11}M_{20} \text{ sur } \delta'_1 ; \\ M_{22}M_{01}M_{10} : & M_{01}M_{10} \text{ sur } \delta_1, & M_{10}M_{22} \text{ sur } \delta''_2, & M_{22}M_{01} \text{ sur } \delta'_2. \end{cases}$$

C'était évident *a priori;* car on prend les intersections d'un faisceau de trois droites inclinées à $\frac{\pi}{3}$ les unes sur les autres, issues de B, avec un faisceau analogue issu de C; les sommets tels que M_{00}, M_{12}, M_{21} correspondent à des rayons tournant respectivement autour de B, C, dans le même sens, du même angle et chaque côté du triangle est vu de B, ou C sous le même angle, $\frac{\pi}{3}$, de sorte que l'on a un triangle équilatéral; les trois cercles circonscrits se coupent aussi en B, C sous un angle égal à $\frac{\pi}{3}$; deux quelconques de ces triangles admettent B (ou C) comme pôle d'homologie et aussi comme centre de similitude, l'angle de similitude étant aussi égal à $\frac{\pi}{3}$, de sorte que les côtés des triangles sont parallèles deux à deux et que les triangles sont aussi deux à deux homothétiques (homologie particulière dont l'axe est à l'infini). *On a un exemple curieux de trois triangles deux à deux homologiques de trois façons différentes.*

Nous devons chercher les axes des homologies. — Pour cela, prenons les deux derniers triangles et écrivons les sommets les uns au-dessus des autres de la façon suivante :

$$(16) \qquad \begin{cases} M_{11}M_{20}M_{02}, & M_{11}M_{20}M_{02}, & M_{11}M_{20}M_{02}; \\ M_{22}M_{01}M_{10}, & M_{01}M_{10}M_{22}, & M_{10}M_{22}M_{01}. \end{cases}$$

La première colonne correspond à l'homothétie; pour passer de la première colonne à la seconde, on décale, d'un rang vers la gauche, la seconde ligne

supposée reproduisant périodiquement $M_{22}M_{01}M_{10}M_{22}$, ..., de sorte que l'on obtient $M_{01}M_{10}M_{22}$; de même pour la troisième colonne, le décalage étant fait cette fois vers la droite. Le tableau Δ, Δ', Δ'' fournit alors l'indication des points où se coupent les côtés homologues; ainsi la seconde colonne donne :

$$P_{12}\begin{cases}\delta_0 : & M_{20}M_{02},\\ \delta_2'' : & M_{10}M_{22};\end{cases}\qquad P_{10}\begin{cases}\delta_1'' : & M_{02}M_{11},\\ \delta_2' : & M_{22}M_{01};\end{cases}\qquad P_{11}\begin{cases}\delta_1' : & M_{11}M_{20},\\ \delta_1 : & M_{01}M_{10}.\end{cases}$$

On a donc l'homologie de pôle C, *car le second indice des lettres* M *est conservé; l'axe est la trisectrice* $\alpha_{1,B}$, *issue de* A, *adjacente à* AB, *relative à l'angle* A_1, *puisque le premier indice des* P *est le même, égal à l'unité.*

La dernière association donne :

$$N_{21}\begin{cases}\delta_0 : & M_{20}M_{02},\\ \delta_2' : & M_{22}M_{01};\end{cases}\qquad N_{11}\begin{cases}\delta_1'' : & M_{02}M_{11},\\ \delta_1 : & M_{01}M_{10};\end{cases}\qquad N_{01}\begin{cases}\delta_1' : & M_{11}M_{20},\\ \delta_2'' : & M_{10}M_{22}.\end{cases}$$

C'est l'homologie de pôle B, *d'axe* $\alpha_{1,C}$ *trisectrice relative à* A_1, *mais adjacente à* AC.

Nous avons vu que l'on peut forcer tous les indices d'une unité; donc, les *triangles* $M_{22}M_{01}M_{10}$, $M_{00}M_{12}M_{20}$ *admettent* B *pour pôle d'homologie, avec axe* $\alpha_{2,C}$ *et* C *pour pôle, avec axe* $\alpha_{2,B}$; *les triangles* $M_{00}M_{12}M_{20}$ *et* $M_{11}M_{20}M_{02}$ *ont* B *pour pôle, avec axe* $\alpha_{0,C}$, *et* C *pour pôle, avec axe* $\alpha_{0,B}$. On fera ensuite les permutations circulaires sur A, B, C, M, N, P sans toucher aux indices.

Nous illustrons cette théorie par une figure d'ensemble (*fig.* 3) dont les éléments ont été calculés par la trigonométrie; il suffit de donner les résultats suivants se rapportant aux hypothèses : $8R = 10$ (R, rayon du cercle circonscrit), $A = 45°$, $B = 60°$, $C = 75°$. On trouve, avec une table de logarithmes à cinq décimales, sans interpolation

$$\begin{array}{lll} M_{22}P_{21} = 3,291 & M_{22}N_{01} = 3,994 & M_{22}M_{10} = 5,915\\ M_{22}P_{12} = 6,937 & M_{22}N_{22} = 9,476 & M_{22}N_1 = 4,020\\ M_{22}P_{10} = 4,517. & & \end{array}$$

J'ai donné ces résultats dans le Mémoire de Mathesis. Il est facile de voir que la disposition *topologique* des neuf droites de Morley et des 27 points correspondants est *toujours la même*, avec cette restriction que l'un des points M, N ou P peut changer de côté par rapport à une trisectrice. On peut, en effet, supposer B, C fixes et A variant dans le demi-plan limité par BC et tel que ABC soit parcouru dans le sens direct; A ne doit pas venir sur BC, ne doit pas s'éloigner à l'infini; chacun des points M_{kl} reste dans la région (kl) indiquée par la figure 1, sans jamais venir sur l'une des courbes frontières; l'ensemble des neuf points M_{kl} conserve la même disposition topologique, ainsi que l'ensemble des neuf droites de Morley, puisque par chaque point M_{kl} passent deux de ces droites et que chaque droite contient deux points M; pour la même raison, l'ensemble des neuf points N (ou des neuf points P) conserve la même

disposition; il est impossible qu'un point M, N ou P vienne se confondre avec un point d'espèce différente : en effet, si un point N se confondait avec un point P, on aurait

$$(AP, AN) = o = \frac{A}{3} + \lambda \frac{\pi}{3} \qquad (\text{mod } \pi),$$

quels que puissent être les indices l, h du point N, les indices h_1, k_1 du point P

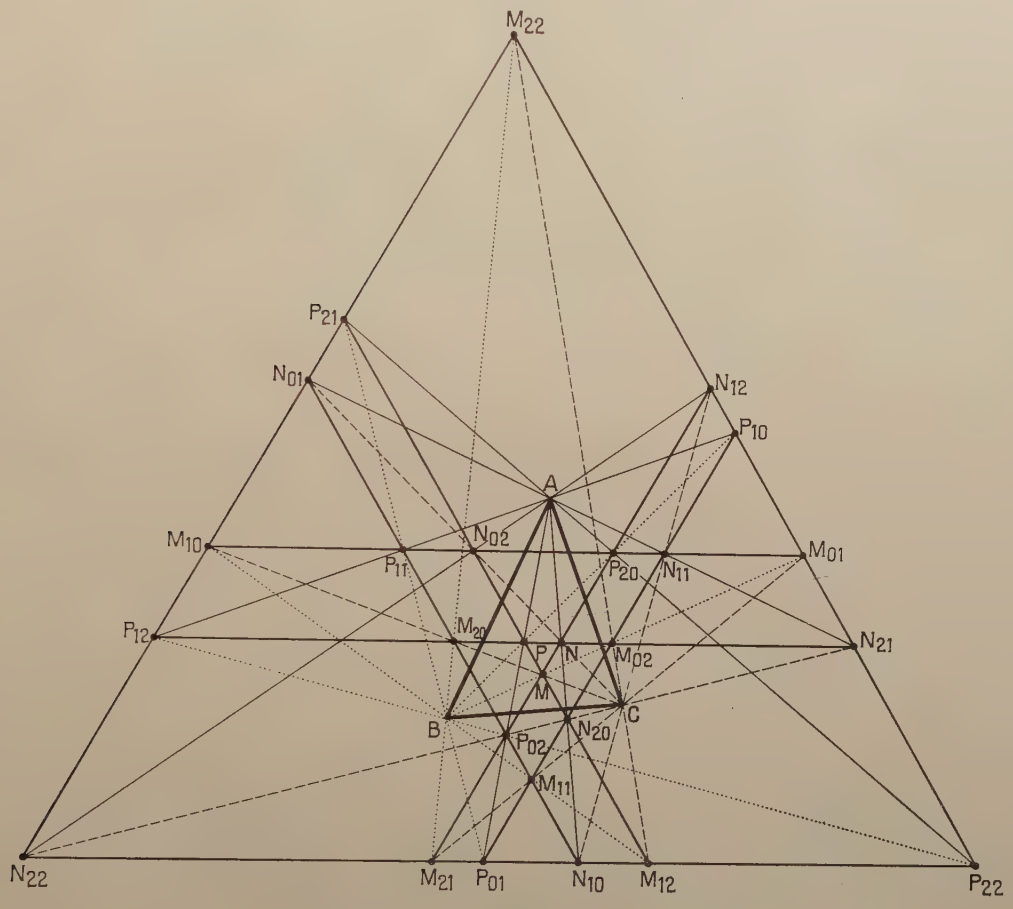

Fig. 3.

en jeu; or $o < \frac{A}{3} < \frac{\pi}{3}$ sans égalité, de sorte que $\frac{A}{3} + \lambda \frac{\pi}{3}$ ne peut être multiple de $\frac{\pi}{3}$, *a fortiori* de π. Cette discussion n'écarte pas la possibilité pour certaines trisectrices de contenir, accidentellement, un point de Morley autre que les trois qu'elle porte normalement : ainsi, sur la figure 3 que nous avons tracée, la trisectrice $CN_{20}N_{21}N_{22}$ coupe la droite de Morley $N_{12}P_{20}N_{00}M_{00}P_{02}M_{21}$ en un point ν tel que

$$N_{00}\nu = 2,136, \qquad N_{00}P_{02} = 2,154,$$

de sorte que ν et P_{02}, tout en étant distincts, sont, à l'échelle du dessin, *pratiquement* confondus; si l'on prend toujours $8R = 10$. $A = 45°$, ces deux points ν et P_{02} coïncident si $\hat{C} = 74°42'$ au lieu de $75°$. La disposition du triangle ABC par rapport à l'ensemble des trisectrices change si l'un des angles devient droit; pour $A = \frac{\pi}{2}$, AC, AB sont les supports des trisectrices $(\alpha_{2,B})$, $(\alpha_{2,C})$; pour $A < \frac{\pi}{2}$, les supports de ces trisectrices ne traversent pas l'intérieur de ABC; si $A > \frac{\pi}{2}$, elles le traversent; on voit de même que les supports des trisectrices $(\alpha_{1,B})$, $(\alpha_{1,C})$ ne traversent pas le triangle ABC.

5. Les 27 cercles de M. Martiny. — La démonstration donnée par M. Sasportes nous a fait étudier pour chaque point M le cercle passant par A et les sommets N, P, N_1, P_1 des deux triangles de Morley ayant M pour sommet commun. A peu près à la même date, M. Martiny a eu l'idée d'envisager, d'un point de vue différent, l'ensemble des 27 cercles analogues, un pour chaque chaque point M_{kl}, N_{lh}, P_{hk}; chacun de ces cercles sera désigné pour abréger par M_{kl} ou N_{lh} ou P_{hk}.

Les neuf cercles qui passent en A *sont tangents, par groupes de trois, à trois droites inclinées les unes sur les autres à* 60°.

Les six cercles correspondant aux points M, N, P *d'une même droite de Morley ont un point commun et, si l'on prend les trois droites de Morley parallèles, les trois points correspondants sont alignés.*

Ces points sont les pôles d'homologie d'une triade de triangles non équilatéraux fournis par le tableau (12). *On a ainsi trois alignements dont les supports sont concourants.*

Un calcul simple, emprunté au travail de Taylor et Marr montrera que *ce point de concours est le point de Lemoine du triangle* ABC (point inverse du centre de gravité, en adoptant la terminologie de la géométrie du triangle).

Nous avons vu (*fig.* 2) que PN, P_1N_1, $\mu_1\mu_2$ sont parallèles : la tangente en A au cercle M est antiparallèle, par rapport à AB, AC, de cette direction commune qui est l'une des directions moyennes de BC, CA, AB; donc puisque M_{kl}, $M_{k+1,l+1}$, $M_{k+2,l+2}$ donnent la même direction pour le côté PN correspondant, les cercles correspondants sont tangents entre eux au point A; chaque groupe de trois cercles associés donne la même tangente inclinée à $\pm\frac{\pi}{3}$ sur chacune des deux autres tangentes communes.

D'après la méthode constamment suivie ici, il suffit de raisonner pour une droite de Morley, ensuite de forcer chaque indice d'une unité, et enfin d'effectuer une permutation circulaire. Raisonnons sur $(\hat{c}_2)$ qui, située en bordure de

la figure 3, a l'avantage de rendre la lecture plus aisée. Prouvons que N_{10}, N_{22} et P_{22}, P_{01} ont un point commun. L'inversion de pôle M_{11} et de puissance

$$\overline{M_{11}B}.\overline{M_{11}M_{12}} = \overline{M_{11}C}.\overline{M_{11}M_{21}}$$

(car les points $M_{00}M_{12}M_{21}$ sont cocycliques avec B, C), donne les échanges suivants :

N_{10}	ou cercle	$BP_{02}M_{11}P_{01}M_{21}$,	droite CM_{12} qui passe en M_{22};
N_{22}	ou cercle	$BP_{21}M_{22}P_{22}M_{12}$,	lui-même; passe en M_{22};
P_{01}	ou cercle	$CN_{10}M_{11}N_{20}M_{12}$,	droite BM_{21} qui passe en M_{22};
P_{22}	ou cercle	$CM_{21}N_{22}M_{22}N_{12}$,	lui même; passe en M_{22}.

Par conséquent, les quatre cercles en jeu ont en commun un point que nous appellerons provisoirement X_2, déterminé sur la droite $M_{11}M_{22}$ par les relations

$$(17)\quad \begin{cases} \overline{M_{11}M_{22}}.\overline{M_{11}X_2} = \overline{M_{11}B}.\overline{M_{11}M_{12}} = \overline{M_{11}C}.\overline{M_{11}M_{21}}, \\ \overline{M_{22}M_{11}}.\overline{M_{22}X_2} = \overline{M_{22}B}.\overline{M_{22}M_{21}} = \overline{M_{22}C}.\overline{M_{22}M_{12}}. \end{cases}$$

La seconde ligne (17) est obtenue en prenant l'inversion de pôle M_{22}, dont la puissance est représentée par le second ou troisième membre des égalités en jeu : les cercles qui étaient transformés en droites sont, cette fois, transformés en eux-mêmes, tandis que les deux autres sont transformés en droites, tous les éléments transformés passant par M_{11}.

Nous prenons ensuite les cercles P_{01}, P_{22} et M_{12}, M_{21} et les traitons par le procédé semblable au moyen des inversions de pôle N_{20} et puissance

$$\overline{N_{20}A}.\overline{N_{20}N_{10}} = \overline{N_{20}C}.\overline{N_{20}N_{22}},$$

ou de pôle N_{12} et puissance

$$\overline{N_{12}A}.\overline{N_{12}N_{22}} = \overline{N_{12}C}.\overline{N_{12}N_{10}},$$

les cercles transformés passent tous soit en N_{12} dans le premier cas, soit en N_{20} dans le second; donc les cercles primitifs ont aussi un point commun à eux quatre, qui ne peut être que X_2 déjà obtenu par P_{01}, P_{22} et l'on a ainsi

$$(18)\quad \begin{cases} \overline{N_{12}N_{20}}.\overline{N_{12}X_2} = \overline{N_{12}C}.\overline{N_{12}N_{10}} = \overline{N_{12}A}.\overline{N_{12}N_{22}}, \\ \overline{N_{20}N_{12}}.\overline{N_{20}X_2} = \overline{N_{20}C}.\overline{N_{20}N_{22}} = \overline{N_{21}A}.\overline{N_{20}N_{10}}. \end{cases}$$

L'existence du point X_2 commun aux six cercles est donc démontrée; mais en considérant M_{12}, M_{21} puis N_{10}, N_{22}, nous avons les inversions nouvelles de pôles P_{02}, P_{21} et les égalités

$$(19)\quad \begin{cases} \overline{P_{02}P_{21}}.\overline{P_{02}X_2} = \overline{P_{02}A}.\overline{P_{02}P_{01}} = \overline{P_{02}B}.\overline{P_{02}P_{22}}, \\ \overline{P_{21}P_{02}}.P_{21}X_2 = \overline{P_{21}A}.\overline{P_{21}P_{22}} = \overline{P_{21}B}.\overline{P_{21}P_{01}}. \end{cases}$$

Les résultats obtenus prouvent que les triangles $M_{11}N_{12}P_{21}$ *et* $M_{22}N_{20}P_{02}$ *sont homologiques,* X_2 *étant centre d'homologie. Ce sont justement deux triangles du*

type $M_{kl}N_{lh}P_{hk}$ avec $h+k+l\equiv 1 \pmod 3$, *qui ne sont pas équilatéraux, dont les côtés n'ont pas les droites de Morley pour supports.*

En forçant les indices d'une unité, nous dressons le tableau

$$(20)\qquad \begin{cases} \delta_0 & M_{02}M_{20}N_{00}N_{21}P_{00}P_{12} & X_0 & M_{11}N_{12}P_{21}; \\ \delta_1 & M_{10}M_{01}N_{11}N_{02}P_{11}P_{20} & X_1 & M_{22}N_{20}P_{02}; \\ \delta_2 & M_{21}M_{12}N_{22}N_{10}P_{22}P_{01} & X_2 & M_{00}N_{01}P_{10}. \end{cases}$$

La première colonne indique trois droites de Morley parallèles; la seconde donne les cercles correspondant aux points M, N, P *portés par cette droite; la troisième colonne indique le nom du point commun aux cercles de cette ligne; enfin chaque point* X_0, X_1 *ou* X_2, *est le pôle d'homologie des deux triangles indiqués sur les deux autres lignes.*

Il s'agit maintenant de prouver que X_0, X_1, X_2 *sont alignés*; remarquons que les deux triangles $P_{21}P_{02}N_{01}$ et $N_{12}N_{20}P_{10}$ sont homologiques, l'axe d'homologie étant $M_{11}X_2M_{22}$, car $P_{21}P_{02}$ et $N_{12}N_{20}$ se coupent en X_2, tandis que $P_{21}N_{01}$ et $N_{12}P_{10}$ portés par δ_2'' et δ_2', se coupent en M_{22}; de même, $P_{02}N_{01}$ et $N_{20}P_{10}$, portés par δ_1' et δ_1'', se coupent en M_{11}; or X_2, M_{11}, M_{22} sont alignés. Par conséquent, les triangles $P_{21}P_{02}P_{10}$, $N_{12}N_{20}N_{01}$ sont aussi homologiques, le centre d'homologie étant le même que pour les deux triangles auxiliaires $P_{21}P_{02}N_{01}$ et $N_{12}N_{20}P_{10}$ que nous venons d'introduire; or, d'après le tableau (20), $P_{02}P_{10}$ et $N_{20}N_{01}$ concourent en X_0, $P_{10}P_{21}$ et $N_{01}N_{12}$ en X_1, $P_{21}P_{02}$ et $N_{12}N_{20}$ en X_2 : donc X_0X_1, X_2 *sont alignés sur une droite qui est l'axe d'homologie des trois triangles* $M_{11}M_{22}M_{00}$, $N_{12}N_{20}N_{21}$ *et* $P_{21}P_{02}P_{10}$.

On a ici un exemple d'un *tableau carré*

$$(21)\qquad \begin{array}{|ccc|c} A & B & C & X \\ A' & B' & C' & X' \\ A'' & B'' & C'' & X'' \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \end{array}$$

tel que deux triangles donnés par deux lignes horizontales soient homologiques, le pôle d'homologie étant mis en regard de l'horizontale non utilisée, les points X, X′, X″ *étant alignés;* il en résulte que *deux verticales donnent aussi deux triangles homologiques, le pôle étant marqué au bas de la verticale non utilisée et alors* α, β, γ *sont eux-mêmes alignés; la droite* XX′X″ *est l'axe d'homologie commun aux couples de triangles verticaux et la droite* $\alpha\beta\gamma$ *l'axe commun aux triangles horizontaux.*

Par permutations circulaires, nous formons donc le tableau donnant *la répartition en triades des neuf triangles* MNP *non équilatéraux* :

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} M_{00} & N_{01} & P_{10} \\ M_{11} & N_{12} & P_{21} \\ M_{22} & N_{20} & P_{02} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} N_{00} & P_{01} & M_{10} \\ N_{11} & P_{12} & M_{21} \\ N_{22} & P_{20} & M_{02} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} P_{00} & M_{01} & N_{10} \\ P_{11} & M_{12} & N_{21} \\ P_{22} & M_{20} & N_{02} \end{vmatrix}$$

et les points (auxquels nous avons donné des noms provisoires) communs aux droites mises en regard

$$
(23)\qquad
\left\{\begin{array}{lll}
X_0\left\{\begin{array}{l}M_{22}M_{00},\\ N_{20}N_{01},\\ P_{02}P_{10};\end{array}\right. & X_1\left\{\begin{array}{l}M_{00}M_{11},\\ N_{01}N_{12},\\ P_{10}P_{21};\end{array}\right. & X_2\left\{\begin{array}{l}M_{11}M_{22},\\ N_{12}N_{20},\\ P_{21}P_{02};\end{array}\right.\\
Y_0\left\{\begin{array}{l}N_{22}N_{00},\\ P_{20}P_{01},\\ M_{02}M_{10};\end{array}\right. & Y_1\left\{\begin{array}{l}N_{00}N_{11},\\ P_{01}P_{12},\\ M_{10}M_{21};\end{array}\right. & Y_2\left\{\begin{array}{l}N_{11}N_{22},\\ P_{12}P_{20},\\ M_{21}M_{02};\end{array}\right.\\
Z_0\left\{\begin{array}{l}P_{22}P_{00},\\ M_{20}M_{01},\\ N_{02}N_{10};\end{array}\right. & Z_1\left\{\begin{array}{l}P_{00}P_{11},\\ M_{01}M_{12},\\ N_{10}N_{21};\end{array}\right. & Z_2\left\{\begin{array}{l}P_{11}P_{22},\\ M_{12}M_{20},\\ N_{21}N_{02}.\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Les points $(X_0X_1X_2)$, $(Y_0Y_1Y_2)$, $(Z_0Z_1Z_2)$ *sont alignés dans chaque groupe;* nous devons remarquer que *les droites* (M_{kl}) $(M_{k+1,\,l+1})$ *au nombre de neuf ont été toutes obtenues une seule fois; de même les neuf droites* (N_{lh}) $(N_{l+1,\,h+1})$ *et les neuf droites* (P_{hk}) $(P_{h+1,\,k+1})$.

Le concours des trois droites $(X_0X_1X_2)$, $(Y_0Y_1Y_2)$, $(Z_0Z_1Z_2)$ sera démontré au paragraphe suivant par un procédé dû à Glanville Taylor.

6. Triades de triangles homologiques. — Il est nécessaire d'adopter les notations abrégées indiquées par Taylor : le triangle $M_{kl}N_{lh}P_{hk}$ est défini sans ambiguïté par la notation $[hkl]$; les trois triangles $[hkl]$, $[h+1,\ k+1,\ l+1]$, $[h+2,\ k+2,\ l+2]$ forment une triade que nous pouvons, sans ambiguïté, représenter par $\left[\overline{hkl}\right]$, car augmenter h, k, l d'une unité revient à prendre les mêmes triangles dans un ordre différent. Nous venons de prouver que *si* $h+k+l$ *est égal à* 1 *ou* 4 (*autrement dit congru à* 1 *suivant le module* 3) *la triade* $\left[\overline{hkl}\right]$ *se compose de trois triangles deux à deux homologiques, donnant trois pôles d'homologie alignés, un axe d'homologie commun.*

Cette même propriété est évidente si $h+k+l$ *est congru à* 0 *ou* 2 *suivant le module* 3, car nous avons reconnu que les supports de $N_{lh}P_{hk}$, $N_{l+1,\,h+1}P_{h+1,\,k+1}$, $N_{l+2,\,h+2}P_{h+2,\,k+2}$ sont trois droites de Morley parallèles si $h+k+l$ a la valeur 0, 3, 6, 2, 5, de sorte que nous avons dans la triade trois triangles équilatéraux de côtés respectivement parallèles : l'axe d'homologie commun étant la droite de l'infini, d'où résulte l'alignement des pôles.

Ces considérations simples nous conduisent à étudier les neuf droites $M_{kl}M_{k+1,\,l+1}$ et *les neuf droites analogues pour* N *ou pour* P, car chacune contient trois pôles d'homologie, suivant que le nombre h est choisi de sorte que $h+k+l$ soit congru à 0, 2 ou 1. Pour cela, déterminons les coordonnées trilinéaires de M_{kl} et de M'_{kl} par rapport à ABC, le système étant choisi de sorte que le centre du cercle inscrit ait pour coordonnées (1, 1, 1).

Les coordonnées x, z de M_{kl} sont, en grandeur et signe, proportionnelles à $\left(\sin\frac{B_k}{3}, \sin\frac{2B_k}{3}\right)$ ou $\left(1, 2\cos\frac{B_k}{3}\right)$; pour abréger, nous posons

$$\alpha_h = \frac{A_h}{3}, \qquad \beta_k = \frac{B_k}{3}, \qquad \gamma_l = \frac{C_l}{3};$$

pour la valeur absolue du rapport, c'est évident; pour le signe, cela résulte de ce que nous avons expliqué en fin du paragraphe 4 sur la situation de chaque trisectrice par rapport aux côtés correspondants de A, B, C. Nous pouvons donc adopter pour coordonnées x, y, z de M_{kl} les valeurs $(1, 2\cos\gamma_l, 2\cos\beta_k)$ et pour coordonnées de M'_{kl}, point *inverse* de M_{kl}, les valeurs $(2\cos\beta_k\cos\gamma_l, \cos\beta_k, \cos\gamma_l)$; ceci suffit à prouver que *les droites* AM'_{kl}, BN'_{lh}, CP'_{hk} *concourent en un point de coordonnées* $(\cos\alpha_h, \cos\beta_k, \cos\gamma_l)$ que nous représenterons sans ambiguïté par le symbole (hkl); le symbole $(\overline{hkl})$ représentera sans ambiguïté la triade correspondant à h, k, l puis $h+1$, $k+1$, $l+1$, et enfin $h+2$, $k+2$, $l+2$. Le résultat est que *la triade* $(\overline{hkl})$ *représente, dans un certain ordre, l'ensemble des pôles d'homologie alignés de la triade* $[\overline{hkl}]$.

Ces propriétés sont simples à démontrer si l'on remarque que la nullité des déterminants

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \sin\lambda & \sin\mu & \sin\nu \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \sin\lambda & \sin\mu & \sin\nu \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \sin\lambda & \sin\mu & \sin\nu \end{vmatrix}$$

prouve que la droite d'équation

$$x\sin(\mu-\nu) + y\sin(\nu-\lambda) + z\sin(\lambda-\mu) = 0$$

est celle qui réunit les points $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, $(\sin\lambda, \sin\mu, \sin\nu)$; le point général de cette droite peut être représenté par les coordonnées paramétriques $[\cos(\lambda+t), \cos(\mu+t), \cos(\nu+t)]$ ou $[\sin(\lambda+t'), \sin(\mu+t'), \sin(\nu+t')]$ $\left(\text{il suffit de remplacer } t \text{ par } t'+\frac{\pi}{2} \text{ pour obtenir les nouvelles expressions}\right)$; deux valeurs de t différentes (non congrues suivant le module π suffisent pour indiquer la droite correspondant à λ, μ, ν).

D'après leur définition, chaque droite AM'_{kl} contient les trois points (h, k, l), $(h+1, k, l)$, $(h+2, k, l)$: *les neuf droites obtenues en faisant varier* k, l *épuisent l'ensemble des* 27 *points; même remarque pour* BN'_{lh}, CP'_{hk}.

Considérons maintenant les neuf droites M_{kl}, $M_{k+1,l+1}$ *que les triades* $[\overline{hkl}]$ *nous ont conduit à étudier*. On peut prendre pour coordonnées de M_{kl}, $\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right), \cos\gamma_l, \cos\beta_k\right]$ et pour celles de $M_{k+1,l+1}$, $\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\gamma_l+\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\beta_k+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$, de sorte que l'on a augmenté chaque angle relatif à M_{kl} de la

quantité $\frac{2\pi}{3}$ pour passer de M_{kl} à $M_{k+1,l+1}$; dans ces conditions l'équation de la droite $M_{kl}M_{k+1,l+1}$ est $\left[\lambda,\ \mu,\ \nu \text{ étant remplacés par } \left(-\frac{\pi}{3}\right),\ \gamma_l,\ \beta_k\right]$

$$x\sin(\gamma_l-\beta_k)+y\sin\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)-z\sin\left(\gamma_l+\frac{\pi}{3}\right)=0. \tag{24}$$

Le point général de cette droite a pour coordonnées, avec une arbitraire t, $\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}+t\right),\ \cos(\gamma_l+t),\ \cos(\beta_k+t)\right]$ puisque M_{kl} s'obtient pour $t=0$, et $M_{k+1,l+1}$ pour $t=\frac{2\pi}{3}$. Montrons que l'on peut choisir les entiers λ, μ, ν et t de sorte que le point général mis en évidence coïncide avec le point $(\cos\alpha_\lambda,\ \cos\beta_\mu,\ \cos\gamma_\nu)$ il *suffit* pour cela que l'on ait

$$-\frac{\pi}{3}+t=\alpha_\lambda,\qquad \gamma_l+t=-\beta_\mu,\qquad \beta_k+t=-\gamma_\nu$$

et ces relations donnent

$$t=\alpha_0+\frac{\pi}{3}+\frac{2\lambda\pi}{3}=-\beta_0-\gamma_0-(l+\mu)\frac{2\pi}{3}=-\beta_0-\gamma_0-(k+\nu)\frac{2\pi}{3}.$$

Les membres extrêmes sont égaux si l'on a

$$l+\mu=k+\nu. \tag{25}$$

En remplaçant $\beta_0+\gamma_0$ par $\frac{\pi}{3}-\alpha_0$, il reste la relation indépendante de t,

$$1+l+\lambda+\mu=0. \tag{26}$$

On voit que si k, l sont donnés et si λ augmente d'une unité, μ, ν diminueront chacun d'une unité. On en déduit que la droite $M_{kl}M_{k+1,l+1}$ contient les trois points :

$$M_{kl}M_{k+1,l+1}:\quad (1,\ 4-l,\ 4-k),\quad (2,\ 3-l,\ 3-k),\quad (0,\ 2-l,\ 2-k).$$

Par permutations circulaires sur M, N, P et (h, k, l), on voit les points situés sur les droites suivantes :

$$N_{lh}N_{l+1,h+1}:\quad (4-l,\ 1,\ 4-h),\quad (3-l,\ 2,\ 3-h),\quad (2-l,\ 0,\ 2-h),$$

$$P_{hk}P_{h+1,k+1}:\quad (4-k,\ 4-h,\ 1),\quad (3-k,\ 3-h,\ 1),\quad (2-k,\ 2-h,\ 0).$$

On en déduit le tableau des 27 droites $M_{kl}M_{k+1,l+1}$ ou $N_{lh}N_{l+1,h+1}$ ou $P_{hk}P_{h+1,k+1}$,

tableau qui permet d'obtenir aisément les pôles d'homologie des triangles $[hkl]$ et $[h+1, k+1, l+1]$:

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{lll}
M_{00}M_{11} : (111)(200)(022) & N_{00}N_{11} : (111)(020)(202) & P_{00}P_{11} : (111)(002)(220)\\
M_{11}M_{22} : (222)(011)(100) & N_{11}N_{22} : (222)(101)(010) & P_{11}P_{22} : (222)(110)(001)\\
M_{22}M_{00} : (000)(122)(211) & N_{22}N_{00} : (000)(212)(121) & P_{22}P_{00} : (000)(221)(112)\\
M_{01}M_{12} : (101)(220)(012) & N_{01}N_{12} : (110)(022)(201) & P_{01}P_{12} : (011)(202)(120)\\
M_{12}M_{20} : (212)(001)(120) & N_{12}N_{20} : (221)(100)(012) & P_{12}P_{20} : (122)(010)(201)\\
M_{20}M_{01} : (020)(112)(201) & N_{20}N_{01} : (002)(211)(120) & P_{20}P_{01} : (200)(121)(012)\\
M_{02}M_{10} : (121)(210)(002) & N_{02}N_{10} : (112)(021)(200) & P_{02}P_{10} : (211)(102)(020)\\
M_{10}M_{21} : (202)(021)(110) & N_{10}N_{21} : (220)(102)(011) & P_{10}P_{21} : (022)(210)(101)\\
M_{21}M_{02} : (010)(102)(221) & N_{21}N_{02} : (001)(210)(122) & P_{21}P_{02} : (100)(021)(212)
\end{array}\right.$$

Avec ce tableau, la détermination du pôle d'homologie des deux triangles $M_{kl}N_{lh}P_{hk}$, $M_{k+1,l+1}N_{l+1,h+1}P_{h+1,k+1}$ se fait en comparant les points associés dans le tableau précédent aux couples M, N, P donnés par ces triangles : un seul point est commun, c'est le pôle. Nous obtenons ainsi pour les triangles non équilatéraux le tableau

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{lll}
(100)\ [100] & (001)\ [001] & (202)\ [202]\\
(211)\ [211] & (112)\ [112] & (010)\ [010]\\
(022)\ [022] & (220)\ [220] & (121)\ [121]
\end{array}\right.$$

Ici l'indication (hkl) donne le pôle d'homologie des deux triangles indiqués sur les deux autres lignes de la même colonne ; pour les deux triangles $M_{11}N_{12}P_{21}$ et $M_{22}N_{20}P_{02}$ représentés par [211] et [022], il suffit de prendre dans le tableau (24) les indicatifs placés en regard de $M_{11}M_{22}$, $N_{12}N_{20}$, $P_{21}P_{02}$ et de voir qu'il n'y a que (100) qui soit commun : la méthode suivie au paragraphe précédent avait permis, géométriquement, de trouver le pôle d'homologie sans préciser les coordonnées; elle n'indiquait pas non plus que les droites joignant ce pôle à A, B, C respectivement sont les droites AM'_{00}, BN'_{01}, CP'_{10}.

On remarquera que dans le tableau (25) *les deux symboles* (hkl), $[hkl]$ *sont placés côte à côte de sorte que les deux triades* $(\overline{hkl})$ *et* $[\overline{hkl}]$ *ont le même indicatif.*

Prenons maintenant les triangles équilatéraux de même sens que ABC, en respectant les triades associées; on trouve par le même procédé le tableau :

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{lll}
(222)\ [000] & (120)\ [201] & (021)\ [102]\\
(000)\ [111] & (201)\ [012] & (102)\ [210]\\
(111)\ [222] & (012)\ [120] & (210)\ [021]
\end{array}\right.$$

Cette fois-ci les symboles (hkl) *et* $[hkl]$ *sont décalés d'une ligne, tout en restant les mêmes dans leur ensemble.*

Pour les triangles équilatéraux de sens opposé à ABC, on trouve un tableau analogue, où le *décalage entre les lignes* (hkl) *et* $[hkl]$ *est fait en sens inverse* :

$$(27)\qquad \begin{cases} (011)\ [200] & (212)\ [101] & (110)\ [002] \\ (122)\ [011] & (020)\ [212] & (221)\ [110] \\ (200)\ [122] & (101)\ [020] & (002)\ [221] \end{cases}$$

Finalement nous arrivons à cette conclusion : *chaque triade* $[\overline{hkl}]$ *donne lieu à la triade* $(\overline{hkl})$ *de pôles d'homologie.* D'après ce qui a été dit plus haut, *les trois pôles* (hkl) *d'une même triade sont alignés sur la droite d'équation*

$$(28)\qquad x\sin(\beta_k-\gamma_l)+y\sin(\gamma_l-\alpha_h)+z\sin(\alpha_h-\beta_k)=0.$$

Or, toujours en vertu de la nullité de l'expression

$$\sin\lambda\sin(\mu-\nu)+\sin\mu\sin(\nu-\lambda)+\sin\nu\sin(\lambda-\mu),$$

la droite d'équation

$$x\sin\lambda+y\sin\mu+z\sin\nu=0$$

passe par le point $[\sin(\mu-\nu), \sin(\nu-\lambda), \sin(\lambda-\mu)]$. Voyons ce que donne ce procédé ici :

$$(\gamma_l-\alpha_h)-(\alpha_h-\beta_k)=\beta_k+\gamma_l-2\alpha_h=(\beta_k+\gamma_l+\alpha_h)-3\alpha_h,$$
$$\sin[(\beta_k+\gamma_l+\alpha_h)-3\alpha_h]=\sin[\beta_k+\gamma_l+\alpha_h-\mathrm{A}]=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\mathrm{A}+\frac{2\pi}{3}(h+k+l)\right].$$

Si $h+k+l$ *prend des valeurs congrues suivant le module* 3, ce qui arrive pour les trois triades correspondant à un même tableau (25), (26) ou (27), nous obtenons ce résultat que *les trois droites portant les pôles d'homologie relatifs successivement à chaque triade de ce tableau passent toutes les trois par le point de coordonnées*

$$\sin\left[\frac{\pi}{3}-\mathrm{A}+\frac{2\pi}{3}(h+k+l)\right],\quad \sin\left[\frac{\pi}{3}-\mathrm{B}+\frac{2\pi}{3}(h+k+l)\right],$$
$$\sin\left[\frac{\pi}{3}-\mathrm{C}+\frac{2\pi}{3}(h+k+l)\right].$$

Prenons d'abord les triangles non équilatéraux :

$$h+k+l\equiv 1 \pmod 1;$$

le point de concours obtenu est le point $(\sin\mathrm{A}, \sin\mathrm{B}, \sin\mathrm{C})$, *point de Lemoine* qui est le point inverse du centre de gravité du triangle ABC (rappelons que le centre de gravité a des coordonnées que l'on peut prendre égales aux hauteurs issues de A, B, C, c'est-à-dire $2\mathrm{R}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$, $2\mathrm{R}\sin\mathrm{C}\sin\mathrm{A}$, $2\mathrm{R}\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}$ et que les inverses de ces coordonnées sont proportionnelles à $\sin\mathrm{A}$, $\sin\mathrm{B}$, $\sin\mathrm{C}$).

Les triangles équilatéraux de même sens que ABC :

$$h+k+l\equiv 0 \pmod 3,$$

fournissent le point $\left[\sin\left(A+\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(B+\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(C+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ *qui est le point négatif de Hesse; les triangles équilatéraux de sens opposé à* ABC,

$$h+k+l\equiv 2 \pmod 3,$$

fournissent le point positif de Hesse $\left[\sin\left(A+\frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(B+\frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(C+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$.

Rappelons pour mémoire que les points de Hesse sont obtenus ainsi : les bissectrices de A coupent BC en deux points (a, a'); on définit de même (b, b'), puis (c, c'); les cercles de diamètre aa', ou bb', ou cc' ont leurs centres à l'intersection de chaque côté avec la tangente au cercle circonscrit au sommet opposé; ces trois cercles sont orthogonaux au cercle circonscrit, ont leurs centres alignés et se coupent tous trois en deux points alignés avec le centre du cercle circonscrit, inverses par rapport à ce cercle; le point négatif de Hesse est celui qui est extérieur au cercle circonscrit, le point positif celui qui est intérieur; à titre de vérification, si ABC est équilatéral, le point positif coïncide avec le centre du triangle et le point négatif est rejeté à l'infini. D'ailleurs, dans le cas du triangle équilatéral, les trois points (000), (111), (222) coïncident avec le centre du triangle.

Les triangles équilatéraux de même sens que ABC *ont fourni les trois droites concourantes*

$$(29)\qquad \begin{cases} x\sin(\beta_0-\gamma_0)+y\sin(\gamma_0-\alpha_0)+z\sin(\alpha_0-\beta_0)=0,\\ x\sin(\beta_0-\gamma_1)+y\sin(\gamma_1-\alpha_2)+z\sin(\alpha_2-\beta_0)=0,\\ x\sin(\beta_0-\gamma_2)+y\sin(\gamma_2-\alpha_1)+z\sin(\alpha_1-\beta_0)=0, \end{cases}$$

inclinées les unes sur les autres à $+\frac{\pi}{3}$.

Même propriété pour les droites concourantes fournies par les triangles équilatéraux de sens opposé à ABC

$$(30)\qquad \begin{cases} x\sin(\beta_0-\gamma_0)+y\sin(\gamma_0-\alpha_2)+z\sin(\alpha_2-\beta_0)=0,\\ x\sin(\beta_0-\gamma_1)+y\sin(\gamma_1-\alpha_1)+z\sin(\alpha_1-\beta_0)=0,\\ x\sin(\beta_0-\gamma_2)+y\sin(\gamma_2-\alpha_0)+z\sin(\alpha_0-\beta_0)=0. \end{cases}$$

Nous avons déjà signalé que u, v, w étant des nombres fixes et t un paramètre variable, le point variable $\sin(u+t)$, $\sin(v+t)$, $\sin(w+t)$ décrit une droite, car ses coordonnées peuvent s'écrire sous la forme $(\sin u+\cos u\,\mathrm{tg}\,t, \sin v+\cos v\,\mathrm{tg}\,t, \sin w+\cos w\,\mathrm{tg}\,t)$ et dépendent alors linéairement du paramètre $\mathrm{tg}\,t$; la droite en jeu a pour équation

$$x\sin(v-w)+y\sin(w-u)+z\sin(u-v)=0;$$

donc les trois points trouvés plus haut (Lemoine, Hesse positif ou négatif) sont tous trois sur la droite

$$x\sin(B-C)+y\sin(C-A)+z\sin(A-B)=0$$

qui contient le centre du cercle circonscrit, lequel est $(\cos A, \cos B, \cos C)$ ou encore $\left[\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(C+\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Nous retrouvons ainsi une propriété connue de l'axe de Hesse; la méthode suivie ici montre aussi que le centre du cercle circonscrit et le point de Lemoine sont conjugués par rapport aux deux points de Hesse; en effet les coordonnées de ces points correspondent aux expressions $\left[\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(C+\frac{\pi}{2}\right)\right]$, $[\sin A, \sin B, \sin C]$, $\left[\sin\left(A+\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(B+\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(C+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ et $\left[\sin\left(A+\frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(B+\frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(C+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$. Si l'on met ces coordonnées sous la forme $(\sin A + t\cos A, \sin B + t\cos B, \sin C + t\cos C)$ les valeurs de t sont $\left(\infty, 0, \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}, \operatorname{tg}\frac{-2\pi}{3}\right)$, ce qui prouve le résultat.

Nous avons trouvé déjà divers alignements pour les points (hkl) : chaque droite AM'_{kl} porte trois de ces points; de même, chaque droite BN'_{lh} ou CP'_{hk}. Nous avons vu que chaque droite $M_{kl}M_{k+1,l+1}$ contient trois de ces points, et en associant les triangles de la triade $[\overline{hkl}]$, nous avons obtenu des groupes intéressants de points alignés. Nous allons maintenant considérer les trois triangles obtenus par les lignes horizontales du tableau carré

M_{00}	M_{12}	M_{21}
M_{11}	M_{20}	M_{02}
M_{22}	M_{01}	M_{10}

Ces triangles ont leurs côtés correspondants parallèles, de sorte que l'axe d'homologie commun est la droite de l'infini et que les centres de similitude sont alignés; nous avons vu que si nous prenons les triangles obtenus par les colonnes, ils sont deux à deux homologiques, les pôles étant alignés sur la droite de l'infini et l'axe d'homologie commun étant la droite contenant les centres de similitude des triangles horizontaux.

Or cette droite est évidemment la médiatrice de BC, car chacun des triangles équilatéraux que nous considérons est inscrit dans un cercle issu de B et C; le centre d'homothétie de deux de ces triangles est en même temps l'un des centres de similitude des cercles circonscrits, et ceci suffit à prouver le résultat.

Pour terminer, donnons l'énumération des divers alignements formés avec trois des 27 points (hkl) :

1° 9 droites AM'_{kl} : sur chacune k, l sont fixes et h prend les valeurs 0, 1, 2; on a ensuite 9 droites BN'_{lh} et 9 droites CP'_{hk};

2° 9 droites $M_{kl}M_{k+1,l+1}$ qui interviennent dans l'homologie des triangles de la triade $[\overline{hkl}]$; k, l restant fixes, h prend les valeurs 0, 1, 2; 9 droites analogues $N_{lh}N_{l+1,h+1}$ et 9 droites $P_{hk}P_{h+1,k+1}$;

3° 3 droites portant les pôles d'homologie des triangles de la triade $[hkl]$, avec $h+k+l\equiv 0$; 3 droites analogues avec $h+k+l\equiv 2$; 3 droites analogues avec $h+k+l\equiv 1$ (les congruences sont relatives au module 3). Les 3 droites d'une même série concourent (points de Hesse, points de Lemoine).

Cela fait un total de 63 *alignements.*

Faisons aussi remarquer qu'avec les notations de Taylor et Marr une droite $ux+vy+wz=0$ ne peut avoir son équation réduite à la forme

$$x\sin(\mu-\nu)+y\sin(\nu-\lambda)+z\sin(\lambda-\mu)=0,$$

où λ, μ, ν ne sont des arguments réels que si cette droite ne passe par aucun des centres des cercles tangents aux côtés du triangle ABC et en contient un nombre pair ou nul de chaque côté par rapport à elle.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] F. Morley, *Metric of the plane n-line* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 1, 1900, p. 97-115; t. 8, 1907, p. 14-24).
F. et F. V. Morley, *Inversive Geometry*, p. 243.
[2] F. Glanville Taylor et W. L. Marr, *The six trisectors of each of the angles of a triangle* (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 32, 1913, p. 119-132).
F. Glanville Taylor, *The relation of Morley's theorem to the Hessian Axis and Circumcentre* (*Ibid.*, t. 32, 1913, p. 132-136).
W. L. Marr, *Morley's trisection theorem, an extension and its relation to the Circles of Apollonius* (*Ibid.*, t. 32, 1913, p. 136-150).
[3] R. Bricard, *Nouv. Ann. Math.*, (5), t. 1, 1922, p. 254-258; t. 2, 1923, p. 241-254.
[4] *X-Information*, avril 1931, mai 1931, mai 1937.
[5] B. Gambier, *Ens. scient.*, juillet 1931, janvier 1932, juillet 1937; *Bull. Sc. Math.*, t, 61, 1937, p. 360-369; *Mathesis*, t. 58, 1949, p. 174-215.
[6] J. Marchand, *Ens. math.*, t. 29, 1930, p. 289-299.
[7] H. Lebesgue, *Ens. math.*, t. 38, 1940, p. 39-58.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE IKEHARA

PAR M. HUBERT DELANGE.

1. Introduction.

Dans tout ce qui suit, $\alpha(t)$ est une fonction réelle définie pour $t \geq 0$, non décroissante et positive ou nulle (1).

On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\alpha(t)\,dt$ *est convergente pour* $\mathcal{R}s > a$, *où a est un nombre réel positif, et l'on désigne sa valeur par* $f(s)$.

Le théorème de Ikehara est le suivant :

S'il existe un nombre positif A *tel que, pour chaque y réel, la différence* $f(s) - \frac{A}{s-a}$ *tende vers une limite finie quand s tend vers* $a + iy$ *en restant dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > a$, *on a pour t tendant vers* $+\infty$:

$$\alpha(t) \sim A\,e^{at}. \tag{1}$$

Ceci entraîne en particulier que, *si la fonction* $f(s)$ *a comme seule singularité sur la droite* $\mathcal{R}s = a$ *un pôle simple de résidu* A *au point a, on a* (1).

Il est naturel de chercher à obtenir des théorèmes susceptibles de fournir une conclusion dans le cas où $f(s)$, en étant encore holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que le point a, aurait en ce point une singularité autre qu'un pôle simple.

Un tel théorème est par exemple le suivant :

THÉORÈME I. — *Soit* $\beta(t)$ *une fonction réelle définie pour* $t \geq 0$, *mesurable et*

(1) Cette dernière hypothèse n'est pas nécessaire pour la validité de nos énoncés, mais ne diminue pas réellement leur portée [si elle n'est pas satisfaite, on peut considérer la fonction $\alpha(t) - \alpha(0)$, par exemple, au lieu de $\alpha(t)$].

bornée sur tout intervalle fini, et supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\beta(t)\,dt$ *soit convergente pour* $\mathcal{R}s > 0$ *et égale à* $G(s)$.

Supposons, en outre, qu'il existe un entier positif ou nul p *et une fonction réelle* $\gamma(u)$ *continue et non décroissante sur un intervalle* $[0, l]$, *et positive pour* $0 < u \leq l$, *tels que :*

1° *l'intégrale* $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\,du$ *soit convergente* (2).

2° *le produit* $t^{p+1}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ *tende vers* 1 *quand* t *tend vers* $+\infty$ (3).

Ceci étant, supposons qu'il existe un nombre positif A *tel que la fonction* $F(s) = f(s) - AG(s-a)$ *ait les propriétés suivantes :*

1° *Pour chaque* y *réel différent de zéro,* $F^{(p)}(s)$ *tend vers une limite finie quand* s *tend vers* $a+iy$ *dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > a$;

2° *Quand* s *tend vers* 0 *dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > 0$, *on a*

$$F^{(p)}(a+s) = O\left[\frac{\psi(r)}{\gamma(r)}\right], \qquad \text{avec } r = |s|,$$

$\psi(t)$ *étant une fonction réelle définie pour* t *positif assez petit, positive et non croissante, telle que les intégrales*

$$\int_0 \psi(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0 \psi(t)\log\frac{1}{\gamma(t)}\,dt$$

soient convergentes (4).

Alors, quand t *tend vers* $+\infty$,

$$\alpha(t) \sim A\,e^{at}\beta(t).$$

On obtient comme cas particulier un théorème contenant celui de Ikehara en prenant $\beta(t) = 1$, avec $p = 0$ et $\gamma(u) = 1$ (l positif quelconque).

Bien que le théorème I soit suffisant pour les applications, nous en établirons un plus fort, dans lequel les hypothèses sur le comportement de $F^{(p)}(s)$ au voisinage de la droite $\mathcal{R}s = a$ seront plus larges. Ce sera le suivant :

Théorème II. — *Soit* $\beta(t)$ *une fonction réelle définie pour* $t \geq 0$, *mesurable et*

---

(2) Cette condition est évidemment satisfaite si $\gamma(0) > 0$.

(3) Ceci entraîne évidemment que $\beta(t)$ soit positif pour t assez grand.

(4) Il est clair que, si $\gamma(0) \neq 1$, la convergence de la deuxième intégrale entraîne celle de la première. Si $\gamma(0) > 0$, la convergence de la première entraîne celle de la seconde.

Notons qu'il ne pourrait pas exister de fonction ψ satisfaisant aux conditions indiquées si l'intégrale $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\,du$ n'était pas convergente, comme nous le supposons.

bornée sur tout intervalle fini, et supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\beta(t)\,dt$ *soit convergente pour* $\mathcal{R}s > 0$ *et égale à* $G(s)$.

Supposons, en outre, qu'il existe un entier p positif ou nul et une fonction réelle $\gamma(u)$ *continue et non décroissante sur un intervalle* $[0, l]$, *et positive pour* $0 < u \leq l$, *tels que :*

1° *l'intégrale* $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\,du$ *soit convergente ;*

2° *le produit* $t^{p+1}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ *tende vers* 1 *quand t tend vers* $+\infty$.

Ceci étant, supposons qu'il existe un nombre positif A *tel que,* $F(s)$ *étant la fonction* $f(s) - AG(s-a)$, *pour chaque y réel l'une des circonstances suivantes se présente :*

Ou bien $F^{(p)}(s)$ *reste bornée quand s tend vers* $a+iy$ *dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > a$;

Ou bien il existe une fonction réelle $\psi_y(t)$ *définie pour t positif assez petit, positive et non croissante, telle que les intégrales* $\int_0 \psi_y(t)\,dt$ *et* $\int_0 \psi_y(t)\log\frac{1}{\gamma(t)}\,dt$ *soient convergentes et que l'on ait pour s tendant vers zéro dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > 0$

$$F^{(p)}(a+iy+s) = O\left[\frac{\psi_y(r)}{\gamma(r)}\right], \qquad \text{avec} \quad r = |s|.$$

Alors, quand t tend vers $+\infty$,

$$\alpha(t) \sim A\,e^{at}\beta(t).$$

Nous donnerons ensuite des corollaires particuliers dans lesquels l'hypothèse sur la fonction $f(s)$ sera simplement l'existence d'un point singulier d'une nature déterminée pour $s = a$, $f(s)$ étant holomorphe en tous les autres points de la droite $\mathcal{R}(s) = a$ (5).

Ces corollaires particuliers sont susceptibles d'applications arithmétiques que nous nous proposons de développer dans un travail ultérieur.

2. Préliminaires.

Avant de donner la démonstration du théorème II, nous établirons deux lemmes.

2.1. Lemme 1. — *Soit* $h(s)$ *une fonction holomorphe pour* $x_1 < x < x_2$ *et* $y_1 < y < y_2 (s = x+iy)$, *et bornée dans ce rectangle.*

(5) Les théorèmes que nous établissons ici sont, à de très petites modifications près, ceux que nous avons énoncés dans notre Note : *Sur le théorème taubérien de Ikehara* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 465-467.

Alors, pour chaque valeur de y satisfaisant à $y_1 < y < y_2$, *sauf peut-être pour des valeurs formant un ensemble de mesure nulle,* $h(x+iy)$ *tend vers une limite finie* $g(y)$ *quand* x *tend vers* x_1 *par valeurs supérieures.*

Ce lemme se déduit aisément d'un théorème bien connu de Fatou, en faisant une représentation conforme du rectangle sur le cercle unité. Nous donnerons cependant une démonstration directe.

Nous supposerons $x_1 = 0$, ce qui ne restreint évidemment pas la généralité. D'autre part, nous supposerons que, dans le rectangle considéré, $|h(s)| \leq M$.

2.1.1. La fonction h possède dans le rectangle une infinité de primitives, qui diffèrent entre elles par des constantes. Soit $H(s)$ l'une d'elles.

Il est clair que l'on a, quels que soient s' et s'' appartenant au rectangle,

$$|H(s'') - H(s')| \leq M\,|s'' - s'|. \tag{2}$$

H est donc uniformément continue dans le rectangle et, par suite, on peut la définir sur la frontière de manière qu'elle soit continue sur le rectangle fermé (6).

On va voir que, Γ étant le contour constitué par les segments

$$[iy_1,\ x_2+iy_1],\ [x_2+iy_1,\ x_2+iy_2] \qquad \text{et} \qquad [x_2+iy_2,\ iy_2],$$

parcouru dans le sens qui va du point iy_1 au point iy_2, on a pour tout s intérieur au rectangle

$$h(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [H(\zeta) - \Phi(y)]\left[\frac{1}{(\zeta - s)^2} - \frac{1}{(\zeta - s')^2}\right] d\zeta \tag{3}$$
$$- \frac{i}{\pi}\int_{y_1}^{y_2} [\Phi(t) - \Phi(y)]\frac{2x(t-y)}{[x^2 + (t-y)^2]^2}\, dt,$$

où

$$s' = -x + iy \qquad \text{et} \qquad \Phi(t) = H(it).$$

En effet, soit R le pourtour du rectangle.

s étant intérieur au rectangle, on a

$$h(s) = H'(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{H(\zeta)}{(\zeta - s)^2}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{H(\zeta) - \Phi(y)}{(\zeta - s)^2}\, d\zeta.$$

s' étant extérieur, on a

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{H(\zeta) - \Phi(y)}{(\zeta - s')^2}\, d\zeta.$$

Par soustraction, on obtient

$$h(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_R [H(\zeta) - \Phi(y)]\left[\frac{1}{(\zeta - s)^2} - \frac{1}{(\zeta - s')^2}\right] d\zeta,$$

(6) Nous faisons abstraction ici de la notion de prolongement analytique.

ce qui peut s'écrire

$$h(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mathrm{H}(\zeta)-\Phi(y)]\left[\frac{1}{(\zeta-s)^2}-\frac{1}{(\zeta-s')^2}\right]d\zeta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{y_1}^{y_2}[\Phi(t)-\Phi(y)]\left[\frac{1}{(it-s)^2}-\frac{1}{(it-s')^2}\right]dt.$$

Mais

$$\frac{1}{(it-s)^2}-\frac{1}{(it-s')^2}=\frac{4ix(t-y)}{[x^2+(t-y)^2]^2}.$$

2.1.2. Remarquons maintenant que, quels que soient t' et t'' appartenant à l'intervalle $[y_1, y_2]$, on a

$$|\Phi(t'')-\Phi(t')|\leq \mathrm{M}|t''-t'|.$$

Cela résulte immédiatement de (2), puisque

$$\Phi(t'')-\Phi(t')=\lim_{\substack{z'\to it'\\ z''\to it''}}[\mathrm{H}(z'')-\mathrm{H}(z')].$$

Il suit de là que *la fonction* Φ *est dérivable presque partout sur l'intervalle* $[y_1, y_2]$.

2.1.3. Nous allons voir maintenant que, pour toute valeur de y dans l'intervalle ouvert $]y_1, y_2[$ pour laquelle $\Phi'(y)$ existe, $h(x+iy)$ tend vers $-i\Phi'(y)$ quand x tend vers zéro par valeurs positives.

Nous savons que, si y appartient à l'intervalle ouvert $]y_1, y_2[$, $h(x+iy)$ peut s'exprimer, pour $0<x<x_2$, par la formule (3).

y restant fixe, le premier terme du second membre tend vers zéro quand x tend vers zéro, car la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro uniformément sur Γ.

D'autre part, le second terme peut s'écrire, en faisant le changement de variable $t=y+xu$,

$$-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_{x,y}(u)\frac{2u}{(1+u^2)^2}\,du,$$

avec

$$\Psi_{x,y}(u)=\begin{cases}\dfrac{\Phi(y+xu)-\Phi(y)}{x} & \text{pour} \quad \dfrac{y_1-y}{x}\leq u\leq\dfrac{y_2-y}{x},\\[2ex] 0 & \text{pour} \quad u<\dfrac{y_1-y}{x} \quad \text{ou} \quad u>\dfrac{y_2-y}{x}.\end{cases}$$

Ici, la fonction sous le signe $\int$ est toujours de module au plus égal à $\frac{2\mathrm{M}u^2}{(1+u^2)^2}$ et, si $\Phi'(y)$ existe, elle tend vers $\Phi'(y)\frac{2u^2}{(1+u^2)^2}$ quand x tend vers zéro. L'intégrale tend alors vers

$$\Phi'(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2u^2}{(1+u^2)^2}\,du=\Phi'(y)\int_{-\infty}^{+\infty}u\,d\left[\frac{-1}{1+u^2}\right]=\Phi'(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\pi\Phi'(y).$$

2.2. Lemme 2. — *Soit $h(s)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$.*

Supposons que, pour chaque y réel, ou bien $h(s)$ reste bornée quand s tend vers $a+iy$ dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, ou bien il existe une fonction réelle $\varphi_y(t)$ définie pour t positif assez petit, positive et non croissante, telle que l'intégrale $\int_0 \varphi_y(t)\,dt$ soit convergente, et telle que l'on ait, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$,

$$h(a+iy+s) = O[\varphi_y(r)] \qquad (r = |s|).$$

Alors, il existe une fonction $g(y)$ sommable sur tout intervalle fini et telle que, quand ε tend vers zéro par valeurs positives,

1° *la fonction $h(a+\varepsilon+iy)$ converge presque partout vers $g(y)$;*

2° *quels que soient Y_1 et Y_2 satisfaisant à $Y_1 < Y_2$ et quelle que soit la fonction $\theta(y)$ continue sur l'intervalle fermé $[Y_1, Y_2]$,*

$$\int_{Y_1}^{Y_2} h(a+\varepsilon+iy)\,\theta(y)\,dy \qquad \text{tend vers} \qquad \int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\,\theta(y)\,dy.$$

Dans le cas où $h(s)$ reste bornée quand s tend vers $a+iy$ dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, on peut dire encore que l'on a, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$,

$$h(a+iy+s) = O[\varphi_y(r)],$$

en prenant $\varphi_y(t) = 1$. Cette fonction satisfait encore aux conditions indiquées pour le second cas.

Notre hypothèse sur le comportement de $h(s)$ au voisinage de la droite $\mathcal{R}s = a$ peut donc s'exprimer de la façon suivante :

Pour chaque y réel, il existe deux nombres positifs $M(y)$ et $\rho(y)$ et une fonction $\varphi_y(t)$ définie pour $0 < t \leq \rho(y)$, positive et non croissante sur cet intervalle, et telle que l'intégrale $\int_0^{\rho(y)} \varphi_y(t)\,dt$ soit convergente, tels que l'on ait pour $r \leq \rho(y)$ et $\mathcal{R}s > 0$

$$|h(a+iy+s)| \leq M(y)\,\varphi_y(r).$$

Pour simplifier, nous poserons

$$\rho(y) = r_0(y) : 2.$$

Alors, pour

$$0 < |y - y_0| \leq r_0(y_0) \qquad \text{et} \qquad 0 < \varepsilon \leq r_0(y_0),$$

on a

$$|h(a+\varepsilon+iy)| \leq M(y_0)\,\varphi_{y_0}(\sqrt{\varepsilon^2+(y-y_0)^2}) \leq M(y_0)\,\varphi_{y_0}(|y-y_0|).$$

En particulier, quel que soit $\omega > 0$ et $< r_0(y_0)$, on a

$$|h(x+iy)| \leq M(y_0)\,\varphi_{y_0}(\omega)$$

dans chacun des rectangles

$$y_0+\omega<y<y_0+r_0(y_0), \qquad a<x<a+r_0(y_0),$$

et

$$y_0-r_0(y_0)<y<y_0-\omega, \qquad a<x<a+r_0(y_0).$$

D'après le lemme 1, ceci entraine que, presque partout sur chacun des intervalles $]y_0-r_0(y_0), y_0-\omega[$ et $]y_0+\omega, y_0+r_0(y_0)[$, la fonction $h(a+\varepsilon+iy)$ tend vers une limite finie quand ε tend vers zéro par valeurs positives. Il en est donc ainsi presque partout sur l'intervalle

$$]y_0-r_0(y_0), y_0+r_0(y_0)[.$$

Tout intervalle fermé pouvant être recouvert par un nombre fini de tels intervalles, on voit que presque partout sur tout intervalle fini, donc presque partout sur $(-\infty, +\infty)$, $h(a+\varepsilon+iy)$ tend vers une limite finie quand ε tend vers zéro par valeurs positives.

Soit donc $g(y)$ la fonction définie presque partout comme limite de $h(a+\varepsilon+iy)$ pour ε tendant vers zéro par valeurs positives.

Considérons un intervalle fermé $[Y_1, Y_2]$.

Comme on vient de le dire, il peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles de la forme $]y-r_0(y), y+r_0(y)[$. Appelons $y_1, y_2, \ldots, y_p$ les valeurs correspondantes de y.

D'après ce que l'on a vu plus haut, pour chaque j, si $0<\varepsilon\leq r_0(y_j)$, on a pour $y_j-r_0(y_j)<y<y_j+r_0(y_j)$ et $y\neq y_j$

$$|h(a+\varepsilon+iy)|\leq M(y_j)\varphi_{y_j}(|y-y_j|).$$

Il en résulte que, si $0<\varepsilon\leq \operatorname{Min}_j[r_0(y_j)]$, on a pour $Y_1\leq y\leq Y_2$

$$|h(a+\varepsilon+iy)|\leq U(y),$$

où $U(y)$ est défini de la façon suivante :

Si y n'est égal à aucun des y_j, $U(y)$ est le minimum de $M(y_j)\varphi_{y_j}(|y-y_j|)$ pour les j tels que y appartienne à l'intervalle $]y_j-r_0(y_j), y_j+r_0(y_j)[$.

Si y est égal à l'un des y_j, $U(y)=+\infty$.

La fonction $U(y)$ est sommable sur l'intervalle $[Y_1, Y_2]$.

Il en résulte d'abord que $g(y)$, comme limite de $h(a+\varepsilon+iy)$, est sommable sur $[Y_1, Y_2]$.

D'autre part, si $\theta(y)$ est une fonction continue sur $[Y_1, Y_2]$, l'intégrale $\int_{Y_1}^{Y_2} h(a+\varepsilon+iy)\theta(y)\,dy$ tend vers $\int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\theta(y)\,dy$ quand ε tend vers zéro par valeurs positives, puisque la fonction sous le signe $\int$ est majorée en module

pour ε assez petit par $U(y)|\theta(y)|$, qui est une fonction sommable sur $[Y_1, Y_2]$, et tend presque partout sur $[Y_1, Y_2]$ vers $g(y)\theta(y)$ (7).

2.2.1. On voit immédiatement que, *si l'on modifiait l'hypothèse du lemme* 2 *en remplaçant les mots « pour chaque y réel » par « pour chaque y réel appartenant à un certain intervalle fermé* $[Y_1, Y_2]$ », *on pourrait conclure l'existence d'une fonction* $g(y)$ *sommable sur* $[Y_1, Y_2]$ *telle que, quand* ε *tend vers zéro par valeurs positives,*

1° *la fonction* $h(a+\varepsilon+iy)$ *converge presque partout sur* $[Y_1, Y_2]$ *vers* $g(y)$ *;*
2° *quelle que soit la fonction* $\theta(y)$ *continue sur l'intervalle fermé* $[Y_1, Y_2]$,

$$\int_{Y_1}^{Y_2} h(a+\varepsilon+iy)\,\theta(y)\,dy \qquad \textit{tend vers} \qquad \int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\,\theta(y)\,dy.$$

3. Démonstration du théorème II.

3.1. Nous introduirons la fonction $\varphi(t)$ définie pour t réel par

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-tu}\,\gamma(u)\,du.$$

D'après nos hypothèses, quand t tend vers $+\infty$, le produit $t^{\rho+1}\varphi(t)\beta(t)$ tend vers 1.

Il suffit donc pour obtenir la conclusion du théorème de montrer que, quand t tend vers $+\infty$, le produit $t^{\rho+1}\varphi(t)e^{-at}\alpha(t)$ tend vers A.

3.2. Il est utile de faire d'abord les remarques suivantes sur la fonction $\varphi(t)$:

En premier lieu, il est clair que $\varphi(t)$ *est positive et décroissante.*

Ensuite, *quel que soit h positif, le rapport* $\dfrac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)}$ *tend vers* 1 *quand t tend vers* $+\infty$.

En effet, d'une part, comme $\dfrac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} < 1$, on a

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} \leq 1.$$

D'autre part, soit η_1 satisfaisant à $0 < \eta_1 < l$.
On a pour $t \geq 0$

$$\varphi(t+h) \geq \int_0^{\eta_1} e^{-u(t+h)}\,\gamma(u)\,du > e^{-\eta_1 h}\int_0^{\eta_1} e^{-ut}\,\gamma(u)\,du.$$

(7) Il suffirait évidemment que $\theta(y)$ soit mesurable et bornée sur $[Y_1, Y_2]$.

Comme

$$\int_0^{\eta_1} e^{-ut}\gamma(u)\,du = \varphi(t) - \int_{\eta}^{l} e^{-ut}\gamma(u)\,du$$

et

$$\int_{\eta_1}^{l} e^{-ut}\gamma(u)\,du < e^{-\eta_1 t}\int_{\eta}^{l}\gamma(u)\,du,$$

de sorte que

$$\int_0^{\eta_1} e^{-ut}\gamma(u)\,du > \varphi(t) - e^{-\eta_1 t}\int_{\eta}^{l}\gamma(u)\,du,$$

on obtient

$$\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} > e^{-\eta h}\left[1 - \frac{e^{-\eta_1 t}}{\varphi(t)}\int_{\eta}^{l}\gamma(u)\,du\right].$$

D'un autre côté, η' étant un nombre réel quelconque satisfaisant à $0 < \eta' < \eta$, on a

$$\varphi(t) > \int_0^{\eta'} e^{-ut}\gamma(u)\,du > e^{-\eta' t}\int_0^{\eta'}\gamma(u)\,du.$$

On voit donc que

$$\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} > e^{-\eta h}\left[1 - e^{(\eta'-\eta_1)t}\frac{\displaystyle\int_{\eta}^{l}\gamma(u)\,du}{\displaystyle\int_0^{\eta'}\gamma(u)\,du}\right].$$

On a par suite

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} \geq e^{-\eta h}.$$

En faisant tendre η vers zéro, on obtient

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} \geq 1.$$

3.3. Introduisons maintenant la fonction $h(s)$ définie pour $\mathcal{R}s > a$ par

$$h(s) = (-1)^{p+1}\int_0^{l} \mathrm{F}^{(p+1)}(s+u)\,\gamma(u)\,du.$$

Cette fonction est évidemment holomorphe pour $\mathcal{R}s > a$.

3.3.1. On voit que, pour $\mathcal{R}s > a$,

$$h(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}t^{p+1}\varphi(t)\,|\alpha(t) - \mathrm{A}\,e^{at}\beta(t)|\,dt. \tag{4}$$

En effet, pour $\mathcal{R}s > a$,

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}[\alpha(t) - \mathrm{A}\,e^{at}\beta(t)]\,dt,$$

et par suite

$$(5) \qquad (-1)^{p+1} F^{(p+1)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{p+1} [\alpha(t) - A e^{at} \beta(t)] \, dt.$$

Donc, si $\mathcal{R}s > a$, on a pour u réel ≥ 0

$$(-1)^{p+1} F^{(p+1)}(s+u) = \int_0^{+\infty} e^{-(s+u)t} t^{p+1} [\alpha(t) - A e^{at} \beta(t)] \, dt.$$

Pour s fixé, l'intégrale est uniformément convergente par rapport à u pour $0 \leq u \leq l$, puisque, si u parcourt cet intervalle, le point $s+u$ parcourt le segment fermé $[s, s+l]$, ensemble compact intérieur au demi-plan de convergence de l'intégrale du second membre de (5).

Il y a encore convergence uniforme après multiplication par $\gamma(u)$, qui est bornée sur l'intervalle $[0, l]$, et, par intégration sous le signe $\int$, on obtient (4).

3.3.2. Nous allons voir maintenant que la fonction $h(s)$ satisfait aux hypothèses du lemme 2.

Remarquons d'abord que notre hypothèse sur $F(s)$ peut se traduire en disant que, *quel que soit γ réel*, il existe une fonction $\psi_\gamma(t)$ satisfaisant aux conditions indiquées et telle que, quand s tend vers zéro en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$,

$$F^{(p)}(a + i\gamma + s) = O\left[\frac{\psi_\gamma(r)}{\gamma(r)}\right] \qquad (r = |s|).$$

En effet, dans le cas où $F^{(p)}(s)$ reste bornée quand s tend vers $a + i\gamma$ dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, ceci est bien satisfait en prenant $\psi_\gamma(t) = 1$.

Soit donc un γ réel quelconque.

Il existe une fonction réelle $\psi_\gamma(t)$ définie sur un intervalle semi-ouvert $]0, T]$, où $0 < T \leq l$, positive et non croissante sur cet intervalle, telle que les intégrales $\int_0^T \psi_\gamma(t) \, dt$ et $\int_0^T \psi_\gamma(t) \log \frac{1}{\gamma(t)} \, dt$ soient convergentes, un nombre positif η_1 au plus égal à $\frac{T}{2}$, et un nombre positif M, tels que, pour $\mathcal{R}s > 0$ et $0 < r \leq 2\eta_1$,

$$|F^{(p)}(a + i\gamma + s)| \leq M \frac{\psi_\gamma(r)}{\gamma(r)}.$$

En supposant $\mathcal{R}s > 0$, nous écrirons

$$(-1)^{p+1} h(a + i\gamma + s) = \int_0^{\eta_1} F^{(p+1)}(a + i\gamma + s + u) \gamma(u) \, du + \int_{\eta_1}^{l} F^{(p+1)}(a + i\gamma + s + u) \gamma(u) \, du.$$

Le second terme du second membre reste borné quand s tend vers zéro.

En effet, r_0 étant un nombre positif quelconque, si $r \leq r_0$ et $\eta \leq u \leq l$, le point $a+iy+s+u$ se trouve sur l'ensemble des points $\sigma+i\tau$ tels que

$$\eta \leq \sigma - a \leq l + \sqrt{r_0^2 - (\tau - y)^2}, \qquad |\tau - y| \leq r_0,$$

ensemble sur lequel la fonction $F^{(p+1)}$ reste de module au plus égal à un nombre positif fixe K. Donc, pour $r \leq r_0$,

$$\left| \int_{\eta}^{l} F^{(p+1)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)\,du \right| \leq K \int_{\eta}^{l} \gamma(u)\,du.$$

Pour étudier le premier terme, nous écrirons, par intégration par parties,

$$\int_0^{\eta} F^{(p+1)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)\,du = F^{(p)}(a+iy+s+\eta)\,\gamma(\eta) - F^{(p)}(a+iy+s)\,\gamma(0) - \int_0^{\eta} F^{(p)}(a+iy+s+u)\,d\gamma(u).$$

$\mathcal{R}s$ étant >0, on a pour $0 \leq u \leq \eta$

$$\sqrt{r^2+u^2} \leq |s+u| \leq r+\eta.$$

Supposons $r \leq \eta$, de sorte que $r+\eta \leq 2\eta \leq T$.

Alors, comme ψ_γ est non croissante et γ non décroissante sur $]0, 2\eta]$, on a pour $0 \leq u \leq \eta$

$$|F^{(p)}(a+iy+s+u)| \leq M\frac{\psi_\gamma(|s+u|)}{\gamma(|s+u|)} \leq M\frac{\psi_\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})} \leq M\frac{\psi_\gamma(r)}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}.$$

Ceci donne d'abord

$$|F^{(p)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)| \leq M\psi_\gamma(r)\frac{\gamma(u)}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})} \leq M\psi_\gamma(r),$$

et en particulier

$$|F^{(p)}(a+iy+s+\eta)\,\gamma(\eta)| \leq M\psi_\gamma(r) \qquad \text{et} \qquad |F^{(p)}(a+iy-s)\,\gamma(0)| \leq M\psi_\gamma(r).$$

D'autre part, on en déduit

$$\left| \int_0^{\eta} F^{(p)}(a-iy-s-u)\,d\gamma(u) \right| \leq M\psi_\gamma(r) \int_0^{\eta} \frac{d\gamma(u)}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}.$$

Mais

$$\int_0^{\eta} \frac{d\gamma(u)}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})} = \frac{\gamma(\eta)}{\gamma(\sqrt{r^2+\eta^2})} - \frac{\gamma(0)}{\gamma(r)} + \int_0^{\eta} \gamma(u)\,d\left[\frac{-1}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}\right],$$

$$\leq 1 - \int_0^{\eta} \gamma(\sqrt{r^2+u^2})\,d\left[\frac{-1}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}\right] = 1 + \log\frac{\gamma(\sqrt{r^2+\eta^2})}{\gamma(r)} \quad (8),$$

$$\leq 1 - \log\frac{\gamma(\eta\sqrt{2})}{\gamma(r)}.$$

(8) En posant $\frac{1}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})} = w(u)$, de sorte que $w(u)$ est continue, positive, et non croissante sur

Au total, on voit que

$$\left| \int_0^{\eta} F^{(p+1)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)\,du \right| \leq M\psi_y(r)\left[3+\log\frac{\gamma(\eta\sqrt{2})}{\gamma(r)}\right].$$

En définitive, on a montré que, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s>0$, on a

$$h(a+iy+s)=O[\varphi_y(r)],$$

où la fonction φ_y est définie pour $0<t\leq T$ par

$$\varphi_y(t)=\begin{cases}\psi_y(t)\log\dfrac{1}{\gamma(t)} & \text{dans le cas où } \gamma(0)=0,\\ \psi_y(t) & \text{dans le cas où } \gamma(0)>0.\end{cases}$$

De toute façon, cette fonction est positive et non croissante pour $0<t\leq T$ et l'intégrale $\int_0^T \varphi_y(t)\,dt$ est convergente.

Dans le cas où $\psi_y(t)=1$ et $\gamma(0)>0$, on pourrait dire simplement que $h(s)$ reste bornée quand s tend vers $a+iy$ dans le demi-plan $\mathcal{R}s>a$.

3.3.3. Ceci étant, il résulte du lemme 2 qu'il existe une fonction $g(y)$ sommable sur tout intervalle fini et telle que, quels que soient Y_1 et Y_2 satisfaisant à $Y_1<Y_2$ et quelle que soit la fonction $\theta(y)$ continue sur l'intervalle fermé $[Y_1, Y_2]$, quand ε tend vers zéro par valeurs positives,

$$\int_{Y_1}^{Y_2} h(a+\varepsilon+iy)\,\theta(y)\,dy \qquad \text{tend vers} \qquad \int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\,\theta(y)\,dy.$$

Donnons-nous donc un λ positif quelconque et soit $k(y)$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[-2\lambda, +2\lambda]$.

Alors, quel que soit ξ réel, quand ε tend vers zéro par valeurs positives,

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} h(a+\varepsilon+iy)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy \qquad \text{tend vers} \qquad \int_{-2\lambda}^{+2\lambda} g(y)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy.$$

3.3.4. La formule (4) du paragraphe 3.3.1 montre que l'on a pour ε positif et y réel quelconque

$$h(a+\varepsilon+iy)=\int_0^{+\infty} e^{-(a+\varepsilon)t}\,e^{-iyt}\,t^{p+1}\,v(t)\,[\alpha(t)-A\,e^{at}\,\beta(t)]\,dt.$$

De plus, l'intégrale est uniformément convergente pour $-2\lambda\leq y\leq+2\lambda$.

---

l'intervalle fermé $[0, \eta]$, on a

$$\int_0^{\eta}\gamma\left(\sqrt{r^2+u^2}\right)d\left[\frac{-1}{\gamma\left(\sqrt{r^2+u^2}\right)}\right]=-\int_0^{\eta}\frac{d\omega(u)}{\omega(u)}=\log\omega(0)-\log\omega(\eta).$$

On a donc

$$h(a+\varepsilon+iy)\,k(y)\,e^{i\xi y}=\int_0^{+\infty} e^{-(a+\varepsilon)t}\,e^{i(\xi-t)y}\,k(y)\,t^{p+1}\,\varphi(t)[\alpha(t)-\mathrm{A}\,e^{at}\,\beta(t)]\,dt,$$

l'intégrale étant encore uniformément convergente pour $-2\lambda\leq y\leq+2\lambda$.

Par intégration sous le signe $\int$, on obtient, en posant

$$\mathrm{K}(u)=\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} k(y)\,e^{iuy}\,dy,$$

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} h(a+\varepsilon+iy)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy=\int_0^{+\infty} e^{-(a+\varepsilon)t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,[\alpha(t)-\mathrm{A}\,e^{at}\,\beta(t)]\,dt,$$

ou, en ajoutant aux deux membres l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{A}\,e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt,$$

qui est absolument convergente puisque $t^{p+1}\varphi(t)\beta(t)$ tend vers 1 pour t infini et $\mathrm{K}(\xi-t)$ est borné,

$$(6)\qquad \int_{-2\lambda}^{+2\lambda} h(a+\varepsilon+iy)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy+\mathrm{A}\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt$$
$$=\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,e^{-at}\,\alpha(t)\,dt.$$

Si $\mathrm{K}(u)$ *est sommable sur* $(-\infty,+\infty)$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt$$

est absolument convergente et, lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt \qquad \text{tend vers} \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt.$$

On voit donc que, quel que soit ξ réel, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,e^{-at}\,\alpha(t)\,dt$$

est convergente pour tout ε positif et, si $\mathrm{K}(u)$ est sommable sur $(-\infty,+\infty)$, elle tend vers

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} g(y)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy+\mathrm{A}\int_0^{+\infty} \mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt$$

quand ε tend vers zéro.

3.3.5. Si l'on prend $k(y) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{|y|}{2\lambda}\right]$, on a

$$K(u) = \frac{\sin^2 \lambda u}{\lambda u^2}.$$

On arrive ainsi au résultat suivant :

Quels que soient λ positif et ξ réel, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} \frac{\sin^2 \lambda (t-\xi)}{\lambda (t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t)\, e^{-at} \alpha(t)\, dt$$

est convergente pour tout ε positif et tend vers

$$\frac{1}{2}\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} g(y)\left[1 - \frac{|y|}{2\lambda}\right] e^{i\xi y}\, dy + A\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda (t-\xi)}{\lambda (t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t)\, \beta(t)\, dt$$

quand ε tend vers zéro.

La fonction $\frac{\sin^2 \lambda (t-\xi)}{\lambda (t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t) e^{-at} \alpha(t)$ étant positive ou nulle, ceci montre que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda (t-\xi)}{\lambda (t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t)\, e^{-at} \alpha(t)\, dt$$

est convergente et égale à

$$\frac{1}{2}\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} g(y)\left[1 - \frac{|y|}{2\lambda}\right] e^{i\xi y}\, dy + A\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda (t-\xi)}{\lambda (t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t)\, \beta(t)\, dt.$$

Quand ξ tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers zéro d'après le théorème de Riemann-Lebesgue.

Le second s'écrit

$$A\int_{-\xi}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda u}{\lambda u^2} W_\xi(u)\, du,$$

avec

$$W_\xi(u) = \begin{cases} (\xi+u)^{p+1} \varphi(\xi+u)\, \beta(\xi+u) & \text{pour } u \geqq -\xi, \\ 0 & \text{pour } u < -\xi. \end{cases}$$

Comme la fonction $W_\xi(u)$ est bornée en module par un nombre fixe et tend vers 1 quand ξ tend vers $+\infty$, puisque $t^{p+1}\varphi(t)\beta(t)$ est bornée pour $t \geqq 0$ et tend vers 1 pour t infini, l'intégrale tend vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda u}{\lambda u^2}\, du = \pi$$

quand ξ tend vers $+\infty$.

En définitive, nous avons montré que, *quel que soit λ positif, l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda (t-\xi)}{\lambda (t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t)\, e^{-at} \alpha(t)\, dt$$

est convergente quel que soit ξ réel et tend vers πA quand ξ tend vers $+\infty$.

3.4. Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$t^{p+1}\varphi(t)e^{-at}\alpha(t)=\mathrm{J}(t).$$

Nous devons alors prouver que $\mathrm{J}(t)$ tend vers A quand t tend vers $+\infty$.

3.4.1. Comme $\mathrm{J}(t)\geq 0$, quel que soit h positif, on a pour $\xi\geq h$ et λ positif quelconque

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\mathrm{J}(t)\,dt\geq\int_{\xi-h}^{\xi+h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\mathrm{J}(t)\,dt.$$

Mais, pour $\xi-h\leq t\leq\xi+h$, on a

$$t^{p+1}\geq(\xi-h)^{p+1},\quad \varphi(t)\geq\varphi(\xi+h),\quad e^{-at}\geq e^{-a(\xi+h)}\quad\text{et}\quad \alpha(t)\geq\alpha(\xi-h),$$

et, par suite,

$$\mathrm{J}(t)\geq(\xi-h)^{p+1}\varphi(\xi+h)e^{-a(\xi+h)}\alpha(\xi-h)=\mathrm{J}(\xi-h)e^{-2ah}\frac{\varphi(\xi+h)}{\varphi(\xi-h)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\mathrm{J}(t)\,dt&\geq\mathrm{J}(\xi-h)e^{-2ah}\frac{\varphi(\xi+h)}{\varphi(\xi-h)}\int_{\xi-h}^{\xi+h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt,\\&\geq\mathrm{J}(\xi-h)e^{-2ah}\frac{\varphi(\xi+h)}{\varphi(\xi-h)}\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{J}(\xi-h)\leq e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)}\frac{1}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\mathrm{J}(t)\,dt.$$

Il résulte de là que

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\mathrm{J}(t)=\overline{\lim_{\xi\to+\infty}}\,\mathrm{J}(\xi-h)\leq\frac{e^{2ah}}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du}\pi\mathrm{A}.\tag{7}$$

En faisant tendre d'abord λ vers $+\infty$, puis h vers zéro, on obtient

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\mathrm{J}(t)\leq\mathrm{A}.\tag{8}$$

3.4.2. Ceci montre que $\mathrm{J}(t)$ est borné pour $t\geq 0$. Autrement dit, il existe un nombre positif R tel que, quel que soit $t\geq 0$,

$$\mathrm{J}(t)\leq\mathrm{R}.$$

Alors, quel que soit h positif, on peut écrire pour $\xi>h$ et λ positif quelconque

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\mathrm{J}(t)\,dt&\leq\mathrm{R}\int_0^{\xi-h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt\\&+\int_{\xi-h}^{\xi+h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\mathrm{J}(t)\,dt+\mathrm{R}\int_{\xi+h}^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt.\end{aligned}\tag{9}$$

Au second membre, le premier terme est inférieur à

$$\mathrm{R}\int_{-\infty}^{\xi-h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt=\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

et le troisième est égal à $\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$.

Comme, pour $\xi-h\leqq t\leqq\xi+h$,

$$\mathrm{J}(t)\leqq(\xi+h)^{p+1}\varphi(\xi-h)\,e^{-a(\xi-h)}\,\alpha(\xi+h)=\mathrm{J}(\xi+h)\,e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)},$$

le second terme est au plus égal à

$$\mathrm{J}(\xi+h)\,e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)}\int_{\xi-h}^{\xi+h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt=\mathrm{J}(\xi+h)\,e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)}\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du.$$

Finalement, (9) donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt\leqq 2\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du+\mathrm{J}(\xi+h)\,e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)}\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du.$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{J}(\xi+h)\geqq e^{-2ah}\frac{\varphi(\xi+h)}{\varphi(\xi-h)}\,\frac{1}{\displaystyle\int_{\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt-2\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du\right].$$

Il résulte de là que

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\mathrm{J}(t)=\varlimsup_{\xi\to+\infty}\mathrm{J}(\xi+h)\geqq\frac{e^{-2ah}}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du}\left[\pi\mathrm{A}-2\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du\right].$$

En faisant tendre d'abord λ vers $+\infty$, puis h vers zéro, on obtient

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\mathrm{J}(t)\geqq\mathrm{A},$$

ce qui, avec (8), montre que $\mathrm{J}(t)$ tend vers A quand t tend vers $+\infty$.

4. Remarques.

4.1. Remarquons d'abord que, si l'on veut établir seulement le théorème I, on n'a pas besoin des lemmes 1 et 2.

En effet, avec les hypothèses du théorème I, si l'on attribue à $\mathrm{F}^{(p)}(s)$, en tout point de la droite $\mathcal{R}s=a$ autre que a, une valeur égale à sa limite pour s tendant vers ce point dans le demi-plan $\mathcal{R}s>a$, on obtient une fonction continue sur l'ensemble des s satisfaisant à $\mathcal{R}s\geqq a$ et $s\neq a$.

Comme, pour $\mathcal{R}s > a$, on a par intégration par parties

$$h(s) = (-1)^{p+1} F^{(p)}(s+l)\gamma(l) + (-1)^p F^{(p)}(s)\gamma(0) + (-1)^p \int_0^l F^{(p)}(s+u)\, d\gamma(u),$$

on voit que, pour y réel $\neq 0$, $h(a+\varepsilon+iy)$ tend vers

$$g(y) = (-1)^{p+1} F^{(p)}(a+iy+l)\gamma(l) + (-1)^p F^{(p)}(a+iy)\gamma(0) + (-1)^p \int_0^l F^{(p)}(a+iy+u)\, d\gamma(u)$$

quand ε tend vers zéro par valeurs positives. La convergence est d'ailleurs uniforme sur tout intervalle fermé ne contenant pas la valeur zéro [et, par suite, la fonction $g(y)$ est continue pour $y \neq 0$].

D'autre part, en raisonnant comme au paragraphe 3.3.2, on voit que, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$h(a+s) = O[\varphi(r)] \qquad (r = |s|),$$

où φ est une certaine fonction définie sur un intervalle semi-ouvert $]0, T]$, positive et non croissante sur cet intervalle, et telle que l'intégrale $\int_0^T \varphi(t)\, dt$ soit convergente.

Il existe donc deux nombres positifs N et ρ, le second au plus égal a T, tels que, si $|s| \leq \rho$ et $\mathcal{R}s > 0$, $|h(a+s)| \leq N\varphi(r)$.

Alors, si $\varepsilon \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$, on a pour $|y| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ et $y \neq 0$

$$|h(a+\varepsilon+iy)| \leq N\varphi\left(\sqrt{\varepsilon^2+y^2}\right) \leq N\varphi(|y|).$$

En définitive, on voit que, quels que soient Y_1 et Y_2 réels satisfaisant à $Y_1 < 0 < Y_2$ et quelle que soit la fonction $\theta(y)$ continue sur l'intervalle fermé $[Y_1, Y_2]$, lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives, l'intégrale $\int_{Y_1}^{Y_2} h(a+\varepsilon+iy)\theta(y)\, dy$ tend vers $\int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\theta(y)\, dy$, intégrale qui est absolument convergente.

On peut alors continuer comme aux paragraphes 3.3.3 à 3.4.2.

4.2. Remarquons également que, si l'on élargissait les hypothèses du théorème II en supposant que $F^{(p)}(s)$ se comporte de la façon indiquée au voisinage du point $a+iy$, non plus pour tout y réel, mais pour tout y réel de module au plus égal à un certain nombre positif L, on pourrait conclure que l'on a

$$AP\left(\frac{L}{a}\right) \leq \varliminf_{t\to+\infty} \frac{e^{-at}\alpha(t)}{\beta(t)} \leq \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{e^{-at}\alpha(t)}{\beta(t)} \leq AQ\left(\frac{L}{a}\right),$$

$P(\mu)$ et $Q(\mu)$ étant deux fonctions déterminées une fois pour toutes et qui tendent vers 1 lorsque μ tend vers $+\infty$ (9).

En effet, la fonction $h(s)$ satisferait maintenant aux hypothèses du lemme 2 modifiées comme il a été dit au paragraphe 2.2.1, avec $Y_1 = -L$ et $Y_2 = +L$.

On pourrait en conclure l'existence d'une fonction $g(y)$ sommable sur l'intervalle $[-L, +L]$ telle que, quand ε tend vers zéro par valeurs positives :

1° La fonction $h(a+\varepsilon+iy)$ converge presque partout sur $[-L, +L]$ vers $g(y)$;

2° Quelle que soit la fonction $\theta(y)$ continue sur l'intervalle fermé $[-L, +L]$,

$$\int_{-L}^{+L} h(a+\varepsilon+iy)\theta(y)\,dy \qquad \text{tend vers} \qquad \int_{-L}^{+L} g(y)\theta(y)\,dy.$$

Les raisonnements des paragraphes 3.3.4 et 3.3.5 montreraient alors que, *pour* $\lambda = \frac{L}{2}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\, t^{p+1}\varphi(t)\, e^{-at}\alpha(t)\,dt$$

est convergente quel que soit ξ réel et tend vers πA quand ξ tend vers $+\infty$.

En posant toujours

$$t^{p+1}\varphi(t)\, e^{-at}\alpha(t) = J(t),$$

on arriverait à l'inégalité (7) *pour h positif quelconque et* $\lambda = \frac{L}{2}$.

En prenant, par exemple, $\lambda = \frac{L}{2}$ et $h = \frac{1}{\sqrt{aL}}$, on obtiendrait

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, J(t) \leq AQ\left(\frac{L}{a}\right),$$

avec

$$Q(\mu) = \frac{\pi e^{2\sqrt{\frac{1}{\mu}}}}{\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}}^{\frac{1}{2}\sqrt{\mu}} \frac{\cos^2 u}{u^2}\,du}.$$

Ceci permettrait de conclure que $J(t)$ est bornée pour $t \geq 0$ et que l'on a pour λ et h positifs quelconques

$$\overline{\lim_{\xi\to+\infty}} \int_0^{\xi-h} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} J(t)\,dt \leq AQ\left(\frac{L}{a}\right)\int_{\lambda h}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

et

$$\overline{\lim_{\xi\to+\infty}} \int_{\xi+h}^{+\infty} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} J(t)\,dt \leq AQ\left(\frac{L}{a}\right)\int_{\lambda h}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du,$$

(9) La même remarque a été faite pour le théorème classique de Ikehara par H. Heilbronn et E. Landau (*Math. Z.*, t. 37, 1933, p. 10-16).

de sorte que, pour $\lambda = \frac{L}{2}$ et h positif quelconque,

$$\varlimsup_{\xi \to +\infty} \int_{\xi-h}^{\xi+h} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} J(t)\, dt \geqq \pi A - 2AQ\left(\frac{L}{a}\right) \int_{\lambda h}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du.$$

Alors, en tenant compte de ce que, comme on l'a vu au paragraphe 3.4.2, on a pour $\xi > h$

$$\int_{\xi-h}^{\xi+h} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} J(t)\, dt \leqq J(\xi+h)\, e^{2ah} \frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)} \int_{-\lambda h}^{+\lambda h} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du,$$

on en déduirait que, pour $\lambda = \frac{L}{2}$ et h positif quelconque,

$$\varlimsup_{t \to +\infty} J(t) \geqq \frac{e^{-2ah}}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du} \left[\pi A - 2AQ\left(\frac{L}{a}\right) \int_{\lambda h}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \right].$$

Pour $h = \frac{1}{\sqrt{aL}}$, ceci donnerait

$$\varlimsup_{t \to +\infty} J(t) \geqq AP\left(\frac{L}{a}\right),$$

avec

$$P(\mu) = \frac{e^{-2\sqrt{\frac{1}{\mu}}}}{\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}}^{\frac{1}{2}\sqrt{\mu}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du} \left[\pi - 2Q(\mu) \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\mu}}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \right].$$

Les plus petite et plus grande limite de $J(t)$ pour t tendant vers $+\infty$ étant les mêmes que celles de $\frac{e^{-\alpha t}\alpha(t)}{\beta(t)}$, du fait que $t^{\rho+1}\varphi(t)\beta(t)$ tend vers 1, on aurait bien le résultat annoncé.

5. Théorèmes particuliers.

Nous allons maintenant donner des théorèmes particuliers, d'énoncés simples, qui se déduisent aisément du théorème I.

5.1. Nous avons besoin de trois nouveaux lemmes.

5.1.1. Lemme 3. — *Soient l positif et < 1, ρ réel $\geqq 0$ et m entier $\geqq 0$. On a pour t tendant vers $+\infty$:*

$$\int_0^l e^{-tu} u^\rho \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-m} du \sim \Gamma(\rho+1)\, t^{-\rho-1} (\log t)^{-m}.$$

Ce lemme est un cas particulier d'un théorème abélien connu relatif à l'intégrale de Laplace (10). On peut le démontrer très simplement de la façon suivante :

En faisant le changement de variable $u = \frac{X}{t}$, on a pour $t > \frac{1}{l^2}$ (de sorte que $lt > \sqrt{t}$)

$$\int_0^t e^{-tu} u^\rho \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-m} du = t^{-\rho-1} \int_0^{lt} e^{-X} X^\rho \left(\log \frac{t}{X}\right)^{-m} dX,$$

$$= t^{-\rho-1} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-X} X^\rho \left(\log \frac{t}{X}\right)^{-m} dX + t^{-\rho-1} \int_{\sqrt{t}}^{lt} e^{-X} X^\rho \left(\log \frac{t}{X}\right)^{-m} dX.$$

Comme on a, pour $\sqrt{t} \leq X \leq lt$,

$$e^{-X} X^\rho \left(\log \frac{t}{X}\right)^{-m} \leq e^{-\sqrt{t}} (lt)^\rho \log \frac{1}{l}\Big)^{-m},$$

on voit que

$$t^{-\rho-1} \int_{\sqrt{t}}^{lt} e^{-X} X^\rho \left(\log \frac{t}{X}\right)^{-m} dX \leq (lt - \sqrt{t}) t^{-1} l^\rho \left(\log \frac{1}{l}\right)^{-m} e^{-\sqrt{t}},$$

$$= o[t^{-\rho-1} (\log t)^{-m}].$$

D'autre part, on peut écrire

$$t^{-\rho-1} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-X} X^\rho \left(\log \frac{t}{X}\right)^{-m} dX = t^{-\rho-1} (\log t)^{-m} \int_0^{+\infty} w_t(X)\, dX,$$

avec

$$w_t(X) = \begin{cases} e^{-X} X^\rho \left(\dfrac{\log t}{\log \dfrac{t}{X}}\right)^m & \text{pour } 0 < X \leq \sqrt{t}, \\ 0 & \text{pour } X > \sqrt{t}. \end{cases}$$

Comme, pour $0 < X \leq \sqrt{t}$, $\log \frac{t}{X} \geq \frac{1}{2} \log t$, on voit que, pour tout t supérieur à $\frac{1}{l^2}$, on a quel que soit X positif

$$0 < w_t(X) \leq 2^m e^{-X} X^\rho.$$

D'autre part, quand t tend vers $+\infty$, $w_t(X)$ tend vers $e^{-X} X^\rho$ (d'ailleurs, quel que soit ε positif et inférieur à 1, la convergence est uniforme pour $\varepsilon \leq X \leq \frac{1}{\varepsilon}$).

Par suite, quand t tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} w_t(X)\, dX$ tend vers

$$\int_0^{+\infty} e^{-X} X^\rho\, dX = \Gamma(\rho + 1).$$

---

(10) *Cf.* Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Springer, Berlin, 1937), p. 202.

5.1.2. Lemme 4. — *Quel que soit* ρ *réel ou complexe non égal à un entier* < 0, *on a pour* $\mathcal{R}s > 0$

$$\int_1^{+\infty} e^{-st} t^{\rho}\, dt = \Gamma(\rho+1) s^{-\rho-1} + \textit{fonction entière de } s,$$

$s^{-\rho-1}$ *étant pris avec sa détermination principale* (c'est-à-dire celle qui est égale à $r^{-\rho-1} e^{-(\rho+1)i\theta}$ si $s = r e^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$).

Si $\mathcal{R}\rho > -1$, on sait que, pour $\mathcal{R}s > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\rho}\, dt = \Gamma(\rho+1) s^{-\rho-1},$$

et l'on a immédiatement le résultat en écrivant

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\rho}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\rho}\, dt - \int_0^{1} e^{-st} t^{\rho}\, dt.$$

Sinon, on voit que, pour $\mathcal{R}s > 0$, la différence

$$\int_1^{+\infty} e^{-st} t^{\rho}\, dt - \Gamma(\rho+1) s^{-\rho-1}$$

a pour dérivée $m^{\text{ième}}$

$$(-1)^m \left[\int_1^{+\infty} e^{-st} t^{\rho+m}\, dt - \Gamma(\rho+m+1) s^{-\rho-m-1} \right].$$

Si m est choisi de manière que $\mathcal{R}[\rho+m] > -1$, il résulte de ce que l'on vient de voir que cette dérivée $m^{\text{ième}}$ est une fonction entière. Ceci entraîne que la fonction elle-même soit une fonction entière.

5.1.3. Lemme 5. — ω *désignant un nombre réel quelconque et* q *un entier* ≥ 0, *définissons la fonction* $\beta_{\omega,q}$ *par*

$$\beta_{\omega,q}(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pour } 0 < t < 1, \\ t^{\omega-1} \displaystyle\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} c_j(\omega) (\log t)^{q-j} & \textit{pour } t \geq 1, \end{cases}$$

avec $c_0(\omega) = \frac{1}{\Gamma(\omega)}$ *et, pour* $j > 0$, $c_j(\omega) = \frac{d^j}{d\omega^j}[c_0(\omega)]$.

Alors on a pour $\mathcal{R}s > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \beta_{\omega,q}(t)\, dt = s^{-\omega} \left(\log \frac{1}{s} \right)^q + \textit{fonction entière de } s,$$

$s^{-\omega}$ *et* $\log \frac{1}{s}$ *étant pris avec leur détermination principale* (c'est-à-dire que, si $s = r e^{i\theta}$, avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$, on a $s^{-\omega} = r^{-\omega} e^{-i\omega\theta}$ et $\log \frac{1}{s} = -\log r - i\theta$).

Le cas $q = 0$ résulte du lemme précédent si ω n'est pas un entier ≤ 0 et est évident si ω est un entier ≤ 0, car alors $c_0(\omega) = 0$ et $\beta_{\omega,q}(t) = 0$. Il n'y a donc à traiter que le cas $q \geq 1$.

1° Nous poserons, pour $t > 0$,

$$b_{\omega,q}(t) = t^{\omega-1} \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} c_j(\omega) (\log t)^{q-j} = \frac{d^q}{d\omega^q} [c_0(\omega) t^{\omega-1}],$$

de sorte que

$$\beta_{\omega,q}(t) = \begin{cases} b_{\omega,q}(t) & \text{pour } t \geq 1, \\ 0 & \text{pour } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Notons que $b_{\omega,q}$ a pour dérivée $b_{\omega-1,q}$, car

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{d^q}{d\omega^q} [c_0(\omega) t^{\omega-1}] \right\} = \frac{d^q}{d\omega^q} \left\{ \frac{d}{dt} [c_0(\omega) t^{\omega-1}] \right\}$$

et

$$\frac{d}{dt} [c_0(\omega) t^{\omega-1}] = (\omega - 1) c_0(\omega) t^{\omega-2} = c_0(\omega - 1) t^{\omega-2}.$$

2° Si $\omega > 0$, on a pour s réel > 0

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} c_0(\omega) t^{\omega-1} \, dt = \left(\frac{1}{s}\right)^{\omega}$$

et, en dérivant q fois sous le signe $\int$ par rapport à ω, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} b_{\omega,q}(t) \, dt = \left(\frac{1}{s}\right)^{\omega} \left(\log \frac{1}{s}\right)^q = s^{-\omega} \left(\log \frac{1}{s}\right)^q.$$

En raison de l'analyticité, cette relation subsiste pour s complexe tel que $\mathcal{R}s > 0$.

On peut ensuite écrire, pour $\mathcal{R}s > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} \beta_{\omega,q}(t) \, dt &= \int_0^{+\infty} e^{-st} b_{\omega,q}(t) \, dt - \int_0^1 e^{-st} b_{\omega,q}(t) \, dt, \\ &= s^{-\omega} \left(\log \frac{1}{s}\right)^q + \text{fonction entière de } s. \end{aligned}$$

3° Supposons maintenant $\omega \leq 0$.

En tenant compte de ce que $b_{\omega,q}$ est la dérivée de $b_{\omega+1,q}$, $b_{\omega+1,q}$ celle de $b_{\omega+2,q}$, et ainsi de suite, on voit que, pour $\mathcal{R}s > 0$, m intégrations par parties successives donnent

$$\begin{aligned} (10) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-st} \beta_{\omega,q}(t) \, dt &= \int_1^{+\infty} e^{-st} b_{\omega,q}(t) \, dt \\ &= -e^{-s} \sum_{i=1}^{m} b_{\omega+j,q}(1) s^{j-1} + s^m \int_1^{+\infty} e^{-st} b_{\omega+m,q}(t) \, dt. \end{aligned}$$

Si m est assez grand pour que $\omega + m > 0$, on a

$$\int_1^{+\infty} e^{-st} b_{\omega+m,q}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} b_{\omega+m,q}(t)\,dt - \int_0^1 e^{-st} b_{\omega+m,q}(t)\,dt,$$

$$= s^{-\omega-m}\left(\log\frac{1}{s}\right)^q - \int_0^1 e^{-st} b_{\omega+m,q}(t)\,dt$$

et la formule (10) donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\beta_{\omega,q}(t)\,dt = s^{-\omega}\left(\log\frac{1}{s}\right)^q + \text{fonction entière de } s.$$

5.1.4. Ajoutons les observations suivantes :

Si ω n'est pas un entier négatif ou nul, on a

$$c_0(\omega) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \neq 0,$$

et par suite *on a pour t tendant vers $+\infty$*

$$\beta_{\omega,q}(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\omega)}\, t^{\omega-1}(\log t)^q.$$

Si $\omega = -m$, avec m entier ≥ 0, on a

$$c_0(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad c_1(\omega) = (-1)^m m\,!,$$

et par suite, *si $q \geq 1$, on a pour t tendant vers $+\infty$*

$$\beta_{\omega,q}(t) \sim (-1)^m m\,!\; q t^{-m-1}(\log t)^{q-1}.$$

5.2. Nous sommes maintenant en mesure d'établir les théorèmes annoncés. Il est entendu que, dans nos énoncés les fonctions $(s-a)^{-\omega}$, $(s-a)^{-\lambda_j}$, $\log(s-a)$ et $\log\frac{1}{s-a}$, qui ne sont considérées que dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, sont prises avec leur détermination principale, c'est-à-dire que, si $s = a + r_1 e^{i\theta_1}$, avec $r_1 > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < +\frac{\pi}{2}$, on a

$$(s-a)^{-\omega} = r_1^{-\omega} e^{-i\omega_1\theta}, \qquad (s-a)^{-\lambda_j} = r_1^{-\lambda_j} e^{-i\lambda_j\theta_1},$$

$$\log(s-a) = \log r_1 + i\theta_1, \qquad \log\frac{1}{s-a} = \log\frac{1}{r_1} - i\theta_1.$$

De plus, les fonctions $g(s)$ et $h(s)$ qui figurent dans nos énoncés ne sont évidemment plus celles que nous avions introduites dans les raisonnements du chapitre 3.

5.2.1. Nous établirons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soit ω un nombre réel qui ne soit pas un entier ≤ 0. Supposons*

que la fonction $f(s)$ soit holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a et que l'on ait au voisinage du point a

$$f(s) = (s-a)^{-\omega} g(s) + h(s), \tag{11}$$

avec g et h holomorphes en ce point et $g(a) \neq 0$, ou même

$$f(s) = (s-a)^{-\omega} g(s) + \sum_{j=1}^{n} (s-a)^{-\lambda_j} \{ g_j(s) \cos[\mu_j \log(s-a)] + h_j(s) \sin[\mu_j \log(s-a)] \} + h(s) \quad (11), \tag{12}$$

avec g, h, les g_j et les h_j holomorphes au point a, $g(a) \neq 0$, les λ_j et les μ_j réels, les λ_j inférieurs à ω, et aucun $\lambda_j + i\mu_j$ n'étant un entier ≤ 0,

Alors on a pour t tendant vers $+\infty$

$$\alpha(t) \sim \frac{g(a)}{\Gamma(\omega)} e^{at} t^{\omega-1}.$$

Nous démontrerons ce théorème en supposant que l'on a (12), les modifications qu'il faudrait faire si l'on avait (11) sont évidentes.

Nous appliquerons le théorème I en distinguant deux cas suivant que l'on a $\omega \geq 1$ ou bien $-m < \omega < 1 - m$, avec m entier ≥ 0.

Dans les deux cas, nous prendrons

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq t < 1, \\ \dfrac{g(a)}{\Gamma(\omega)} t^{\omega-1} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{g_j(a) + ih_j(a)}{2} \frac{t^{\lambda_j - 1 + i\mu_j}}{\Gamma(\lambda_j + i\mu_j)} & \\ \quad + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{g_j(a) - ih_j(a)}{2} \frac{t^{\lambda_j - 1 - i\mu_j}}{\Gamma(\lambda_j - i\mu_j)} & \text{pour } t \geq 1, \end{cases}$$

et $A = 1$.

Ainsi, on a pour t tendant vers $+\infty$

$$\beta(t) \sim \frac{g(a)}{\Gamma(\omega)} t^{\omega-1}$$

et la conclusion du théorème I donne bien le résultat indiqué.

---

(11) On peut remarquer que

$$(s-a)^{-\lambda_j} \{ g_j(s) \cos[\mu_j \log(s-a)] + h_j(s) \sin[\mu_j \log(s-a)] \} = \frac{1}{2} \{ [g_j(s) + ih_j(s)](s-a)^{-\lambda_j - i\mu_j} + [g_j(s) - ih_j(s)](s-a)^{-\lambda_j + i\mu_j} \}.$$

D'autre part, d'après le lemme 4,

$$\begin{aligned}G(s) &= s^{-\omega}g(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{g_j(a) + ih_j(a)}{2} s^{-\lambda_j - i\mu_j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \frac{g_j(a) - ih_j(a)}{2} s^{-\lambda_j + i\mu_j} + \text{fonction entière de } s, \\ &= s^{-\omega}g(a) + \sum_{j=1}^{n} s^{-\lambda_j}[g_j(a)\cos(\mu_j \log s) + h_j(a)\sin(\mu_j \log s)] + \text{fonction entière de } s.\end{aligned}$$

$F(s)$ est donc holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a, et l'on a au voisinage du point a

$$\begin{aligned}F(s) &= (s-a)^{-\omega}[g(s) - g(a)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} (s-a)^{-\lambda_j}\{[g_j(s) - g_j(a)]\cos[\mu_j \log(s-a)] + [h_j(s) - h_j(a)]\sin[\mu_j \log(s-a)]\} \\ &\quad + h(s) + \text{fonction entière de } s, \\ &= (s-a)^{1-\omega}g^*(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} (s-a)^{1-\lambda_j}\{g_j^*(s)\cos[\mu_j \log(s-a)] + h_j^*(s)\sin[\mu_j \log(s-a)]\} + h^*(s),\end{aligned}$$

avec g^*, h^*, les g_j^* et les h_j^* holomorphes en a.

1° *Cas* $\omega \geqq 1$.

Remarquons d'abord que $g(a) > 0$.

En effet, quand s tend vers a par valeurs réelles supérieures à a, on a

$$f(s) \sim (s-a)^{-\omega}g(a).$$

Or $f(s)$ est $\geqq 0$ pour s réel $> a$, puisque $\alpha(t) \geqq 0$.

Alors, les hypothèses du théorème I sont satisfaites en prenant $p = 0$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \frac{u^{\omega-1}}{g(a)}.$$

En effet, cette fonction est bien continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leqq l$, l'intégrale $\int_0^l \log \frac{1}{\gamma(u)}\, du$ est convergente, et, d'après le lemme 3, on a pour t tendant vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du \sim \frac{\Gamma(\omega)}{g(a)} t^{-\omega},$$

de sorte que $t\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du$ tend vers 1.

---

(12) Ainsi $\frac{g(a)}{\Gamma(\omega)} e^{at} t^{\omega-1} > 0$.

D'autre part, $F(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F(a+s) = O[r^{1-\omega}],$$
$$= O\left[\frac{1}{\gamma(r)}\right],$$

avec $r = |s|$.

2° *Cas* $-m < \omega < 1-m$, *avec* m *entier* ≥ 0.

Ici, $g(a)$ est du signe de $(-1)^m$ (12).

En effet, si $m = 0$, le même raisonnement que plus haut montre que l'on a $g(a) > 0$.

Si $m \geq 1$, on voit que, lorsque s tend vers a par valeurs réelles supérieures à a,

$$(-1)^m f^{(m)}(s) \sim \omega(\omega+1)(\omega+2)\dots(\omega+m-1)g(a)(s-a)^{-\omega-m}.$$

Chacun des facteurs du produit $\omega(\omega+1)\dots(\omega+m-1)$ est négatif. Or on a pour s réel $> a$

$$(-1)^m f^{(m)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^m \alpha(t)\, dt \geq 0.$$

Les hypothèses du théorème I sont satisfaites cette fois en prenant $p = m+1$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \frac{u^{\omega+m}}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+m)g(a)}.$$

En effet, cette fonction est bien continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leq l$, l'intégrale $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\, du$ est convergente, et, d'après le lemme 3, on a lorsque t tend vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du \sim \frac{\Gamma(\omega+m+1)}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+m)g(a)} t^{-\omega-m-1} = \frac{\Gamma(\omega)}{g(a)} t^{-\omega-m-1},$$

de sorte que $t^{m+2}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du$ tend vers 1.

D'autre part, $F^{(m+1)}(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F^{(m+1)}(a+s) = O[r^{-\omega-m}],$$
$$= O\left[\frac{1}{\gamma(r)}\right].$$

5.2.2. Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit ω un nombre réel quelconque. Supposons que la fonction $f(s)$ soit holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a et que l'on ait au voisinage du point a*

$$f(s) = (s-a)^{-\omega} \sum_{j=0}^{q} g_j(s) \left[\log \frac{1}{s-a}\right]^j + h(s) \qquad (q \geq 1),$$

les fonctions g_j et la fonction h étant holomorphes en ce point, et $g_q(a)$ étant différent de zéro.

Alors, 1° Si ω n'est pas un entier ≤ 0, on a pour t infini

$$\alpha(t) \sim \frac{g_q(a)}{\Gamma(\omega)} e^{at} t^{\omega-1} (\log t)^q;$$

2° Si $\omega = -m$, avec m entier ≥ 0, on a pour t infini

$$\alpha(t) \sim (-1)^m m!\, q g_q(a)\, e^{at} t^{-m-1} (\log t)^{q-1}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous appliquerons le théorème I, en distinguant trois cas suivant les valeurs de ω.

Dans les trois cas, nous prendrons

$$\beta(t) = \sum_{j=0}^{q} g_j(a) \beta_{\omega,j}(t),$$

avec les notations du lemme 5, et $A = 1$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 5.1.4, on aura ainsi pour t tendant vers $+\infty$

$$\beta(t) \sim \frac{g_q(a)}{\Gamma(\omega)} t^{\omega-1} (\log t)^q \qquad \text{si } \omega \text{ n'est pas un entier} \leq 0,$$

et

$$\beta(t) \sim (-1)^m m!\, q g_q(a) t^{-m-1} (\log t)^{q-1} \quad \text{si } \omega = -m, \text{ avec } m \text{ entier} \geq 0.$$

La conclusion du théorème I donnera donc bien les résultats indiqués.

D'autre part, d'après le lemme 5, on aura

$$G(s) = s^{-\omega} \sum_{j=0}^{q} g_j(a) \left[\log \frac{1}{s}\right]^j + \text{fonction entière de } s.$$

On voit que $F(s)$ sera holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a.

Au voisinage de ce point, on aura

$$F(s) = (s-a)^{-\omega}\sum_{j=0}^{q}[g_j(s)-g_j(a)]\left[\log\frac{1}{s-a}\right]^j + h(s) + \text{fonction entière de } s,$$

$$= (s-a)^{1-\omega}\sum_{j=0}^{q} g_j^*(s)\left[\log\frac{1}{s-a}\right]^j + h^*(s),$$

les fonctions g_j^* et la fonction h^* étant holomorphes en a.

1° *Cas* $\omega \geq 1$.

Dans ce cas, $g_q(a)$ est positif, car, quand s tend vers a par valeurs réelles supérieures à a, on a

$$f(s) \sim g_q(a)\,(s-a)^{-\omega}\left(\log\frac{1}{s-a}\right)^q$$

et $f(s)$ est ≥ 0 du fait que $\alpha(t) \geq 0$.

Les hypothèses du théorème I sont satisfaites en prenant $p = 0$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{g_q(a)}\,u^{\omega-1}\left(\log\dfrac{1}{u}\right)^{-q} & \text{pour } 0 < u \leq l, \\ 0 & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

En effet, cette fonction est bien continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leq l$; l'intégrale $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\,du$ est convergente; et, d'après le lemme 3, on a lorsque t tend vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du \sim \frac{\Gamma(\omega)}{g_q(a)}\,t^{-\omega}(\log t)^{-q},$$

de sorte que $t\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ tend vers 1.

D'autre part, $F(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F(a+s) = O\left[r^{1-\omega}\left(\log\frac{1}{r}\right)^q\right],$$

$$= O\left[\frac{1}{\gamma(r)}\right].$$

2° *Cas* $-m < \omega < 1-m$, *avec* m *entier* ≥ 0.

Ici $g_q(a)$ est du signe de $(-1)^m$.

En effet, si $m = 0$, le même raisonnement que plus haut montre que $g_q(a) > 0$.

Si $m \geq 1$, on voit que, lorsque s tend vers a par valeurs réelles supérieures à a, on a

$$(-1)^m f^{(m)}(s) \sim \omega(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+m-1)g_q(a)\,(s-a)^{-\omega-m}\left[\log\frac{1}{s-a}\right]^q.$$

Chacun des facteurs du produit $\omega(\omega+1)(\omega+2)\dots(\omega+m-1)$ est négatif. Or on a pour s réel supérieur à a

$$(-1)^m f^{(m)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^m \alpha(t)\, dt \geq 0.$$

Les hypothèses du théorème I sont satisfaites cette fois en prenant $p = m+1$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\omega+m}}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+m)g_q(a)} \left(\log\dfrac{1}{u}\right)^{-q} & \text{pour } 0 < u \leq l, \\ 0 & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

En effet, cette fonction est bien continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leq l$, l'intégrale $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\, du$ est convergente, et, d'après le lemme 3, on a lorsque t tend vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du \sim \frac{\Gamma(\omega+m+1)}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+m)g_q(a)}\, t^{-\omega-m-1}(\log t)^{-q} = \frac{\Gamma(\omega)}{g_q(a)}\, t^{-\omega-m-1}(\log t)^{-q},$$

de sorte que $t^{m+2}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du$ tend vers 1.

D'autre part, $F^{(m+1)}(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et l'on voit que, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F^{(m+1)}(a+s) = O\left[r^{-\omega-m}\left(\log\frac{1}{r}\right)^{q}\right],$$
$$= O\left[\frac{1}{\gamma(r)}\right].$$

3° *Cas* — $\omega = m$, *avec* m entier ≥ 0.

On voit comme dans le cas précédent que $g_q(a)$ est du signe de $(-1)^m$.

Les hypothèses du théorème I sont satisfaites en prenant $p = m+1$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{m!\, q g_q(a)} \left(\log\dfrac{1}{u}\right)^{1-q} & \text{pour } 0 < u \leq l, \\ 0 \text{ si } q > 1, \quad 1 \text{ si } q = 1, & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

En effet, cette fonction est continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leq l$, l'intégrale $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\, du$ est convergente, et, d'après le lemme 3, on a lorsque t tend vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du \sim \frac{(-1)^m}{m!\, q g_q(a)}\, t^{-1}(\log t)^{1-q},$$

de sorte que $t^{m+2}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du$ tend vers 1.

D'autre part, $F^{(m+1)}(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et l'on voit que, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F^{(m+1)}(a+s) = O\left[\left(\log\frac{1}{r}\right)^{\eta}\right],$$
$$= O\left[\frac{\log\frac{1}{r}}{\gamma(r)}\right].$$

Or l'intégrale $\int_0^{\ell}\left(\log\frac{1}{t}\right)\log\frac{1}{\gamma(t)}\,dt$ est convergente.

5.3. Nous ajouterons les deux observations suivantes :

1° Il est clair qu'en utilisant le théorème II au lieu du théorème I, on pourrait remplacer dans chacun des théorèmes III et IV l'hypothèse que la fonction $f(s)$ est holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a par une hypothèse beaucoup plus générale, mais d'énoncé plus compliqué.

Nous avons voulu ici donner des énoncés simples.

2° Il résulte de ce qui a été dit au paragraphe 4.2 que, dans chacun des théorèmes III et IV, si l'on supprimait toute hypothèse sur le comportement de $f(s)$ au voisinage des points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a, pour ne conserver que celle faite sur le comportement de $f(s)$ au voisinage de a, on pourrait donner néanmoins une conclusion (ceci parce que l'hypothèse restante implique l'existence d'un nombre positif L tel que $F(s)$ soit holomorphe au point $a+iy$ pour tout y réel différent de 0 et de valeur absolue au plus égale à L).

La conclusion du théorème III deviendrait que, pour t infini, $\alpha(t)$ *est un infiniment grand du même ordre que* $e^{at}t^{\omega-1}$; celle du théorème IV que, pour t infini, $\alpha(t)$ *est un infiniment grand du même ordre que*

$$e^{at}t^{\omega-1}(\log t)^{\eta} \quad \textit{si } \omega \textit{ n'est pas un entier} \leq 0,$$
$$e^{at}t^{-m-1}(\log t)^{\eta-1} \quad \textit{si } \omega = -m, \quad \textit{avec } m \textit{ entier} \geq 0.$$

FONCTIONS A SINGULARITÉS POLAIRES SUR DES DOMAINES COMPACTS ET DES SURFACES DE RIEMANN OUVERTES

PAR M. ROGER BADER.

INTRODUCTION.

Depuis la publication, en 1941, du Mémoire fondamental de R. Nevanlinna*([1]), *Quadratisch integrierbare Differentiale...*, l'étude des intégrales abéliennes simples qu'on peut définir sur les surfaces de Riemann ouvertes, est devenue un des champs de recherche de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Par surface de Riemann, il est maintenant classique d'entendre une variété topologique à deux dimensions réelles munie d'une structure analytique complexe. Comme intégrales abéliennes simples de première, de deuxième ou de troisième espèce, on a considéré celles qui satisfont à une condition de régularité à l'extérieur d'un compact : intégrale de Dirichlet finie (Nevanlinna, Myrberg, Sario, Ahlfors, etc.), module ou partie harmonique bornée (Ahlfors, Myrberg, etc.), moyennes bornées (Nevanlinna, Parreau). A l'exception de P. J. Myrberg qui se place du point de vue de la construction effective ou de l'existence d'intégrales abéliennes particulières sur des surfaces déterminées (utilisation de la théorie des fonctions automorphes), aucun auteur ne semble avoir envisagé le cas d'intégrales simples de deuxième et troisième espèce à une infinité de singularités polaires. L'objet de ce travail est de donner certaines définitions de telles intégrales et d'en faire une première étude.

La méthode consiste à rechercher d'abord, sur un domaine compact, les différentielles et fonctions méromorphes qui ont un comportement particulier du point de vue de la norme dans le domaine (intégrale de Dirichlet) ou du

([1]) L'astérisque ou un chiffre entre crochets à la suite d'un nom indique un renvoi à la bibliographie.

module et de l'argument sur sa frontière. La notion de surface de Schottky d'un domaine (le domaine et son symétrique) est utilisée systématiquement et permet une définition simple et géométrique des différentielles et fonctions importantes dans le domaine : ce seront celles qui se laissent prolonger convenablement sur la surface de Schottky. On étudie ensuite dans quelle mesure les différentielles et fonctions sur une surface ouverte sont limites des différentielles et fonctions remarquables définies sur les domaines compacts d'une exhaustion de la surface. Cette méthode est inspirée essentiellement du Mémoire de L. Ahlfors [1], *Open Riemann surfaces*... qui l'applique dans le cas de différentielles de première espèce et de norme finie.

Au chapitre I, après avoir rappelé quelques généralités (§ 1), je détermine (§ 2) les conditions d'orthogonalité, au sens de la norme, entre les différentielles analytiques exactes sur un domaine compact et les différentielles méromorphes sur la surface de Schottky correspondante différentielles que j'appelle différentielles de Schottky-Ahlfors. Je décompose ensuite additivement toute différentielle méromorphe Ω sur un compact en une différentielle exacte de première espèce et en une différentielle de Schottky-Ahlfors ω. Cette décomposition dépend d'un arbitraire qui peut être choisi tel que ω diffère d'aussi peu que l'on veut de Ω, au sens de la norme. Au paragraphe 3, je montre que sur une surface ouverte S toute différentielle méromorphe est, à une différentielle analytique de norme finie près, la limite uniforme (convergence compacte) de ses composantes de Schottky-Ahlfors relatives aux domaines d'une exhaustion de S et convenablement choisies dans ces domaines. Ceci m'amène à considérer une classe $\mathcal{D}'_a$ de différentielles méromorphes Ω qui sont limites de leurs composantes dites strictes de Schottky-Ahlfors; il existe un domaine D dont chaque composante connexe est compacte, qui contient les pôles de Ω, et tel que $\|\Omega\|^2_{S-D} + \|\Omega - \omega\|^2_D < \infty$, ω désignant la composante stricte de Ω dans D. Ces différentielles sont déterminées par les parties singulières de leur développement aux pôles et par leurs périodes, sur les surfaces de Riemann où toute fonction holomorphe de norme finie est constante.

Au chapitre II, j'étudie les différentielles réelles fermées ω qui admettent des singularités polaires : au voisinage d'un point isolé où leurs coefficients ne restent pas finis, il existe une différentielle harmonique γ ayant une singularité polaire en ce point, telle que les coefficients $\omega - \gamma$ soient finis. A l'aide de propriétés d'orthogonalité analogues à celles du chapitre I, je décompose additivement (§ 1) une différentielle fermée sur un compact en une différentielle harmonique à singularités polaires — sa composante de Schottky-Ahlfors — et en une différentielle fermée exacte. Il en résulte (§ 2) qu'une différentielle harmonique sur une surface de Riemann ouverte S, est, à une différentielle harmonique exacte de norme finie près, la limite de ses composantes de Schottky-Ahlfors convenablement choisies sur les domaines d'une exhaustion de S.

Les différentielles harmoniques (classe $\mathcal{D}'_h$) que l'on considère alors sont déterminées par leurs parties singulières aux pôles et par leurs périodes, sur les surfaces de Riemann où toute fonction harmonique uniforme de norme finie est une constante. On trouve une condition suffisante, d'existence d'une différentielle exacte de la classse $\mathcal{D}'_h$ ayant des parties singulières données en des points donnés d'une surface parabolique.

Au chapitre III, je considère des fonctions méromorphes multiplicatives (multiplicateurs de module unité). Sur un domaine compact D (§ 1), ce sont les fonctions multiplicatives de module unité (classe M_1) ou d'argument constant (M_0) sur la frontière D' qu'il est intéressant de considérer. On décompose une fonction multiplicative en produit d'une fonction multiplicative de la classe M_1 par une fonction sans zéro ni pôle dans le domaine D. Au paragraphe 2, je montre que les bases des différentielles de première espèce sur les surfaces de Schottky de domaines exhaustifs d'une surface de Riemann S convergent vers une base des différentielles de première espèce de S. Ceci me permet au paragraphe 3 d'étendre la condition nécessaire d'Abel relative aux zéros et aux pôles d'une fonction uniforme : il faut que la somme des valeurs, aux pôles, d'une intégrale de différentielle harmonique de première espèce et de norme finie, à un nombre fini de périodes non nulles, soit égale à la somme de ses valeurs aux zéros. Cette généralisation a lieu sur les surfaces paraboliques pour les fonctions uniformes appartenant à la classe $\mathcal{B}_a$ des fonctions multiplicatives dont le module est compris entre deux constantes positives, à l'extérieur d'un voisinage, de composantes connexes compactes, des zéros et des pôles (ces points remplissant une condition de faible densité sur S.) Ces fonctions sont limites uniformes de leurs composantes appartenant aux espaces M_1 relatifs aux domaines d'une exhaustion de S.

En terminant ce travail, je suis heureux de pouvoir exprimer ma vive reconnaissance à M. Valiron qui m'a sans cesse prodigué ses conseils et ses encouragements, ainsi qu'à M. Fiala qui a orienté mes premières recherches. J'adresse mes remerciements respectueux à M. Montel qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury et à M. Pérès qui a bien voulu m'examiner sur la seconde thèse. Ma gratitude va enfin à mon ami M. Parreau avec qui j'ai eu sur ce travail de nombreux entretiens et qui m'en a suggéré de précieuses améliorations.

CHAPITRE I.

Différentielles méromorphes et leur intégrale de Dirichlet.

1. Généralités.

On a coutume de parler d'intégrales abéliennes de deuxième ou de troisième espèce suivant que leurs singularités sont uniquement polaires (en z^{-n}, n entier

positif si z désigne l uniformisante locale au voisinage du point singulier $z=0$) où polaires et logarithmes (en z^n et en $\log z$). Quand il n'y a pas lieu de distinguer les deux cas, ce qui est vrai pour les deux premiers chapitres de ce travail, il est commode de considérer plutôt les différentielles correspondantes (singularités en $z^{-n}\,dz$). Il est alors très avantageux d'utiliser le calcul différentiel extérieur et la terminologie employée de façon générale par Bidal et de Rham* et introduite par Ahlfors [1] dans l'étude des intégrales abéliennes de première espèce. Je vais d'abord rappeler rapidement les principales notions qui sont ainsi à la base des deux premiers chapitres (*voir* Ahlfors [1]).

1.1. *Différentielles.* — On appelle *différentielle* sur une surface de Riemann S, la forme différentielle extérieure ω, linéaire, définie au voisinage d'un point P à l'aide de l'uniformisante locale $z=x+iy$ ($z=0$ correspond au point P) par

$$\omega = a\,dx + b\,dy, \qquad a=a(z), \qquad b=b(z),$$

où les coefficients a et b sont à valeurs complexes, continus et à dérivées premières continues, et se comportent par rapport à un changement d'uniformisante locale comme les composantes d'un vecteur covariant. On désigne par $\overline{\omega}=\bar{a}\,dx+\bar{b}\,dy$ l'*imaginaire conjuguée* de ω, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ étant les fonctions imaginaires conjuguées de a et b. D'autre part, on associe à ω sa *différentielle adjointe* (2) $\omega^*=-b\,dx+a\,dy$.

Si, au voisinage d'un point P, on a (3) $d\omega=0$, on dit que la différentielle est *fermée* au point P; si ω et ω^* sont fermées en P, ω est dite *harmonique* (en général complexe) en P; si $\omega^*=-i\omega$ au voisinage de P et si ω est harmonique en P, on dit que ω est *analytique* en P. De même on dira qu'une différentielle est fermée, harmonique ou analytique sur un domaine D d'une surface de Riemann S, ou sur la surface S tout entière, si ces propriétés ont lieu en tout point intérieur du domaine ou de la surface.

On voit qu'une différentielle fermée en P est *exacte* en P, c'est-à-dire est la différentielle extérieure, $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$, d'une fonction au voisinage de P. Au contraire, dans un domaine D ou sur une surface S, on dira que ω est exacte si elle est non seulement fermée, mais encore si la fonction dont elle est la différentielle est *uniforme* dans D ou sur S.

A l'aide du *produit extérieur* de deux différentielles, $\omega_1=a_1\,dx+b_1\,dy$ et $\omega_2=a_2\,dx+b_2\,dy$:

$$\omega_1\omega_2=(a_1b_2-a_2b_1)\,dx\,dy$$

---

(2) Je rappelle les relations $\omega^{**}=-\omega$ et $\omega_1\omega_2^*=\omega_2\omega_1^*$ (produit extérieur défini plus bas).

(3) La différentielle extérieure de ω est $d\omega=\left(\dfrac{\partial b}{\partial x}-\dfrac{\partial a}{\partial y}\right)dx\,dy$.

on défini le *produit scalaire* des deux différentielles ω_1 et ω_2 dans D ou sur S par (4)

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_{D.S} \omega_1 \overline{\omega}_2^*,$$

et la norme d'une différentielle ω par

$$\| \omega \|^2 = (\omega, \omega) = \int_{D.S} (\| a \|^2 + \| b \|^2)\, dx\, dy.$$

si, bien entendu, ces intégrales ont un sens; on vérifie facilement que la norme ainsi définie correspond au double de l'intégrale de Dirichlet de $\int \omega$.

Une différentielle analytique φ est de la forme $\varphi = a\, dz$, a étant une fonction analytique de $z = x + iy$. Autour du point $P(z = 0)$ on considère le développement de φ :

$$\varphi = (a_h z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \dots)\, dz \qquad (h \geqq 0);$$

le nombre h est invariant et représente l'ordre de φ en P.

Dans un domaine compact D de frontière D′ par rapport à S, la formule de Cauchy-Green appliquée au produit $f\omega$ s'écrit :

$$\int_{D'} f\omega = \int_D d(f\omega) = \int_D df\omega + \int_D f\, d\omega. \tag{1.1}$$

l'intégration sur le contour D′ étant effectuée dans le sens direct par rapport à D (on a D à sa gauche quand on parcourt D′ dans ce sens).

Soulignons en passant que dans le genre d'étude que nous allons faire, il suffit d'envisager des domaines à frontières « très régulières » c'est-à-dire composées d'arcs de courbes analytiques ou suffisamment différentiables (Parreau*).

1.2. Singularités. — Les différentielles analytiques de deuxième ou troisième espèce (différentielles méromorphes) sur une surface de Riemann S sont celles qui admettent, en des points isolés de S, des singularités polaires, mais qui sont analytiques en tout autre point de S. Si z désigne l'uniformisante locale au voisinage d'un point $P(z = 0)$, la différentielle méromorphe φ a la forme

$$\varphi = \left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \dots + \frac{a_{-1}}{z}\right) dz + \varphi_1 \qquad (h > 0), \tag{1.2}$$

si P est singulier; φ_1 désigne une différentielle analytique sans singularité au voisinage de P. Le nombre complexe a_{-1} est invariant par changement d'uniformisante locale, c'est le résidu de φ en P. Si $a_{-1} = 0$, la différentielle est dite

(4) La relation $(\omega_1, \omega_2) = (\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_1)$ se déduit immédiatement de cette définition et de la relation signalée au sujet de la définition de l'adjointe de ω.

de deuxième espèce; elle est de troisième espèce dans le cas général $a_{-1} \neq 0$. Le nombre h (entier positif) est également invariant par changement d'uniformisante locale : c'est l'ordre du pôle de φ en P ($-h$ étant l'ordre de φ en P).

1.3. Cycles (Ahlfors [2]). — Comme une surface de Riemann S est une variété orientable et triangulable (Stoïlov*), on peut considérer son groupe d'homologie unidimensionnel : parmi les cycles d'un nombre fini d'éléments, on distingue les bords au sens *compact* (frontières de chaînes bidimensionnelles finies) des bords au sens *non compact* (frontières de chaînes bidimensionnelles infinies).

Sur un domaine D de frontière D′ n'interviennent que des cycles et bords modulo D′ $\left(\text{ou mod } \underset{S}{C} D\right)$ c'est-à-dire des cycles et bords de S dans lesquels on a négligé tout ce qui fait partie de $\underset{S}{C} D$ (Lefschetz*).

Je n'entrerai pas dans le détail de la définition du *nombre d'intersection* (Ahlfors [2], Virtanen*) de deux classes de cycles. Il suffira de noter ici que cette définition est possible, c'est-à-dire possède un caractère d'invariance topologique (deux cycles d'une même classe ont le même nombre d'intersections avec un cycle donné) et que deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont un nombre d'intersection $0 (\mathcal{A} \times \mathcal{B} = 0)$ ou $1 (\mathcal{A} \times \mathcal{B} = 1)$ si et seulement s'il existe un cycle de $\mathcal{A}$ et un cycle de $\mathcal{B}$ sans points communs ou ayant au plus un seul point commun (dans ce dernier cas on admettra que les orientations sont telles que le cycle de $\mathcal{B}$ coupe le cycle de $\mathcal{A}$ de droite à gauche; si $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = -1$, l'intersection de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$ a lieu de gauche à droite).

Une *base d'homologie* du groupe d'homologie des cycles formés d'un nombre fini d'éléments se compose d'une suite dénombrable de cycles linéairement indépendants, $C_1, \ldots, C_n, \ldots$, telle que tout cycle C du groupe dépende linéairement des cycles $C_{k_1}, \ldots, C_{k_i}$, et qu'il existe une relation d'homologie :

$$C \sim x_{k_1} C_{k_1} + \ldots + x_{k_i} C_{k_i} \qquad (x_k \text{ entiers}).$$

La propriété importante du groupe d'homologie de S est l'existence d'une *base d'homologie canonique* c'est-à-dire formée de cycles $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots$ satisfaisant entre eux aux relations

$$A_i \times A_j = 0, \qquad B_i \times B_j = 0, \qquad A_i \times B_j = \delta_i^j \qquad \text{(Kroneker)}.$$

De plus, étant donné une exhaustion de S formée de compacts $\bar{S}_0 \subset S_1, \ldots, \bar{S}_{n-1}, \subset S_n, \ldots$, la base d'homologie précédente peut être choisie de façon que :

1° dans S_n, $A_{n_1}, B_{n_1}, \ldots, A_{n_i}, B_{n_i}$ forment une base d'homologie modulo S'_n (frontière de S_n);

2° les cycles sur S'_n ne dépendent linéairement que d'un nombre fini de cycles A.

Le *genre* g d'un domaine ou d'une surface est égal à la moitié du nombre total des classes d'homologie distinctes de la classe zéro. La *connexion* d'un domaine compact est définie par $2g+c$, c étant le nombre de composantes connexes de sa frontière.

1.4. Périodes. — La formule de Cauchy-Green appliquée à une différentielle fermée ω dans un compact D de frontière D′ donne

$$\int_{D'} \omega = 0,$$

autrement dit, la *période* de ω sur un bord D′ est nulle. La période de ω sur un cycle ne dépend donc que de la classe d'homologie du cycle considéré.

Pour une différentielle analytique de deuxième espèce, on peut également définir la période sur une classe d'homologie de cycles : pour montrer que l'intégrale d'une telle différentielle est nulle sur un bord D′ (au sens compact), on applique la formule de Cauchy-Green au compact D_ε obtenu en supprimant dans D les voisinages des singularités situés à l'intérieur des cercles $|z_\nu| < \varepsilon$ (z_ν étant l'uniformisante locale au voisinage du point singulier P_ν; $z_\nu = 0$ correspondant au point P_ν); ε est supposé suffisamment petit pour que ces voisinages soient disjoints. Les intégrales de ω portant sur les cercles $|z_\nu| = \varepsilon$ sont identiquement nulles :

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a_{-h}}{z_\nu^h} + \ldots + \frac{a_{-2}}{z_\nu^2} + a_0 + a_1 z_\nu + \ldots \right) i\varepsilon\, e^{i\varphi}\, d\varphi = 0 \qquad (z_\nu = \varepsilon\, e^{i\varphi}).$$

De la même manière, on voit qu'au contraire, pour une différentielle analytique de troisième espèce, l'intégrale sur un bord D′ est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus de la différentielle. Cependant on pourra dire que deux différentielles de troisième espèce, ayant les mêmes résidus, ont mêmes périodes ou périodes distinctes, suivant que leur différence, qui est de deuxième espèce, a des périodes nulles ou non. Quand dans la suite nous parlerons de périodes d'une différentielle de troisième espèce, il sera sous-entendu qu'il s'agit de périodes prises par rapport à un système de cycles bien déterminés.

2. Différentielles méromorphes sur des domaines compacts.

2.1. Domaine. Surface de Schottky correspondante. — Une structure analytique déterminant une surface de Riemann S est définie par la donnée d'une classe de fonctions, $\mathcal{A}(P)$, à valeurs complexes, en chaque point P de S (*voir*, par exemple, Parreau*). On peut faire correspondre à cette structure une structure symétrique définie en chaque point par la classe $\overline{\mathcal{A}}(P)$ des fonctions complexes conjuguées de $\mathcal{A}(P)$. La surface symétrique $\tilde{S}$ ainsi obtenue diffère de S uniquement par son orientation qui est opposée à celle de S.

A partir de deux domaines symétriques D et $\tilde{D}$ de S et $\tilde{S}$, on peut alors construire une surface $\hat{D}$, close ou ouverte, suivant que D est compact ou non. Topologiquement on obtient $\hat{D}$ en soudant D à $\tilde{D}$ par identification de leurs frontières aux points symétriques. En un point de $\hat{D}$ intérieur à D ou $\tilde{D}$, la structure analytique de $\hat{D}$ est égale à la structure induite sur D ou $\tilde{D}$ de la structure de S ou $\tilde{S}$; les uniformisantes locales en deux points symétriques peuvent être choisies imaginaires conjuguées. En un point de $D' = \tilde{D}'$, on peut définir la structure analytique comme suit : D' étant frontière très régulière de D, on peut choisir comme uniformisante locale en $Q \in D'$, sur S, une fonction $z(P)$ réelle sur D', à partie imaginaire positive dans D; l'uniformisante locale correspondante sur $\tilde{S}$ aura une partie imaginaire négative dans $\tilde{D}$; en considérant alors Q comme appartenant à $\tilde{D}$, on voit que z dans D et $\bar{z}$ dans $\tilde{D}$ sont les prolongements l'une de l'autre et forment une uniformisante locale z en Q; $\mathfrak{A}(Q)$ est la classe des fonctions à valeurs complexes associée à Q sur $\hat{D}$. $\hat{D}$ est appelé la *surface de Schottky* de D (Ahlfors [1]).

Si D est compact, de genre g et si D' a c parties disjointes, le genre de la surface de Schottky $\tilde{D}$ est $\hat{g} = 2g + c - 1$.

Dans le cas de domaines compacts, on peut généraliser de la façon suivante la construction précédente :

PROPOSITION 2.1 (5). — *Pour que deux domaines compacts* D_1 *et* D_2, *appartenant respectivement à deux surfaces de Riemann* S_1 *et* S_2, *puissent être soudés pour former une surface close, il faut et il suffit que leur frontière* D'_1 *et* D'_2 *ait même nombre fini de composantes.*

Il suffit de montrer que les deux domaines peuvent être raccordés convenablement. Considérons par exemple deux composantes $D'_{1,\nu}$ et $D'_{2,\nu}$ des frontières D'_1 et D'_2 que nous voulons raccorder. Appelons u_1 et u_2 les fonctions harmoniques dans D_1 et D_2 égales à zéro sur $D'_{1,\nu}$ et $D'_{2,\nu}$ et égales respectivement à $+1$ et à -1 sur $\bigcup_{D'_1} D'_{1,\nu}$ et $\bigcup_{D'_2} D'_{2,\nu}$. En désignant par v_1 et v_2 leurs conjuguées, on voit que les fonctions $\exp(u_1 + iv_1)$ et $\exp(u_2 + iv_2)$ représentent conformément un voisinage de $D'_{1,\nu}$ dans D_1 sur une couronne $1 \leq |w| \leq 1 + \varepsilon$ et un voisinage de $D'_{2,\nu}$ dans D_2 sur une couronne $1 \geq |w| \geq 1 - \varepsilon$. On peut alors définir le raccord de D_1 et D_2 à travers $D'_{1,\nu}$ et $D'_{2,\nu}$ par le raccord des deux couronnes $1 - \varepsilon \leq |w| \leq 1$ et $1 \leq |w| \leq 1 + \varepsilon$ à travers $|w| = 1$. Comme D'_1 et D'_2 ont le même nombre de composantes, le raccord peut être ainsi effectué à travers chaque composante.

(5) Cette proposition est due essentiellement à M. Parreau.

2.2. Différentielles de Schottky-Ahlfors. — Considérant les différentielles harmoniques ou analytiques sur un compact fermé D, Ahlfors [1] a trouvé que celles qui pouvaient être prolongées régulièrement sur la surface close $\hat{D}$, jouent un rôle particulier et, plus précisément, résolvent certains problèmes d'extremum dans D. Il a appelé ces différentielles régulières sur $\hat{D}$ (de première espèce), les différentielles de Schottky de D.

De façon analogue je me propose d'étudier les différentielles méromorphes (6) sur D (D étant compact), qui se prolongent en différentielles méromorphes sur $\hat{D}$. Pour les distinguer des différentielles de Schottky, je les appellerai *différentielles de Schottky-Ahlfors*.

A cause de la symétrie d'une surface de Schottky $\hat{D}$, on peut faire correspondre à toute différentielle de Schottky-Ahlors (7) φ analytique, dont l'expression en P est $a\,dz$ (a, fonction analytique à singularités polaires isolées) une différentielles $\tilde{\varphi}$ dont l'expression en $\tilde{P}$ est $\bar{a}\,d\bar{z}$; c'est encore une différentielle méromorphe de Schottky-Ahlfors car $\bar{z}$ est l'uniformisante locale en $\tilde{P}$. A une singularité de φ de la forme (1.2) en P correspond une singularité de $\tilde{\varphi}$ en $\tilde{P}$ de la forme

$$\tilde{\varphi} = \left(\frac{\bar{z}_{-h}}{\bar{z}^h} + \ldots + \frac{\bar{a}_{-1}}{\bar{z}}\right) d\bar{z} + \tilde{\varphi}_1. \tag{2.2.1}$$

L'uniformisante locale étant $\bar{z}$, le résidu en ce point est donc $\bar{a}_{-1}$. D'autre part l'ordre du pôle de $\tilde{\varphi}$ en $\tilde{P}$ est également h.

La différentielle $\tilde{\varphi}$ permet de mettre φ sous forme de somme de différentielles ayant des propriétés de symétrie, ou, ce qui revient au même, ayant sur D′ des propriétés remarquables :

$$\varphi = \frac{\varphi + \tilde{\varphi}}{2} + \frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2} = \varphi^r + \varphi^i.$$

La première composante φ^r est réelle sur D′, la seconde imaginaire pure. Soit $\mathcal{S}_a$ l'espace vectoriel complexe, des différentielles méromorphes de Schottky-Ahlfors; soit $\mathcal{S}_r$ (resp. $\mathcal{S}_i$) le sous-espace réel de $\mathcal{S}_a$ des différentielles réelles (resp. imaginaires pures) sur D′ ($\mathcal{S}_i = i\mathcal{S}_r$) :

Proposition 2.2.1. — *Sur le corps des nombres réels, l'espace vectoriel $\mathcal{S}_a$ est la somme directe de ses sous-espaces $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{S}_i$.*

La décomposition est unique car $\varphi^r + \varphi^i = 0$ sur D′ entraîne $\varphi^r = \varphi^i = 0$ sur D′ donc dans D.

---

(6) Je supposerai toujours qu'elles n'ont pas de pôles sur D′.

(7) De façon générale, à $\omega = a\,dx + b\,dy$ en P correspond $\tilde{\omega} = \tilde{a}\,dx - \tilde{b}\,dy$ en P, $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ étant les valeurs de a et b en $\tilde{P}$, exprimées en fonction de $\bar{z}$.

En considérant une différentielle φ^r, on peut parler de ses périodes et demi-périodes sur D : les premières sont relatives à des cycles de D, les secondes à la trace dans D (demi-cycles) de cycles de $\hat{D}$ homologues à des chemins R sur $\hat{D}$ satisfaisant à $R = -\tilde{R}$ (je dirai aussi « chemins ou cycles conjugués des composantes de D' »). Comme φ^r satisfait à la relation $\varphi^r = \tilde{\bar{\varphi}}^r$, et que d'autre part, de façon générale :

$$\int_{\tilde{C}} \varphi = \int_C \tilde{\bar{\varphi}}, \tag{2.2.2}$$

on voit que φ^r a des périodes imaginaires conjuguées sur deux cycles symétriques de $\hat{D}$, et qu'en particulier, ses périodes relatives à des cycles conjugués des composantes de D' sont imaginaires pures et égales au double de la partie imaginaire des demi-périodes correspondantes dans D. Les parties réelles ou imaginaires des périodes et les parties imaginaires des demi-périodes sur D déterminent donc les parties réelles ou imaginaires des périodes sur $\hat{D}$. Comme une différentielle méromorphe sur une surface close est définie par les parties réelles ou imaginaires de ses périodes et les parties singulières de ses développements aux pôles, à condition que la somme des résidus soit nulle, on a :

Proposition 2.2.2. — *Étant donné sur* D, *d'une part, des parties imaginaires des périodes (nulles sur des cycles homologues aux composantes de* D') *et des parties imaginaires des demi-périodes, ou des parties réelles des périodes, et d'autre part, des parties singulières en des points donnés, il existe une et une seule différentielle* φ^r *sur* D *ayant ces données, à condition que la somme des résidus donnés soit imaginaire pure.*

La condition vient du fait que si φ^r a pour résidu a_{-1} en P, $\tilde{\bar{\varphi}}^r = \varphi^r$ a pour résidu $\bar{a}_{-1}$ en $\tilde{P}$; ainsi

$$\sum_{\hat{D}} \text{résidus } \varphi^r = 2\mathcal{R} \sum_{D} \text{résidus } \varphi^r.$$

2.3. Différentielles multiples de diviseurs donnés. — Étant donné un ensemble fini de points (P_ν) sur une surface de Riemann close S, ou dans un domaine compact D, on associe à chaque point un entier m_ν positif, nul ou négatif, et l'on appelle diviseur d de composantes (P_ν, m_ν) le produit symbolique (H. Weyl*) :

$$d = \prod_1^s P_\nu^{m_\nu} \quad (s \geqq 0). \tag{2.3.1}$$

L'ordre total du diviseur est $m = \sum_\nu m_\nu$. Je considère le nombre m' égal à $m - 1$

si $m \neq 0$ et à zéro si $m = 0$. J'écrirai $d = 1$ si $s = 0$. J'utiliserai les notations

$$d' = \prod_1^s P_\nu^{m'_\nu}, \qquad |d| = \frac{d}{d'}. \tag{2.3.2}$$

Une différentielle méromorphe φ est dite multiple de d si elle est régulière à l'extérieur des points (P_ν) et si en P_ν son ordre est au moins égal à m_ν : si m_ν est positif, elle a un zéro d'ordre au moins égal à m_ν, si m_ν est négatif, elle a un pôle d'ordre au plus égal à $-m_\nu$.

Je dirai qu'un diviseur d_1 est multiple d'un diviseur d_2, $d_1 \supset d_2$, s'il indique plus de zéros et moins de pôles, c'est-à-dire, plus précisément, si $d_1 d_2^{-1}$ est à exposants positifs. Je désignerai par $[d_1, d_2]$ le plus petit commun multiple de d_1 et d_2.

Étant donné un domaine D de genre g et ayant c courbes frontières, soit δ un diviseur à exposants positifs d'ordre total m défini sur $\hat{D}$; appelons $\mathcal{S}_a(\delta^{-1})$ l'espace vectoriel des différentielles méromorphes de Schottky-Ahlfors multiples de δ^{-1} et notons que $\mathcal{S}_r(\delta^{-1}) = \mathcal{S}_r([\delta, \tilde{\delta}]^{-1})$, $\tilde{\delta}$ désignant le symétrique de δ ; on peut énoncer ($\hat{g} = 2g + c - 1$) :

Proposition 2.3. — *L'espace $\mathcal{S}_a(\delta^{-1})$ a $\hat{g} + m'$ dimensions complexes. L'espace $\mathcal{S}_r(\delta^{-1})$ a $\hat{g} + (2n)'$ dimensions réelles, $2n$ étant l'ordre total de $[\delta, \tilde{\delta}]$.*

En effet le genre de $\hat{D}$ étant $\hat{g}$, il y a $\hat{g}$ différentielles analytiques de première espèce, indépendantes, et d'autre part les parties singulières introduisent m coefficients complexes liés par la seule relation résultant du théorème des résidus. La deuxième partie de la proposition résulte de la proposition 2.2.1.

2.4 Orthogonalité. — Dans la suite du paragraphe 2 je considérerai l'orthogonalité de deux différentielles, au sens du produit scalaire, sur le domaine D de la surface de Schottky $\hat{D}$.

De ce fait les produits scalaires que nous allons considérer ne peuvent être définis qu'en faisant intervenir un passage à la limite convenable. Ce sont en effet les produits de deux différentielles méromorphes φ et ψ et, pour que l'intégrale double soit absolument convergente il faut que $\varphi\psi$ ait au plus un pôle simple, donc que l'une au plus ait un pôle simple. Cependant, si l'on choisit au voisinage de chaque pôle une uniformisante locale, $z = re^{i\theta}$, et que l'on exclut du domaine D les cercles $(|z| \leq r)$, on voit (par un calcul explicite que nous ferons chaque fois) que lorsqu'une de ces différentielles est régulière, ces produits scalaires, considérés comme limites des produits dans les domaines $D - (|z| \leq r)$, quand r tend vers zéro, ont des limites finies indépendantes des uniformisantes locales choisies. Pour le calcul du produit scalaire on introduit ainsi une convention qui possède la propriété d'invariance conforme et qui rap-

pelle la notion de valeur principale de Cauchy. Nous parlerons du produit scalaire principal ou d'orthogonalité au sens principal.

Ahlfors [1] a montré qu'une différentielle de première espèce sur D se décomposait additivement de façon unique en une différentielle de Schottky ayant mêmes périodes et en une différentielle analytique exacte. Ces résultats sont basés sur certaines propriétés d'orthogonalité que je vais généraliser aux différentielles méromorphes.

Considérons deux diviseurs d et d_0 donnés par :

$$(2.4.1)\qquad \begin{cases} d=\prod_{r}^{s} P_\nu^{m_\nu} & (P_\nu\in D,\ m_\nu>0,\ s\geqq 0), \\ d_0=\prod_{s}^{t} Q_\nu^{n_\nu} & (Q_\nu\in D,\ n_\nu>0,\ t\geqq 0). \end{cases}$$

Cherchons dans quelles conditions s'annule le produit scalaire principal d'une différentielle φ de Schottky-Ahlfors multiple de $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$ par une différentielle dF analytique exacte sur $\overline{D}$. On calculera d'abord ce produit scalaire dans le domaine $D-V$, $V=(|z|\leqq r)$, complémentaire par rapport à D d'un voisinage V, intérieur à D, des points (P_ν) et (Q_ν). J'appelle C_ν les courbes frontières de chaque composante connexe de V qui sont supposées suffisamment petites pour ne contenir qu'un seul point P ou Q. Sur D', on a la relation $\varphi=\tilde{\bar{\varphi}}$. En se rappelant que le produit extérieur de deux différentielles analytiques est nul ([8]) $(dF.\tilde{\bar{\varphi}}=0)$ on peut écrire les relations suivantes [application répétée de la formule (1.1)] :

$$(2.4.2)\qquad \begin{aligned}(dF,\varphi)_{D-V}&=\int_{D-V} dF\,\bar{\varphi}^\star=\int_{D'} F\bar{\varphi}^\star+\sum_{P_\nu}\int_{C_\nu} F\bar{\varphi}^\star\\ &=i\int_{D'} F\bar{\varphi}+\sum_{P_\nu} i\int_{C_\nu} F\bar{\varphi}=i\int_{D'} F\tilde{\bar{\varphi}}+i\sum_{P_\nu}\int_{C_\nu} F\bar{\varphi}\\ &=-i\sum_{Q_\nu}\int_{C_\nu} F\tilde{\bar{\varphi}}+i\sum_{P_\nu}\int_{C_\nu} F\bar{\varphi},\end{aligned}$$

les intégrales étant prises dans le sens direct par rapport à $D-V$ et les sommes étant étendues respectivement à toutes les courbes entourant les points (Q_ν) et les points (P_ν).

Faisons tendre r vers zéro ; nous dirons aussi que V parcourt une base $(r\to 0)$, $\mathcal{V}$, du filtre des voisinages de (P_ν, Q_ν) ; évaluons la limite d'une intégrale portant sur un chemin entourant un point P et sur un chemin entourant un point Q.

([8]) Si φ_1 et φ_2 sont deux différentielles analytiques, on a successivement

$$\varphi_1\varphi_2=\varphi_1^\star\varphi_2^\star=-\varphi_1\varphi_2.$$

Pour cela, supposons que le développement de F au voisinage de P et Q soit respectivement :

$$F = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots \quad \text{au voisinage de P,}$$
$$F = \beta_0 + \beta_1 z + \dots \quad \text{au voisinage de Q.}$$

D'autre part, soit

$$\varphi = \left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \frac{a_{-h+1}}{z^{h-1}} + \dots \right) dz \quad \text{au voisinage de P.}$$
$$\varphi = \left(\frac{b_{-k}}{\bar{z}^k} + \frac{b_{-k+1}}{\bar{z}^{k-1}} + \dots \right) d\bar{z} \text{ au voisinage de } \tilde{Q}.$$

Alors

$$\tilde{\bar{\varphi}} = \left(\frac{\bar{b}_{-k}}{z^k} + \frac{\bar{b}_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots \right) dz \quad \text{au voisinage de Q.}$$

On obtient facilement, en un point $P \in (P_\nu)$, la valeur conformément invariante :

$$\lim_{\nu} i \int_C F \bar{\varphi} = -2\pi \alpha_0 \bar{a}_{-1},$$

et en un point $Q \in (Q_\nu)$, la quantité proportionnelle au résidu de $F\tilde{\bar{\varphi}}$ et donc aussi conformément invariante :

$$\lim_{\nu} i \int_C F \tilde{\bar{\varphi}} = +2\pi(\beta_0 \bar{b}_{-1} + \beta_1 \bar{b}_{-2} + \dots + \beta_{k-1} \bar{b}_{-k}).$$

On voit donc qu'en général (φ quelconque), pour que $(dF, \varphi) = 0$, il faut et il suffit que les α_0 correspondant aux points (P_ν) et les $\beta_\mu (\mu = 0, \dots, k-1)$, correspondant aux points (Q_ν) soient nuls. Si un point P_ν se confond avec un point Q_ν, on a la même condition nécessaire et suffisante, à moins que $\bar{a}_{-1} + \bar{b}_{-1} = 0$, c'est-à-dire, à moins que les résidus de φ soient opposés aux deux points symétriques P_ν et $\tilde{Q}_\nu$. On peut donc énoncer les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 2.4.1. — *Une différentielle méromorphe de Schottky-Ahlfors multiple sur* $\hat{D}$ *d'un diviseur* $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, *d et* d_0 *ayant les formes* (2.4.1) *est orthogonale au sens principal à toute différentielle analytique exacte sur* $\overline{D}$, dF, *si* F *est multiple de* $[d_0, |d|]$. *Si de plus elle est de seconde espèce sur* $\overline{D}$, *il suffit que* F *soit multiple de* d_0.

PROPOSITION 2.4.2. — *Une différentielle méromorphe de Schottky-Ahlfors multiple sur* $\hat{D}$ *d'un diviseur* $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, *d et* d_0 *ayant les formes* (2.4.1), *dont* à chaque pôle de résidu non nul correspond un pôle symétrique de résidu opposé (9), *est orthogonale au sens principal à toute différentielle analytique exacte sur* $\overline{D}$, dF, *si* dF *est multiple de* d_0.

(9) Cette famille contient les différentielles méromorphes de Schottky–Ahlfors de deuxième espèce.

Le lemme 2 d'Ahlfors [1] est le cas particulier, $s=t=0$, où ces deux propositions sont identiques. Son lemme 3 est le cas particulier de la proposition 2.4.1 obtenu en faisant $s=0$.

2.5. Décomposition des différentielles méromorphes sur $\overline{D}$. — Je vais maintenant décomposer additivement toute différentielle méromorphe sur $\overline{D}$ en une différentielle méromorphe de Schottky-Ahlfors et en une différentielle analytique exacte sur $\overline{D}$.

Soit Φ une différentielle méromorphe sur $\overline{D}$, multiple d'un diviseur d^{-1}, d ayant la forme (2.4.1); appelons $\Gamma_a(d^{-1})$ l'espace ([10]) de ces différentielles; soit $m=\sum m_\nu$ l'ordre total de d. D'après la proposition 2.3, l'espace $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ des différentielles méromorphes de Schottky-Ahlfors multiples de $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, a $\hat{g}+(m+n)'$ dimensions complexes $\left[d_0 \text{ ayant la forme } (2.4.1) \text{ et } n=\sum n_\nu\right]$. A chaque différentielle de $\Gamma_a(d^{-1})$, je fais correspondre un vecteur de l'espace Σ_a à $\hat{g}-(m+n)'$ dimensions complexes dont les composantes sont :

1° les $\hat{g}$ périodes de Φ;

2° les m_ν premiers coefficients du développement ([11]) de Φ en P_ν et les $n_\nu-1$ premier coefficient de Φ en Q_ν [en un point $P_\nu\in(Q_\nu)$ on prend les $m_\nu+n_\nu-1$ premier coefficient de Φ] : s'il n'y a pas de point Q_ν, on prendra seulement les m_ν premiers coefficients de Φ en $P_\nu(\nu=2, 3, \ldots, s)$, et les m_1-1 premiers coefficients de Φ en P_1 ;

3° les $t-1$ nombres complexes égaux à $\int_{Q_1}^{Q_\nu}\Phi(\nu=2, 3, \ldots, t)$ [les intégrales sont prises sur des chemins bien déterminés ([12])]; si Q_ν est confondu avec P_ν, on prendra le terme constant du développement de $\int_{Q_1}^{z}\Phi$, $Q_1\notin(P_\nu)$, z voisin de Q_ν : si tous les Q_ν sont des points P_ν, on choisira un point Q_0 distinct de (P_ν) et l'on déterminera la constante c de façon que le terme constant du développement de $c+\int_{Q_0}^{z}\Phi$ soit nul pour z voisin de Q_1; les $t-1$ dernières composantes sont alors les $t-1$ coefficients constants des développements de $c+\int_{Q_0}^{z}\Phi$, z étant voisin de $Q_\nu(\nu=2, 3, \ldots, t)$.

On a ainsi une application linéaire de $\Gamma_a(d^{-1})$ dans Σ_a; de plus, comme application de $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ dans Σ_a elle est biunivoque car seul $\varphi=0$ correspond au

([10]) $\Gamma_{a,2}(d^{-1})$ désignera le sous-espace de $\Gamma_a(d^{-1})$ des différentielles de deuxième espèce.

([11]) Je suppose avoir choisi l'uniformisante locale en chaque point P_ν et Q_ν.

([12]) C'est sous-entendu pour chacune des intégrales que je suis amené à écrire dans la suite de ce numéro.

vecteur de composantes nulles : cette différentielle est en effet multiple ([13]) de $\tilde{d}_0^{-1}$ et elle est exacte sur $\overline{D}$, $\varphi = df$, f étant multiple de d_0; d'après la proposition 2.4.1 elle est donc orthogonale à elle-même, c'est-à-dire de norme nulle. Il y a donc isomorphisme de $\mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ dans Σ_a et comme les deux espaces ont même dimension, c'est un isomorphisme « sur » (Bourbaki [1]). On peut donc énoncer :

Proposition 2.5.1. — *Étant donné d_0 arbitraire, et d de la forme* (2.4.1) *l'espace vectoriel $\Gamma_a(d^{-1})$ est la somme directe de $\mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ et de l'espace des différentielles analytiques exactes sur* D, dF, F *multiple de d_0 (resp.* 1 *si* $t=0$, *ou* $t=s=0$).

On peut faire une autre décomposition en utilisant la proposition 2.4.2 : au lieu de Σ_a, on prend l'espace vectoriel Σ'_a à $\hat{g}+m+n-r$ dimensions complexes (r désigne le nombre total de points P_ν et Q_ν distincts), dont un vecteur a pour composantes les $\hat{g}$ périodes de Φ, les $m_\nu - 1$ premiers coefficients du développement de Φ en $P_\nu \notin (Q_\nu)$, les $n_\nu - 1$ premiers coefficients du développement de Φ en un point $Q_\nu \notin (P_\nu)$ et les $m_\nu + n_\nu - 1$ premiers coefficients du développement de Φ en un point $P_\nu \in (Q_\nu)$. Il y a alors (proposition 2.4.2) isomorphisme de Σ'_a sur le sous-espace $\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ des différentielles de $\mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ dont à chaque pôle de résidu non nul correspond un pôle symétrique de résidu opposé; $\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ a lui aussi $\hat{g}+m+n-r$ dimensions complexes. Ainsi :

Proposition 2.5.2. — *Étant donné d_0 arbitraire et d de la forme* (2.4.1), *l'espace vectoriel $\Gamma_a(d^{-1})$ est la somme directe de l'espace $\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ et de l'espace des différentielles analytiques de périodes nulles ([14]) multiples du diviseur $d_0[|d|, |d_0|]^{-1}$. L'espace vectoriel des différentielles méromorphes de deuxième espèce sur $\overline{D}$ multiples de d^{-1}, $\Gamma_{a,2}(d^{-1})$, est la somme directe de*

$$\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}) = \Gamma_{a,2}(d^{-1}) \cap \mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$$

et de l'espace des différentielles analytiques exactes multiples de d_0.

2.6. Propriété de minimum des composantes de Schottky Ahlfors. — Dans la décomposition que je viens de donner, on peut choisir d_0 de façon que les deux composantes soient orthogonales au sens principal et donc que l'on puisse appliquer les propositions 2.4. Dans le premier cas (propositions 2.4.1 et 2.5.1), on voit que pour avoir $[d_0, |d|] \subset d_0$, il faut et il suffit que d_0 ait au moins un zéro simple en chaque zéro de d. Dans le second cas (propositions 2.4.2

([13]) Si $d_0 = 1$ elle est régulière car elle ne peut avoir au plus qu'un pôle simple P_1, donc aucun (théorème des résidus).

([14]) Ce ne sont plus alors des différentielles exactes, mais seulement des différentielles à périodes nulles (distinction dans le cas des différentielles de troisième espèce). Elles sont exactes si $|d| \subset d_0$.

et 2.5.2), pour avoir $d_0' \subset d_0[|d|, |d_0|]^{-1}$, il faut que le second terme n'ait pas de pôle parce que le premier n'en a pas, donc que $|d_0|$ soit multiple de $|d|$: ainsi tout pôle de d^{-1} doit être au moins un pôle simple de d_0^{-1} ; la condition est également suffisante. Si la différentielle est de deuxième espèce, d_0 peut être choisi quelconque.

Dans la suite, quand je considérerai une différentielle méromorphe de troisième espèce sur $\overline{D}$, je supposerai toujours d_0 choisi de façon que d_0 soit multiple de $|d|$. C'est la condition simple qui dans tous les cas, comme nous venons de le voir, entraîne l'orthogonalité. Au contraire, dans le cas d'une différentielle de deuxième espèce, je ne ferai aucune hypothèse sur d. Je parlerai de *composante stricte* de Schottky-Ahlfors d'une différentielle méromorphe Φ donnée par l'une des propositions 2.5.1 et 2.5.2 quand j'aurai choisi $d_0 = |d|$ dans le cas où Φ est de troisième espèce et $d_0 = 1$ dans le cas où Φ est de deuxième espèce.

Il est important de souligner dès à présent que les composantes strictes de Schottky-Ahlfors dans $\mathfrak{S}_a'$ d'une différentielle Φ dans un domaine D sont définies par les parties singulières et les périodes de Φ dans D, puisqu'alors $n_\nu = 1$ dans le raisonnement de 2.5.

Il faut remarquer qu'une relation d'inclusion entre deux diviseurs $d_{0,1}$ et $d_{0,2}$ analogues à d_0 donné par (2.4.1), entraîne une propriété de transitivité entre les composantes de Schottky-Ahlfors correspondantes, φ_1 et φ_2, prises au sens de la proposition 2.5.1 ou 2.5.2 ([15]). Autrement dit :

Proposition 2.6.1. — *Si $d_{0,2}$ est multiple de $d_{0,1}$ la composante φ_1 de Schottky-Ahlfors de Φ dans $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_{0,1}^{-1})$ est aussi la composante dans $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_{0,1}^{-1})$ de la composante φ_2 de Φ dans $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_{0,2}^{-1})$ (même résultat avec $\mathfrak{S}_a'$).*

Les propriétés d'orthogonalité des composantes de différentielles sur $\overline{D}$ entraînent des propriétés de minimum de la norme des composantes de Schottky-Ahlfors. Parce que ces normes ne sont pas finies, il faut étudier le comportement des normes relatives à des domaines $D - V$ approchant D et ne contenant pas de singularité, quand $D - V$ tend vers D, $V = (|z| \leq r)$. On trouve alors qu'étant donné une différentielle sur $\overline{D}$ il existe un voisinage V de ses points singuliers tel que la norme dans $D - V$ de sa composante de Schottky-Ahlfors soit arbitrairement voisine ou inférieure à la norme dans $D - V$ de la différentielle envisagée.

En effet, soit Φ une différentielle méromorphe sur $\overline{D}$; soit φ sa composante de Schottky-Ahlfors (d_0 est choisi, je le rappelle, de façon que d_0 soit multiple

([15]) Dans la suite, sauf mention expresse, j'entendrai par composante de Schottky-Ahlfors une composante prise au sens de l'une ou l'autre de ces propositions, mais toujours la même, dans une suite de raisonnements liés entre eux.

de $|d|$ si Φ est de troisième espèce). A cause de l'orthogonalité au sens principal de φ et de $\Phi - \varphi$ on peut dire qu'étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe dans D un voisinage $W((P_\nu))$ des points singuliers (P_ν) de Φ, $(P_\nu \in D)$ tel que dans $D - V$, $V \subset W$:

$$(\varphi, \Phi - \varphi) = \varepsilon_\nu, \qquad (\Phi - \varphi, \varphi) = \bar{\varepsilon}_\nu, \qquad |\varepsilon_\nu| < \varepsilon).$$

Comme dans $D - V$:

$$\|\Phi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2\mathcal{R}(\varphi, \Phi - \varphi) + \|\Phi - \varphi\|^2$$

il en résulte les inégalités, dans $D - V$:

$$\|\Phi - \varphi\|^2 - 2\varepsilon < \|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2 < \|\Phi - \varphi\|^2 + 2\varepsilon.$$

Ainsi on en conclut d'abord que

$$\lim_{V \in \mathcal{V}} (\|\Phi\|^2_{D-V} - \|\varphi\|^2_{D-V}) \geqq 0, \tag{2.6.1}$$

$\mathcal{V}$ désignant une base $(r \to 0)$ du filtre des voisinages de (P_ν); en posant, pour simplifier :

$$\lim_{V \in \mathcal{V}} (\|\Phi\|^2_{D-V} - \|\varphi\|^2_{D-V}) = [\|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_D, \tag{2.6.2}$$

on voit ensuite que

$$\|\Phi - \varphi\|^2_D = [\|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_D. \tag{2.6.3}$$

Proposition 2.6.2. — *Les normes des composantes de Schottky-Ahlfors des différentielles de $\Gamma_a(d^{-1})$ sur un domaine compact, satisfont, par rapport aux normes de ces différentielles, à la propriété de minimum au sens principal représentée par* (2.6.1) *et à la relation* (2.6.3).

On voit que les composantes strictes de Φ au sens de la proposition (2.5.2) sont composantes de toutes les composantes de Φ. Leur norme satisfait donc à une propriété de minimum minimorum.

2.7. Approximation. — Je vais maintenant montrer que l'on peut choisir d_0 de façon que la composante de Schottky-Ahlfors d'une différentielle Φ de $\Gamma_a(d^{-1})$ soit aussi voisine que l'on veut de Φ, au sens des normes; il faut donc montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe d_0 tel que la différence $\Phi - \varphi$ de Φ et de sa composante de Schottky-Ahlfors ait une norme dans D inférieure à ε :

$$\|\Phi - \varphi\|^2 < \varepsilon.$$

Soit d'abord φ la composante de Schottky-Ahlfors de Φ dans $\mathfrak{S}_a(d^{-1} | \tilde{d}^{-1})$ [resp. $\mathfrak{S}'_a(d^{-1} | \tilde{d}^{-1})$]. $\Phi - \varphi$ est une différentielle exacte et de première espèce. On est ramené à montrer qu'on peut approcher une différentielle exacte et de première espèce dF sur $\bar{D}$ par une différentielle de Schottky-Ahlfors dont tous

les points singuliers sont sur $\tilde{D}$. Soit Q un point de D et k un entier positif; soit ψ_k la composante de Schottky-Ahlfors ([16]) de dF dans $\mathcal{S}_a(\tilde{Q}^{-k})$. On sait que (Ahlfors [1] et proposition 2.6.2) $\|\psi_k\|^2 \leq \|d\mathrm{F}\|^2$. Quand k augmente indéfiniment, la suite (ψ_k) de différentielles exactes sur D à norme bornée croissante ([17]) forme une suite de Cauchy au sens de la norme et converge donc en norme vers une différentielle ψ identique à dF (identité du développement en Q). Si k est suffisamment grand on a donc bien la propriété annoncée.

Proposition 2.7. — *L'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors* $\mathcal{S}_a(d^{-1}|\tilde{d}^{-1}|\tilde{Q}^{-k})$ $[ou\ \mathcal{S}'_a(d^{-1}|\tilde{d}^{-1}|\tilde{Q}^{-k})]$ $(k=0, 2, \ldots)$, *est dense dans* $\Gamma_a(d^{-1})$; *l'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors de deuxième espèce sur* D, $\mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{Q}^{-k})$ $[ou\ \mathcal{S}'_a(d^{-1}\widetilde{Q}^{-k})]$ *est dense dans* $\Gamma_{a,2}(d^{-1})$.

3. Différentielles méromorphes sur une surface ouverte.

3.1. Décomposition des différentielles méromorphes sur une surface ouverte. — Je vais considérer sur une surface ouverte S des différentielles méromorphes, c'est-à-dire à singularités polaires isolées, ou, ce qui revient au même, à singularités en nombre fini dans tout compact. En utilisant les résultats obtenus au paragraphe précédent on peut montrer, et c'est ce qui fera l'objet de ce numéro, qu'une telle différentielle se décompose additivement en une différentielle limite de différentielles de Schottky-Ahlfors correspondantes aux domaines d'une exhanstion de S, et en une différentielle exacte de première espèce et de norme finie sur S. Je vais d'abord établir deux propositions qui me seront utiles dans la suite.

Étant donné une différentielle méromorphe Φ sur S, de pôles (P_ν) d'ordre $m_\nu\left(=d\prod_\nu P_\nu^{m_\nu}\right)$, je parlerai de ses composantes de Schottky-Ahlfors strictes ou au sens d'un diviseur d_0 choisi sur S (plus simplement de ses composantes-d_0), sur un domaine compact D de S ou sur un ouvert composé d'un nombre fini de domaines compacts D_ν en entendant par là ses composantes dans l'espace $\mathcal{S}_\alpha(\hat{\partial}^{-1}\hat{\delta}_0^{-1})$ correspondant à D ou à chaque D_ν, δ et δ_0 indiquant les traces de d et d_0 dans D.

Le diviseur d_0 étant choisi sur S, l'inclusion de deux domaines A et B entraîne évidemment une propriété de transitivité entre les composantes-d_0 de Schottky-Ahlfors correspondantes :

Proposition 3.1.1. — *Si* $A \subset B$, *la composante-*d_0 *de* Φ *dans* A *est aussi la composante-*d_0 *de la composante-*d_0 *de* Φ *dans* B.

([16]) Comme il n'y a qu'un seul pôle $\mathcal{S}_a(\tilde{Q}^{-k}) = \mathcal{S}'_a(\tilde{Q}^{-k}) = \mathcal{S}_{a,2}(\tilde{Q}^{-k})$ (théorème des résidus).
([17]) ψ_k est la composante de ψ_{k+n} d'après la proposition 2.6.1.

Considérons deux domaines adjacents A et B, c'est-à-dire sans points intérieurs communs mais ayant en commun une partie l de leurs courbes frontières; soit C le domaine global $A \cup B \cup l$; soit α, β et γ les composantes-d_0 de Φ dans A, B et C. La propriété représentée par la relation (2.6.3) nous permet d'énoncer :

PROPOSITION 3.1.2. — *Les composantes* α, β *et* γ *de* Φ *sur trois domaines* A, B *et* C *satisfaisant à*

$$A \cap B = \overline{l} \qquad (l \neq 0), \qquad C = A \cup B \cup l,$$

sont telles que

$$\| \Phi - \alpha \|_A^2 + \| \Phi - \beta \|_B^2 - \| \Phi - \gamma \|_C^2 = \| \gamma - \alpha \|_A^2 + \| \gamma - \beta \|_B^2. \tag{3.1.1}$$

ce qui entraîne en particulier l'inégalité

$$\| \Phi - \alpha \|_A^2 + \| \Phi - \beta \|_B^2 \geq \| \Phi - \gamma \|_C^2. \tag{3.1.2}$$

En effet, d'après (2.6.3) et comme α et β sont aussi les composantes de γ, étant donné $\varepsilon > 0$ on peut trouver un voisinage V des singularités de Φ tel que les deux membres de (3.1.1) soient voisins d'ordre au plus égal à ε de la quantité [18]

$$\| \gamma \|_{C-V}^2 - \| \alpha \|_{B-V}^2 - \| \beta \|_{B-V}^2.$$

J'en viens maintenant à l'étude de la propriété annoncée au début de ce numéro. Considérons sur S une différentielle méromorphe Φ, de pôles (P_ν) d'ordre $m_\nu \left(d = \prod_\nu P_\nu^{m_\nu} \right)$. Soit (S_n) une exhaustion de S $\left[\overline{S}_{n-1} \subset S_n, (P_\nu) \cap S'_n = 0 \right]$; soit T_n les ouverts $S_n - \overline{S}_{n-1}$ $(T_1 = S_1)$. Je choisis dans chaque composante de chaque T_n un point $Q_{\mu,\nu}$ et un entier $k_{\mu,\nu} \left(d_0 = |d| \prod_{\mu,\nu} Q_{\mu,\nu}^{k_{\mu,\nu}} \right)$ si Φ est de troisième espèce, $d_0 = \prod Q_{\mu,\nu}^{k_{\mu,\nu}}$ si Φ est de deuxième espèce, tel que si 0_n désigne la composante-d_0 de Φ dans T_n on ait

$$\sum_n \| \Phi - 0_n \|_{T_n}^2 < \infty. \tag{3.1.3}$$

Ceci est possible car, d'après le résultat de 2.7, on peut choisir les $k_{\mu,\nu}$ suffisamment grands pour que chaque terme de cette série soit suffisamment petit.

J'appelle φ_n la composante-d_0 de Schottky-Ahlfors de Φ dans S_n et je vais montrer la convergence de la suite (φ_n). Pour cela je considère la suite des nombres positifs :

$$\Delta_n = \| \Phi - \varphi_n \|_{S_n}^2 + \sum_{n+1}^{\infty} \| \Phi - 0_\nu \|_{T_\nu}^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

---

[18] C'est-à-dire que le module de la différence d'un des membres de (3.1.1) et de cette quantité est inférieure à ε.

C'est une suite non croissante car la différence

$$\Delta_n - \Delta_{n+1} = \| \Phi - \varphi_n \|^2_{S_n} + \| \Phi - \theta_{n+1} \|^2_{\Gamma_{n+1}} - \| \Phi - \varphi_{n+1} \|^2_{S_{n+1}}.$$

est non négative d'après (3.1.2). Le premier terme Δ_1 est égal au premier membre (3.1.3), donc fini. La suite (Δ_n) est donc convergente vers un nombre Δ non négatif. La suite $(\| \Phi - \varphi_n \|^2_{S_n})$ converge également vers Δ car

$$\lim_n \sum_{n+1}^{\infty} \| \Phi - \theta_\nu \|^2_{\Gamma_\nu} = 0.$$

La suite (φ_n) forme une suite de Cauchy car, toujours en vertu des propositions 3.1.1 et 3.1.2, étant donné ε, on a à partir d'un n, quel que soit p :

$$(3.1.4) \qquad \| \varphi_{n+p} - \varphi_n \|_{S_n} \leq \Delta_n - \Delta_{n+p} \leq \Delta_n - \Delta < \varepsilon'.$$

(φ_i) converge donc uniformément au sens de la norme vers une différentielle φ, sur tout compact de S. Cette différentielle a évidemment les mêmes périodes et les mêmes parties singulières que Φ. Si $\Delta = 0$, $\Phi = \varphi$; si $\Delta \neq 0$ la différence $\Phi - \varphi$ est exacte, de première espèce et de norme finie égale à Δ. Nous avons donc bien le résultat annoncé.

Pour compléter ce résultat je démontrerai les relations

$$(3.1.5) \qquad \begin{aligned} \| \Phi - \varphi \|^2_S &= \lim_n \lim_U (\| \Phi \|^2_{S_n - U((P_\nu))} - \| \varphi \|^2_{S_n - U((P_\nu))}) s_n \\ &= \lim_U \lim_n (\| \varphi \|^2_{S_n - U((P_\nu))} - \| \varphi \|^2_{S_n - U((P_\nu))}) \end{aligned}$$

U désignant un voisinage des pôles (P_ν) parcourant une base convenable du filtre de ces voisinages. Dans ce but j'utiliserai le résultat auxiliaire suivant :

Lemme. — *Étant donné deux différentielles méromorphes* Φ *et* Ψ *ayant une même partie singulière en un point* P, *il existe une base* $\mathfrak{U}$ *du filtre des voisinages de* P *telle que*

$$\lim_{U \in \mathfrak{U}} [\| \Phi \|^2 - \| \Psi \|^2]^U = 0.$$

En effet, il existe W suffisamment petit pour que Φ et Ψ ait même composante stricte α dans W. Alors, on peut appliquer deux fois la formule (2.6.3) et l'on obtient dans $U \subset W$:

$$[\| \Phi \|^2 - \| \Psi \|^2]_U = \| \Phi - \alpha \|^2_U - \| \Psi - \alpha \|^2_U.$$

Si l'on prend pour $\mathfrak{U} = (U)$ l'ensemble des cercles $|z| \leq r < 1$, W suffisamment petit étant le cercle $|z| \leq 1$, α est la composante stricte de Φ et Ψ dans tous ces U, c'est la partie singulière du développement de Φ et Ψ en P. Il est clair alors que, $\Phi - \alpha$ et $\Psi - \alpha$ étant les parties régulières de ces développements, ont une norme d'autant plus petite que r est petit. Ce qui démontre le lemme.

J'en viens maintenant à la démonstration de la relation (3.1.5). Les inégalités (3.1.4) montrent que

$$\lim_n [\,\|\varphi\|^2 - \|\varphi_n\|^2]_{S_n} = \lim_n \|\varphi - \varphi_n\|^2_{S_n} = 0. \tag{3.1.6}$$

Avec les inégalités triangulaires écrites dans S_n :

$$\|\Phi - \varphi_n\| - \|\varphi - \varphi_n\| \leq \|\Phi - \varphi\| \leq \|\Phi - \varphi_n\| + \|\varphi - \varphi_n\|,$$

nous avons donc

$$\lim_n \|\Phi - \varphi\|^2_{S_n} = \lim_n \|\Phi - \varphi_n\|^2_{S_n}.$$

Mais la norme du deuxième membre peut encore s'écrire en utilisant de nouveau la proposition 3.1.2 et la relation (3.1.6) :

$$\lim_n [\,\|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 - \|\varphi_n\|^2]_{S_n} = \lim_n [\,\|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_{S_n}.$$

Ceci démontre la première relation (3.1.5). Pour démontrer la seconde, il ne reste plus qu'à montrer qu'on peut définir un voisinage U qui permette d'intervertir les signes $\lim_n$ et [ ]. En chaque point P_ν je choisis un voisinage W et une base $\mathfrak{U}$ tels que (lemme précédent), étant donné ε, dès que $U \in \mathfrak{U}$ et $U \subset W$:

$$[\,\|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_{U(P_\nu)} = \eta_\nu(U),$$

$$\sum \eta_\nu = \eta, \qquad |\eta| < \varepsilon, \qquad \lim_{\mathfrak{U}} \eta_\nu = \lim_{\mathfrak{U}} \eta = 0,$$

On peut donc écrire, la somme étant étendue aux $P_\nu \in S_n$, $U = U((P_\nu))$:

$$[\,\|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_{S_n} = \|\Phi\|^2_{S_n - U} - \|\varphi\|^2_{S_n - U} + \sum_{S_n} \eta_\nu.$$

En prenant alors la $\lim_n$:

$$\lim_n [\,\|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_{S_n} = \lim_n (\,\|\Phi\|^2_{S_n - U} - \|\varphi\|^2_{S_n - U}) + \eta.$$

En faisant parcourir à U le filtre $\mathfrak{U}(\eta \to 0)$, on a bien la deuxième relation (3.1.5).

Je résume les résultats obtenus par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Étant donné, sur une surface de Riemann ouverte* S, *une différentielle méromorphe* Φ *on peut définir sur* S *un diviseur* d_0 *de façon que* Φ *soit égal, à une différentielle analytique exacte de première espèce et de norme finie près, à la limite* φ *de ses composantes-*d_0 *relatives aux domaines* S_n *d'une exhaustion de* S. *La norme de la différence* $\Phi - \varphi$ *est donnée par* (3.1.5).

3.2. L'ESPACE DES DIFFÉRENTIELLES MÉROMORPHES $\mathcal{D}_a$ SUR UNE SURFACE DE RIEMANN OUVERTE. — Le résultat du numéro précédent fait apparaître une classe particu-

lière de différentielles, à savoir celles pour lesquelles la condition (3.1.3) est remplie sans qu'il soit nécessaire d'introduire des points $Q_{\mu,\nu}$. On peut prendre plus généralement comme définition :

DÉFINITION 3.2.1. — *$\mathcal{D}_a$ (resp. $\mathcal{D}'_a$) est l'espace des différentielles méromorphes Φ pour lesquelles il existe un domaine* D *contenant les pôles, dont chaque composante connexe est compacte, tel que,* φ *désignant la composante stricte dans* D *au sens de la proposition* 2.5.1 (*resp.* 2.5.2), *on ait*

$$\|\Phi\|^2_{S-D} + \|\Phi - \varphi\|^2_D < \infty. \tag{3.2.1}$$

Ces différentielles satisfont bien à une condition (3.1.3) pour $k_{\mu,\nu} = 0$: il suffit de prendre une exhaustion (S_n) telle que $S'_n \cap D = 0$; dans chaque T_n on a l'inégalité qui découle des propositions 3.1.1 et 3.1.2 :

$$\|\Phi - \theta_n\|^2 < \|\Phi\|^2_{T_n - D} + \|\Phi - \varphi\|^2_{D \cap T_n}.$$

ce qui montre bien que (3.2.1) entraîne (3.1.3).

On voit que cette classe $\mathcal{D}_a$ contient celle de Nevannlina [1] définie, dans le cas où Φ a seulement un nombre fini de pôles, par la propriété d'avoir une norme finie à l'extérieur d'un compact contenant les pôles.

Toutefois il n'est pas certain que la somme de deux différentielles de $\mathcal{D}_a$ (ou de $\mathcal{D}'_a$) soit encore une différentielle de $\mathcal{D}_a$ (ou $\mathcal{D}'_a$) car leur définition dépend de domaines qui peuvent avoir des points intérieurs en communs ce qui ne permet pas d'appliquer la proposition 3.1.2. Autrement dit, il n'est pas certain que $\mathcal{D}_a$ (ou $\mathcal{D}'_a$) forme un espace vectoriel. Ceci me conduit à définir une sous-classe de la classe précédente, qui soit effectivement un espace vectoriel.

Comme une surface de Riemann S est un espace localement compact, elle est uniformisable (Bourbaki [2]). Je choisis une structure uniforme dont le filtre des entourages $\mathfrak{U}$ a la propriété suivante : il existe un entourage $U^* \in \mathfrak{U}$ tel que le voisinage U^* de tout point de S soit compact. On peut toujours définir de telles structures; par exemple, si $f(P)$ désigne la fonction réelle sur S égale à $x_n + n$ dans $S_{n+1} - \overline{S}_n$ (x_n désignant la fonction harmonique dans $S_{n+1} - \overline{S}_n$, égale à zéro sur S'_n et à 1 sur S'_{n+1}, x_0 continue et inférieure à 1 dans S_1, $x_0 = 1$ sur S'_1), on peut prendre la structure définie par l'écart $g(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$ (Bourbaki [3]). Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des applications de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{U}$ qui : 1° conservent la relation d'inclusion entre entourages; 2° fassent correspondre un entourage symétrique à un entourage symétrique; 3° fassent correspondre une base de $\mathfrak{U}$ à une base de $\mathfrak{U}$ (19).

(19) Une surface de Riemann étant un espace localement compact à base dénombrable, une telle structure uniforme sera définie en général par une métrique $ds = \lambda\,|dz|$. La donnée de l'application $A \in \mathfrak{A}$ équivaut alors à celle d'une application croissante f telle que $\lim_{r \to 0} f(r) = 0$. L'existence de U^* est alors une conséquence de la condition plus forte suivante : la longueur de toute courbe non compacte est infinie.

Soit Φ une différentielle méromorphe de pôles (P_ν). Soit φ la composante stricte de Φ dans $U((P_\nu))$, donnée par l'une des propositions 2.5. Je pose alors la définition suivante :

DÉFINITION 3.2.2. — *$\mathcal{O}_a^{\mathfrak{U}}$ (resp. $\mathcal{O}_a'^{\mathfrak{U}}$) est le sous-espace des différentielles méromorphes de $\mathcal{O}_a$ (resp. $\mathcal{O}_a'$), Φ, pour lesquelles il existe un entourage U_0 de la structure uniforme définie sur S et une application $A \in \mathfrak{A}$ tels que pour tout entourage $U \subset U_0$:*

1° *deux points de S appartenant à une composante connexe quelconque de $U((P_\nu))$ sont au moins voisins d'ordre $A(U) \subset U^*$;*

2° *Φ et φ satisfont à la relation*

$$\| \Phi \|^2_{S-U((P_\nu))} + \| \Phi - \varphi \|^2_{\dot{U}((P_\nu))} < \infty. \tag{3.2.2}$$

Il faut remarquer ici la relation d'inclusion $\mathcal{O}_a'^{\mathfrak{U}} \subset \mathcal{O}_a^{\mathfrak{U}}$ qui découle des propriétés de minimum signalées au n° 2.6.

Il est bien évident que (3.2.2) entraîne une condition (3.1.3) de la même manière que (3.2.1). Montrons maintenant qu'étant donné une structure uniforme la somme de deux différentielles Φ et Ψ appartenant à $\mathcal{O}_a'^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{O}_a^{\mathfrak{U}}$) est encore une différentielle de $\mathcal{O}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{O}_a'^{\mathfrak{U}}$). Soit (P_ν), U_0 et A, (Q_ν), V_0 et B les points singuliers, l'entourage et l'application utilisés dans la définition 3.2.2 et correspondant respectivement à Φ et Ψ. Cherchons à déterminer W_0 et C correspondant à $\Phi + \Psi$.

Un point P_ν est au plus voisin d'ordre W_0 de la frontière de la composante connexe de $W_0((P_\nu))$ qui le contient. Les composantes connexes de $W_0((Q_\nu))$ ont un diamètre au plus égal à $B(W_0)$ [c'est-à-dire que deux quelconques de leurs points sont au moins voisins d'ordre $B(W_0)$]. Ainsi, pour que la composante connexe de $W_0((P_\nu, Q_\nu))$ soit intérieure à la composante connexe de $U_0((P_\nu))$, il suffit de choisir W_0 tel que

$$\overline{W_0 \circ B(W_0)} \subset U_0,$$

ce qui est possible parce que B applique une base sur une base. Alors, à tout $W \subset W_0$, parcourant $\mathfrak{U}$, correspond $U \subset U_0$, $U = W \circ B(W)$, parcourant $\mathfrak{U}$, et la composante connexe de $W((P_\nu, Q_\nu))$ est contenue dans $U((P_\nu))$; elle a par suite un diamètre inférieur à $A(U)$: pour $C(W)$ on peut prendre l'application $A(U(W))$.

Il reste à voir qu'on a bien une relation analogue à (3.2.2) pour $\Phi + \Psi$. Or, toujours à l'aide des propositions 3.1.1 et 3.1.2, on peut montrer que la deuxième condition de la définition 3.2.2 entraîne

$$\| \Phi \|^2_{S-V} + \| \Phi - \varphi \|^2_{\dot{V}} < \infty,$$

pour toute différentielle, $\Phi \in \mathcal{O}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{O}_a'^{\mathfrak{U}}$), si V contient $U((P_\nu))$ et désigne un domaine dont toutes les composantes connexes soient compactes; φ désigne

ici la composante stricte de Φ dans V. Ainsi, en prenant $V = W_0((P_\nu, Q_\nu))$, on a

$$\| \Phi + \Psi \|^2_{S-V} + \| \Phi + \Psi - \varphi - \psi \|^2_{\hat{V}} \leq \| \Phi \|^2_{S-V} + \| \Psi \|^2_{S-V} + \| \Phi - \varphi \|^2_{\hat{V}} + \| \Psi - \psi \|^2_{\hat{V}};$$

ceci constitue la relation cherchée car, ψ désignant la composante stricte de Ψ dans V, $\varphi + \psi$ est la composante stricte de $\Phi + \Psi$ dans V.

Remarque. — La définition des classes $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ et $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$ dépend donc de la structure uniforme choisie sur S. Si l'on a deux structures uniformes comparables définies sur S, de filtre d'entourages $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$, et si $\mathfrak{U}_1$ est plus fin que $\mathfrak{U}_2$, les espaces $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}_1}$ et $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}_2}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}_1}$ et $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}_2}$) satisfont à la relation d'inclusion :

$$\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}_1} \subset \mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}_2} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}_1} \subset \mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}_2};$$

en effet, comme $\mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_1$, une propriété vraie pour tous les ensembles de $\mathfrak{U}_1$ l'est également pour tous les ensembles de $\mathfrak{U}_2$. On en déduit que si deux différentielles Φ et Ψ appartiennent aux espaces $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$) relatifs à deux structures comparables, leur somme appartient à l'espace $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$) relatif à la structure la moins fine.

Les sous-espaces de $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ et $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$ des différentielles de deuxième espèce sont identiques.

Il est très vraisemblable qu'étant donné une différentielle appartenant à l'espace $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$) relatif à une structure $\mathfrak{U}_1$, on peut définir $\mathfrak{U}_2$ suffisamment fine pour que Φ n'appartienne pas à $D_a^{\mathfrak{U}_2}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}_2}$) : on peut en effet toujours construire un voisinage des singularités de Φ tel que la norme de Φ à l'extérieur de ce voisinage ne soit pas finie ([20]). Inversement, on voit qu'il existe des différentielles à un nombre fini de singularités, dans S, qui n'appartiennent à aucun espace $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$) : dans ce cas la définition de ces espaces est indépendante de la structure uniforme introduite sur S. Ceci laisse penser qu'il existe aussi toujours des différentielles à une infinité de singularités, qui n'appartiennent à aucun espace $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$), quelle que soit la structure uniforme qu'on introduise sur S.

3.3. Exemple de différentielle de $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$. — Pour fixer les idées, je vais donner un exemple très simple de différentielle appartenant à $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$. Comme surface de Riemann S, je prendrai le plan complexe pointé à l'infini. Comme structure uniforme, je choisirai celle qui est définie naturellement par la distance euclidienne (métrique $ds = |dz|$) ; l'ensemble des ensembles U^s de couples de points dont la distance est inférieure ou égale à s (s positif) constitue un système

([20]) C'est M. Ahlfors qui me l'a fait observer au cours d'une conversation que j'ai eue avec lui en 1952. Cette remarque est à l'origine des considérations de structure uniforme qui figurent dans ce numéro et qui rectifient une incorrection de ma Note*. Je dois à M. Parreau d'avoir approfondi la question dans ce sens.

fondamental d'entourages de cette structure. Soit $z = 0, 1, \ldots, N, \ldots$ l'ensemble des points (P_ν) et soit Φ la différentielle définie par

$$\Phi = \sum_0^\infty \frac{B_N}{(z-N)^2}\, dz;$$

elle est analytique à l'extérieur de (N) si $|B_N| < 1$, par exemple. Le carré de la norme de $\frac{B\,dz}{z^2}$, à l'extérieur du cercle de rayon r, est égale à $\frac{2\pi|B|^2}{r^2}$. Le carré de la norme de Φ à l'extérieur des cercles de rayon $r < \frac{1}{2}$, centrés aux points (N), est donc inférieur à

$$\|\Phi\|^2_{S-U^r((N))} < \frac{2\pi}{r^2} \sum_0^\infty |B_N|^2.$$

D'autre part, le développement de Φ au voisinage de $z = N$ est

$$\Phi = dz\left[\frac{B_N}{(z-N)^2} + \sum_0^{\infty\,\prime} \frac{B_\nu}{(\nu-N)^2} + \ldots + (n+1)(z-N)^n \sum_0^{\infty\,\prime} \frac{B_\nu}{(\nu-N)^{n+2}} + \ldots\right].$$

l'accent $'$ indiquant qu'il faut omettre le terme $\nu = N$ dans la somme. La composante stricte de Schottky-Ahlfors de Φ (au sens de 2.5.2), dans le domaine $|z-N| < r < \frac{1}{2}$ est évidemment $\varphi = \frac{B_N}{(z-N)^2}\, dz$; la norme de $\Phi - \varphi$ dans ce domaine satisfait à l'inégalité

$$\|\Phi - \varphi\|^2_{|z-N|<r} \leqq 2\pi \sum_0^\infty n(n+1)^2 r^{2n} \sum_0^{\infty\,\prime} \frac{|B_\nu|^2}{(\nu-N)^{2(n+2)}}.$$

La norme de $\Phi - \varphi$ dans $U^r((N))$ satisfait alors à l'inégalité

$$\|\Phi - \varphi\|^2_{U^r((N))} \leqq 4\pi \sum_1^\infty n(n+1)^2 r^{2n} k_n B,$$

$$k_n = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2(r+2)}}, \qquad B = \sum_0^\infty |B_\nu|^2.$$

Ainsi on voit que Φ appartient à $\mathcal{O}_a^{\prime qu}$ si $\sum |B_\nu|^2 < \infty$. Ici U_0 peut être pris égal à $U^{\frac{1}{2}}$ et est formé de cercles de rayon $\frac{1}{2}$ centrés aux points (N); A est l'application qui représente U^s sur U^{2s}.

Je soulignerai encore que l'introduction de l'application A permet la présence d'une forte densité de singularités : on peut, par exemple, avoir un nombre arbitrairement grand de points singuliers voisins d'un ordre donné. Dans l'exemple précédent, on peut ajouter aux points (N) les points $\left(2N + \frac{1}{4},\right.$

$2N+\frac{1}{4^n}, \cdots, 2N+\frac{3}{4^N}\Big)$. Les composantes connexes de $U^{\varepsilon}((P_\nu))$, $\frac{1}{4^{n+1}}<\varepsilon<\frac{1}{4^n}$ ont alors un diamètre inférieur à $U^{6\varepsilon}$ car les plus grandes contiennent vers leur extrémité gauche le point $2N$ et vers leur extrémité droite le point $2N+\frac{1}{4^n}$. Ces composantes contiennent un nombre arbitrairement grand de singularités. L'application A serait dans ce cas celle qui fait passer de U^{ε} à $U^{6\varepsilon}$.

3.4. Propriétés des différentielles de $\mathcal{D}_a$ sur les surfaces de la classe C_{AD}. — Le théorème 3.1 appliqué aux différentielles de la classe $\mathcal{D}_a$ ou $\mathcal{D}'_a$ sur une surface de Riemann où toute différentielle analytique exacte de première espèce et de norme finie est nulle ([21]), donne alors :

Proposition 3.4. — *Sur une surface de Riemann* $S\in C_{AD}$, *toute différentielle* $\Phi\in\mathcal{D}_a$ (*ou* $\mathcal{D}'_a$) *est la limite uniforme, dans tout compact, de ses composantes strictes de Schottky-Ahlfors correspondant aux domaines* S_n *d'une exhaustion convenable de* S; *les composantes strictes dans* $\mathcal{S}_n$ *ont au plus des pôles simples sur* S_i *en des points symétriques de leurs pôles sur* $\tilde{S_n}$; *les composantes strictes dans* $\mathcal{S}'_n$ *ont en plus des résidus opposés en deux pôles symétriques sur* $\hat{S}_n$ *et sont définies par les parties singulières et les périodes de* Φ.

Comme conséquence directe de cette proposition, on obtient finalement le théorème d'unicité suivant :

Théorème 3.4. — *Les différentielles de* $\mathcal{D}'_a$ *sont déterminées* ([22]) *par leurs périodes et leurs parties singulières sur une surface de Riemann* $S\in C_{AD}$.

En effet dans chaque domaine d'approximaiton les composantes de Schottky-Ahlfors dans $\mathcal{S}'_a$ sont définies par les parties singulières et les périodes (*voir* p. 257) et leur limite est donc déterminée sur la surface entière.

Ce théorème d'unicité semble être assez important car il étend directement aux différentielles de $\mathcal{D}'_a$, sur les surfaces ouvertes de C_{AD}, la propriété des intégrales abéliennes sur les surfaces closes, d'être déterminées par leurs parties singulières et leurs périodes.

Je terminerai ce chapitre en remarquant que la méthode suivie pourra peut-être donner des résultats au sujet de l'existence de différentielles de la classe $\mathcal{D}'_a$, par exemple, à partir de périodes et de parties singulières données. Mais c'est là un problème différent pour lequel il faudrait d'abord se placer dans le cas simple des différentielles de première espèce, cas qui ne semble pas avoir été abordé jusqu'à présent.

([21]) La classe de ces surfaces est désignée suivant les auteurs par C_{AD}(Parreau*), N_2(Ahlfors [1]) ou N_{AD}(Sario [1]).

([22]) Je dis que A est déterminé par B s'il existe au plus un A ayant la propriété B. S'il existe un A et un seul ayant la propriété B, je dis que A est défini par B.

CHAPITRE II.

Différentielles harmoniques a singularités polaires et leur intégrale de Dirichlet.

Dans ce chapitre je vais appliquer la même méthode qu'au premier chapitre à l'étude de différentielles harmoniques à singularités polaires isolées. Bien des résultats s'obtiennent par une démonstration tout à fait analogue et je me bornerai à signaler le fait sans entrer dans les détails. Au contraire, l'énoncé des résultats présente par rapport à ceux du premier chapitre plus de complexité : cela vient du fait qu'une différentielle harmonique est la somme d'une différentielle analytique et de l'imaginaire conjuguée d'une différentielle analytique. Bien des résultats seront d'ailleurs établis pour une classe de différentielles fermées beaucoup plus étendue que la classe des différentielles harmoniques.

Au lieu de considérer les différentielles harmoniques complexes introduites au chapitre I je me placerai toujours dans le cas de différentielles réelles : cela ne restreint pas la généralité et est plus conforme à l'habitude de considérer des fonctions harmoniques réelles ([23]).

1. Différentielles fermées et harmoniques sur des domaines compacts.

1.1. Développement et décomposition des différentielles harmoniques de Schottky-Ahlfors. — A partir d'une différentielle harmonique $\omega = a\,dx + b\,dy$ et de sa différentielle adjointe $\omega^* = -b\,dx + a\,dy$ on peut former la différentielle analytique $\varphi = \omega + i\omega^*$. On peut donc écrire :

$$\omega = \frac{1}{2}(\varphi + \overline{\varphi}), \qquad \omega^* = \frac{1}{2i}(\varphi - \overline{\varphi}). \tag{1.1.1}$$

Cette décomposition additive de ω en différentielle analytique et en imaginaire conjuguée de différentielle analytique est unique.

On peut écrire le développement de ω au voisinage d'un point $P(z=0)$ suivant les puissances de l'uniformisante locale z :

$$\begin{aligned}\omega = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \frac{a_{-h+1}}{z^{h-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots\right) dz \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{a}_{-h}}{\overline{z}^h} + \frac{\overline{a}_{-h+1}}{\overline{z}^{h-1}} + \ldots + \frac{\overline{a}_{-1}}{\overline{z}} + \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \ldots\right) d\overline{z}\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

([23]) Je rappelle qu'Ahlfors [1], au contraire, considère les différentielles harmoniques complexes : dans le cas des différentielles de première espèce la distinction entraîne moins de complication d'écriture.

L'ordre de ω sera celui de sa partie analytique φ; ω est régulière au voisinage de P si h est non positif. Je dirai que ω est de deuxième espèce si $a_{-1}=0$ en tout point singulier, de troisième espèce dans le cas général où il y a des points singuliers avec $a_{-1}\neq 0$.

On peut parler de la période d'une différentielle harmonique ω de deuxième espèce par rapport à des cycles d'une même classe d'homologie, ou de la période d'une différentielle de troisième espèce par rapport à un cycle bien déterminé : elles sont définies à l'aide de (1.1.1) par les périodes correspondantes de φ.

Les différentielles harmoniques de deuxième et de troisième espèce sur une surface de Schottky $\hat{D}$ seront de nouveau appelées différentielles de Schottky-Ahlfors. A partir d'une telle différentielle ω on peut former une autre différentielle harmonique sur $\hat{D}$, à savoir $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega}=\frac{1}{2}(\tilde{\varphi}+\tilde{\bar{\varphi}})=\frac{1}{2}(\varphi^r-\varphi^i)+\frac{1}{2}(\bar{\varphi}^r-\bar{\varphi}^i), \tag{1.1.3}$$

On voit que le développement de $\tilde{\omega}$ en $\tilde{P}$, $\bar{z}$ étant pris comme uniformisante locale, est encore égal au développement (1.1.2).

A l'aide de $\tilde{\omega}$ on peut former une décomposition additive de ω en différentielles harmoniques ayant des propriétés remarquables sur D' :

$$\omega=\frac{\omega+\tilde{\omega}}{2}+\frac{\omega-\tilde{\omega}}{2}=\frac{i}{2}(\varphi^r-\bar{\varphi}^r)^\star+\frac{1}{2}(\varphi^i+\bar{\varphi}^i). \tag{1.1.4}$$

La première composante $\frac{\omega+\tilde{\omega}}{2}=\frac{1}{2}(\varphi^r+\bar{\varphi}^r)=\frac{i}{2}(\varphi^r-\bar{\varphi}^r)^\star$ est la différentielle harmonique conjuguée de $\frac{i}{2}\varphi^r-\bar{\varphi}^r)$ qui est nulle sur D'; la seconde $\frac{\omega-\tilde{\omega}}{2}=-\frac{1}{2}(\varphi^i+\bar{\varphi}^i)$ est nulle sur D'. La décomposition en question est unique. En effet, soit $\mathfrak{S}_0$ la classe des différentielles ω nulles sur D', $\mathfrak{S}_0^\star$ celle des adjointes des précédentes. On peut encore dire que $\mathfrak{S}_0$ est définie par la propriété $\tilde{\omega}=-\omega$, et $\mathfrak{S}_0^\star$ par la propriété $\tilde{\omega}=\omega$. Il en résulte que $\mathfrak{S}_0\cap\mathfrak{S}_0^\star=(0)$, donc que la somme $\mathfrak{S}_0+\mathfrak{S}_0^\star$ est directe; cette somme est égale à $\mathfrak{S}_h$ espace des différentielles de Schottky-Ahlfors harmoniques. D'autre part, si $\omega\in\mathfrak{S}_0$, $\varphi=\omega+i\omega^\star\in\mathfrak{S}_i$ et si $\omega\in\mathfrak{S}_0^\star$, $\varphi\in\mathfrak{S}_r$. La correspondance entre $\mathfrak{S}_h$ et $\mathfrak{S}_a$ définie par $\omega\to\omega+i\omega^\star$, qui est biunivoque puisque réciproquement $\varphi\to\frac{1}{2}(\varphi+\bar{\varphi})$, applique donc $\mathfrak{S}_0$ sur $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_0^\star$ sur $\mathfrak{S}_r$. La proposition (2.2.1) du chapitre I se traduit donc par :

Proposition 1.1.1. — *Sur le corps des nombres réels l'espace vectoriel $\mathfrak{S}_h$ est la somme directe des sous-espaces $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_0^\star$.*

Je dirai qu'une différentielle harmonique ω est multiple d'un diviseur d si sa partie analytique est multiple de ce diviseur.

En désignant par $\mathfrak{S}_h(\hat{\delta}^{-1})$ l'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors harmoniques multiples de $\hat{\delta}^{-1}$ on a, dans les mêmes conditions que pour la proposition 2.3 du chapitre I :

PROPOSITION 1.1.2. — *L'espace* $\mathfrak{S}_h(\hat{\delta}^{-1})$ *a* $2(\hat{g}+m')$ *dimensions réelles. L'espace* $\mathfrak{S}_0(\hat{\delta}^{-1})$ *a* $\hat{g}+(2n)'$ *dimensions réelles,* $2n$ *étant l'ordre total de* $[\delta, \tilde{\delta}]$

Pour les espaces $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_0^*$ on a d'autre part les propriétés d'existence suivantes :

PROPOSITION 1.1.3. — *Étant donné des parties singulières en des points de* D, *et des périodes réelles* (*nulles sur les homologues des composantes de* D′) *et des demi-périodes réelles le long de cycles et demi-cycles de* D (*resp. des périodes réelles et des demi-périodes nulles*), *il existe une et une seule différentielle de* $\mathfrak{S}_0$ (*resp.* $\mathfrak{S}_0^*$) *ayant ces parties singulières, ces périodes et demi-périodes, si et seulement si la somme des résidus des parties analytiques des parties singulières données est réelle* (*resp. imaginaire pure*).

En effet s'il existe une telle différentielle $\omega \in \mathfrak{S}_0$ (resp. $\mathfrak{S}_0^*$) elle satisfait à $\omega = -\tilde{\omega}$ (resp. $\omega = \tilde{\omega}$). Ainsi le long d'un chemin $\tilde{C}$ symétrique de C, on a

$$\int_{\tilde{C}} \omega = -\int_C \omega \quad \left(\text{resp.} \int_{\tilde{C}} \omega = \int_C \omega\right).$$

Ce qui indique que les périodes sont opposées (resp. égales) sur deux cycles symétriques intérieurs à D et $\tilde{D}$, que les périodes sur des cycles conjugués aux composantes de D′ sont égales au double des demi-périodes correspondantes (resp. nulles). D'autre part le résidu en $\tilde{P}$ de la partie analytique de ω est $-\bar{a}_{-1}$ (resp. $+\bar{a}_{-1}$) si en P il est a_{-1}. On voit donc que la condition de la proposition revient à annuler la somme des résidus de la partie analytique de ω sur $\hat{D}$. Cette condition étant réalisée on sait qu'il existe une et une seule différentielle méromorphe φ (resp. $i\varphi$) ayant ces parties singulières et ces parties réelles de ses périodes sur $\hat{D}$. La proposition est ainsi démontrée.

1.2. DIFFÉRENTIELLE FERMÉES d_0-HARMONIQUES, d^{-1}-POLAIRES. — Il est intéressant pour la suite de généraliser la notion de développement d'une différentielle harmonique en un point, à certaines différentielles fermées. Considérons à partir de maintenant uniquement des différentielles ω fermées, réelles et dont les coefficients a et b de $\omega = a\,dx + b\,dy$, sont des fonctions indéfiniment dérivables en x et y ([24]).

Je dirai qu'une différentielle fermée ω est *multiple* de P^k ($k > 0$), si a et b ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$ s'annulent en P. Je dirai que ω est P^k-*harmonique* s'il existe dans le voisinage de P une différentielle

([24]) *Voir* par exemple de Rham et Kodaïra*.

harmonique γ telle que $\omega - \gamma$ soit multiple de P^k. Je dirai que ω est P^{-k}-*polaire* s'il existe, dans un voisinage de P, une différentielle harmonique γ ayant une singularité d'ordre k en P, telle que $\omega - \gamma$ soit régulière en P.

Il découle de ces définitions que si ω, en un point P, est P^{-k}-polaire et P^h-harmonique, on peut parler des $h+k$ premiers coefficients de la partie analytique de ω en P : ce sont les $h+k$ premiers coefficients bien déterminés de la partie analytique de γ telle que $\omega - \gamma$ soit multiple de P^h.

De façon générale, sur un domaine D ou sur une surface S, je parlerai de différentielles fermées d_0-harmoniques et d^{-1}-polaires si d et d_0 sont deux diviseurs à exposants positifs : en chaque point P de d et Q de d_0 d'exposant h et k, ω est P^{-h}-polaire et Q^k-harmonique.

On dira que ω est de deuxième espèce si la différentielle harmonique γ correspondant à chacune de ses singularités a un résidu nul; en général, s'il y a des résidus non nuls, la différentielle est dite de troisième espèce.

Une différentielle fermée à singularités polaires, de deuxième espèce à l'intérieur d'un compact D a une intégrale nulle sur le bord de D $\left(\int_{D'} \omega = 0\right)$. Si elle est de troisième espèce, l'intégrale en question est la partie réelle du produit par $2i\pi$ de la somme des résidus des $\gamma + i\gamma^*$ relatifs aux pôles intérieurs à D. On obtient ces propriétés en appliquant la formule de Cauchy-Green à un compact D, comme nous l'avons fait au chapitre I pour les différentielles méromorphes (l'intégrale d'une différentielle fermée régulière, prise sur le bord d'un compact, est nulle). On pourra ainsi parler d'une période d'une différentielle fermée à singularités polaires de deuxième espèce par rapport à une classe d'homologie de cycles. Au contraire quand nous parlerons des périodes d'une différentielle fermée de troisième espèce, nous supposerons implicitement avoir choisi des cycles bien déterminés.

Comme l'adjointe ω^* d'une différentielle ω multiple de P^k est aussi multiple de P^k, la propriété de ω d'être d_0-harmonique et d^{-1}-polaire se reporte sur ω^*.

1.3. Décomposition des différentielles fermées sur un domaine $\overline{D}$. — Avant d'aborder la décomposition des différentielles fermées à singularités polaires isolées sur un domaine compact D, je vais signaler les propriétés d'orthogonalité — au sens du produit scalaire principal sur D — qu'il est important de considérer dans ce cas. Je vais chercher dans quelles conditions une différentielle harmonique de Schottky-Ahlfors ω représentée par (1.1.4) est orthogonale au sens principal à une différentielle fermée exacte dU de première espèce.

Comme les différentielles harmoniques exactes dU correspondent à une classe plus étendue de différentielles analytiques que les différentielles analytiques exactes considérées au chapitre I, il faut s'attendre à ce que les différentielles de Schottky-Ahlfors qui leurs sont orthogonales appartiennent

à une sous-classe de $\mathcal{S}_h$: c'est ce qui explique l'apparition de la classe $\mathcal{S}_{hg}$ dans ce qui suit.

Soit C_ν les cercles de rayon r ($z = re^{i\theta}$ uniformisante locale) centrés aux points singuliers; soit V le voisinage de ces points intérieurs à $C_\nu\left(V \subset D;\ D - V = \underset{D}{\mathfrak{C}} V\right)$. Le produit scalaire de la première composante de la décomposition (1.1.4) par dU donne

$$\left[dU, \frac{i}{2}(\varphi^r - \overline{\varphi}^r)^*\right]_{D-V} = \left[dU, \frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)\right]_{D-V} = \frac{1}{2}\int_{D-V} dU(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)^*$$
$$= -\frac{i}{2}\int_{D-V} dU(\varphi^r - \overline{\varphi}^r) = -\frac{i}{2}\sum_\nu \int_{C_\nu} U(\varphi^r - \overline{\varphi}^r).$$

L'intégrale étant prise dans le sens direct par rapport à D — V. En supposant dU $(h-1)$-harmonique en P_ν où φ^r a une singularité d'ordre h :

$$U = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{h-1} z^{h-1}) + \frac{1}{2}(\overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 \overline{z} + \ldots + \overline{\alpha}_{h-1}\overline{z}^{h-1}) + \int_{P_\nu} du_1,$$
$$\varphi^r = \left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + \ldots\right) dz,$$

du_1 fermée multiple de P^{h-1} et, en faisant tendre r vers zéro on obtient

$$\lim_{r=0} -\frac{i}{2}\int_{C_\nu} U(\varphi^r - \overline{\varphi}^r) = \pi \mathcal{R}[\alpha_0(a_{-1} + \overline{a}_{-1}) + \alpha_1 a_{-2} + \ldots + \alpha_{h-1} a_{-h}],$$
$$= \lim_{r=0} \mathcal{R}\left[-\frac{i}{2}\int_{C_\nu} (U + iU^*)(\varphi^r - \overline{\varphi}^r)\right],$$

qui est la partie réelle d'une somme d'expressions analogues à celles de la page 255. Pour ce qui est de la seconde composante de ω, $\frac{1}{2}(\varphi^i + \overline{\varphi}^i)$, on remarque que l'expression de son produit scalaire par dU ne porterait pas uniquement sur les coefficients de leur développement aux points singuliers, si l'on ne supposait pas que c'est une différentielle exacte d'une fonction harmonique nulle sur D'. On est donc amené à supposer ([25]) :

$$\frac{1}{2}(\varphi^i + \overline{\varphi}^i) = d\mathfrak{g}.$$

Alors

$$(dU, d\mathfrak{g})_{D-V} = (d\mathfrak{g}, dU)_{D-V} = \int_{D-V} d\mathfrak{g}\, dU^* = \sum_\nu \int_{C_\nu} \mathfrak{g}\, dU^*.$$

En posant, au voisinage d'une singularité :

$$\varphi^i = \left(\frac{b_{-h}}{z^h} + \ldots + \frac{b_{-1}}{z} + \ldots\right) dz,$$

([25]) La lettre $\mathfrak{g}$ rappelle la fonction de Green dont la différentielle est un cas particulier des différentielles considérées ici. Ces différentielles ont été utilisées dans un cas particulier par Ahlfors [1].

on a pour dU^* et $\mathfrak{g}$ les expressions ([26]) :

$$dU^* = \frac{1}{2i}\Big[[\alpha_1 + 2\alpha_2 z + \ldots + (h-1)\alpha_{h-1} z^{h-2}]\, dz - [\overline{\alpha}_1 + 2\overline{\alpha}_2 \overline{z} + \ldots + (h-1)\overline{\alpha}_{h-1} \overline{z}^{h-2}]\, d\overline{z} + du_1^*\Big],$$

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\left[\frac{b_{-h}}{(-h+1)z^{h-1}} + \ldots + \frac{b_{-2}}{-z} + b_{-1}\log z + b + b_0 z + \ldots\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\overline{b}_{-h}}{(-h+1)\overline{z}^{h-1}} + \ldots + \frac{\overline{b}}{-\overline{z}} + \overline{b}_{-1}\log\overline{z} + \overline{b} + \overline{b}_0\overline{z} + \ldots\right],$$

et l'on trouve

$$\lim_{r=0}\int_{C_\nu} \mathfrak{g}\, dU^* = -\pi\mathcal{R}[\alpha_1 b_{-2} + \alpha_2 b_{-3} + \ldots + \alpha_{h-1} b_{-h}].$$

C'est encore une expression conformément invariante : comme

$$\lim_{r=0}\frac{1}{i}\int_{C_\nu}(\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}^*)\left(\frac{dU - i\,dU^*}{2}\right) = 0,$$

elle est égale à

$$\lim_{r=0}\mathcal{R}\frac{1}{i}\int_{C_\nu}(\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}^*)\left(\frac{dU + i\,dU^*}{2}\right)$$

qui représente une quantité proportionnelle à la partie réelle du résidu de $(\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}^*)(dU + i\,dU^*)$.

En groupant les résultats et en observant que les quantités $b_{-h} - a_{-h}\,(h > 1)$ sont nulles si et seulement si ω a au plus un pôle simple au point symétrique, sur $\hat{D}$, du point singulier considérée, on peut énoncer les propositions suivantes :

Proposition 1.3.1. — *Une différentiele harmonique de Schottky-Ahlfors de la forme* $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r) + d\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = 0$ *sur* D', *multiple sur* $\hat{D}$ *d'un diviseur* $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, *d et* d_0 *ayant les formes*

$$(1.3.1)\qquad \begin{cases} d = \sum_1^s P_\nu^{m_\nu} \quad (m_\nu > 0), & m = \sum_1^s m_\nu, \\ d_0 = \sum_1^t Q_\nu^{n_\nu} \quad (n_\nu > 0), & n = \sum_1^t n_\nu, \end{cases}$$

est orthogonale au sens principal à toute différentielle fermée exacte sur D, dU, *d'-harmonique,* U *multiple de* $[d_0, |d|]$. *Si, de plus, elle est de deuxième espèce sur* D, *il suffit que* U *soit multiple de* d_0 ([27]).

([26]) b_{-1} est réel parce que $d\mathfrak{g}$ est exacte.

([27]) U est multiple de d_0 si dU est multiple de d'_0 et si les constantes qui s'introduisent par intégration sont nulles.

PROPOSITION 1.3.2. — *Une différentielle harmonique de Schottky-Ahlfors de la forme* $\frac{1}{2}(\varphi^r+\overline{\varphi}^r)+d\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}=0$ *sur* D′, *multiple d'un diviseur* $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, d *et* d_0 *ayant les formes* (1.3.1), *dont la composante* φ^r *a ses résidus imaginaires est orthogonale au sens principal à toute différentielle fermée exacte sur* $\overline{\mathrm{D}}$, $d\mathrm{U}$, d'*-harmonique et multiple de* d'_0.

C'est dans la démonstration que nous venons de faire qu'apparaît le fait nouveau relatif aux différentielles harmoniques, par rapport aux différentielles analytiques. Si l'on compare les deux démonstrations d'orthogonalité correspondantes aux différentielles analytiques et aux différentielles harmoniques on voit qu'elles sont fondamentalement distinctes. Dans le premier cas on utilise essentiellement la propriété de nullité du produit de deux différentielles analytiques, propriété qui permet le passage d'une intégrale relative à D′ à des intégrales relatives à C_ν. Dans le second cas on utilise essentiellement et uniquement le comportement simple des différentielles harmoniques sur D′. C'est ce qui permet de travailler sur la classe plus étendue de différentielles fermées.

J'en viens maintenant à la décomposition d'une différentielle fermée Ω, d^{-1}-polaire et d'_0-harmonique sur $\overline{\mathrm{D}}$, d et d_0 ayant la forme (1.3.1); $\Gamma_f(d^{-1}; d'_0)$ désignera l'espace de ces différentielles. Le sous-espace $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ de $\mathfrak{S}_h(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ des différentielles harmoniques de la forme $\frac{1}{2}(\varphi^r+\overline{\varphi}^r)+d\mathfrak{g}$ multiples de $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$ a $\hat{g}+2(m+n)'-(r)'$ dimensions réelles ([28]), r étant le nombre total de points P_ν et Q_ν distincts. A chaque différentielle $\Omega=\frac{1}{2}(\Phi+\overline{\Phi})+\Omega_1$ (Ω_1 multiple de d'_0) je fais correspondre un vecteur de l'espace Σ_h à $\hat{g}+2(m+n)'-(r)'$ dimensions réelles dont les composantes sont :

1° les $\hat{g}$ périodes réelles de Ω;

2° les $m_\nu-1$ premiers coefficients complexes du développement de $\frac{1}{2}\Phi$ et la partie réelle du résidu de $\frac{1}{2}\Phi$ en un point $P_\nu\notin(Q_\nu)$; s'il n'y a pas de points Q_ν on prend seulement la partie réelle du résidu de $\frac{1}{2}\Phi$ aux points $P_\nu(\nu=2, 3, \ldots, s)$;

3° les $m_\nu+n_\nu-1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $P_\nu\in(Q_\nu)$;

([28]) L'espace $\mathfrak{S}_h(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ a en effet $2\hat{g}+2(m+n)'$ dimensions réelles et pour obtenir $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ il faut annuler $2g$ périodes de $\frac{1}{2}(\varphi^i+\overline{\varphi}^i)$, $c-1$ constantes ($\hat{g}=2g+c-1$) égales aux valeurs prises par $\frac{1}{2}\int\varphi^i+\overline{\varphi}^i$ sur D′ et $(r)'$ parties imaginaires des résidus de φ^i.

4° les $n_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $Q_\nu \notin (P_\nu)$;

5° les $t-1$ quantités ([29]) réelles $\int_{Q_1}^{Q_\nu} \Omega (\nu = 2, 3, \ldots, t)$; si $Q_\nu \in (P_\nu)$ on prend la valeur constante du développement de $\int_{Q_1}^{z} \Omega$, z voisin de Q_ν; si tous les Q_ν sont des points P_ν on prend un point $Q_0 \notin (Q_\nu)$ et l'on détermine c_0 réel de façon que le développement de $c_0 + \int_{Q_0}^{z} \Omega$ pour z voisin de Q_1 commence par un terme de la forme $z^n\, dz (n \geq 1)$; les composantes sont alors les constantes des développements de $c_0 + \int_{Q_0}^{z} \Omega$ pour z voisin de $Q_\nu (\nu = 2, 3, \ldots, t)$.

A l'aide de la proposition 1.3.1 on montre qu'il y a isomorphisme de $\mathcal{S}_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ sur Σ_h. En effet, au vecteur de composantes nulles correspond une différentielle exacte, du, multiple de $\tilde{d}_0^{-1}$, u étant multiple de d_0 sur $\overline{D}$; aux points $P_\nu \notin (Q_\nu)$ elle est régulière car sa composante méromorphe $\varphi = \varphi' + \varphi^i$ satisfait à

$$\operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi = 0 = \operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi' - \operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi^i ;$$

donc ([30]) $\operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi' = \operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi^i$ est réel et $\operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi$ est aussi réel, donc nul, du est donc orthogonale à elle-même et par suite identiquement nulle. On peut donc énoncer :

Proposition 1.3.3. — *L'espace vectoriel* $\Gamma_f(d^{-1}; d_0)$ *est la somme directe de* $\mathcal{S}_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ *et de l'espace des différentielles fermées* $|d_0|[|d|, |d_0|]^{-1}$*-polaires, de périodes nulles sur* $\overline{D}$, Υ, *multiples de* $d_0[|d|, |d_0|]^{-1}$, *dont les résidus de la partie analytique sont imaginaires purs en* $P_\nu \notin (Q_\nu)$ *et telles que* $\int_{Q_1} \Upsilon$ *soit nulle en* Q_ν.

On peut aussi définir une décomposition correspondant à la proposition 1.3.2. Le sous-espace $\mathcal{S}'_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ de $\mathcal{S}_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ des différentielles harmoniques de Schottky-Ahlfors dont la partie analytique de la composante $\frac{1}{2}(\varphi' + \overline{\varphi}')$ a des résidus imaginaires ($\mathcal{R}$ résidu $\varphi' = 0$) en chaque pôle, a $\hat{g} + 2(m+n) - 2r$ dimensions réelles ([31]). Le vecteur de l'espace Σ'_h correspondant aura pour composantes :

1° les $\hat{g}$ périodes réelles de Ω;

([29]) Toutes les intégrales sont à prendre sur des chemins bien déterminés.

([30]) Il ne faut pas oublier, en effet, que les différentielles $d_\mathfrak{g} = \frac{1}{2}(\varphi^i + \overline{\varphi}^i)$ sont telles que $\mathcal{J}$ résidu $\varphi^i = 0$.

([31]) Il faut annuler r' parties réelles des résidus de φ' dans une différentielle de $\mathcal{S}_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$.

2° les $m_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $P_\nu \notin (Q_\nu)$;

3° les $m_\nu + n_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $P_\nu \in (Q_\nu)$;

4° les $n_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $Q_\nu \notin (P_\nu)$.

On a alors un isomorphisme de Σ'_k sur $\mathcal{S}'_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ et l'on peut énoncer :

PROPOSITION 1.3.4. — *L'espace vectoriel* $\Gamma_f(d^{-1}; d'_0)$ *est la somme directe de* $\mathcal{S}'_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ *et de l'espace des différentielles fermées* $|d_0|[|d|, |d_0|]^{-1}$*-polaire, de périodes nulles sur* D, Υ, *multiples de* $d_0[|d|, |d_0|]^{-1}$. *L'espace vectoriel* $\Gamma_{f,2}(d^{-1}; d'_0)$ *des différentielles fermées* d'_0*-harmoniques de deuxième espèce, multiples de* d^{-1}, *sur* D, *est la somme directe de* $\mathcal{S}'_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ *et de l'espace des différentielles fermées exactes multiples de* d'_0 *sur* D.

1.4. COMPOSANTES STRICTES. PROPRIÉTÉS DE MINIMUM ET APPROXIMATION. — On peut choisir le diviseur d_0 qui apparaît dans les propositions 1.3.3 et 1.3.4 de façon que les composantes d'une différentielle $\Omega \in \Gamma_f(d^{-1}; [d', d'_0])$ soient orthogonales au sens principal ([32]). Dans le cas général ou Ω est de troisième espèce il faut et il suffit que d_0 soit multiple de $|d|$. Si Ω est de deuxième espèce d_0 peut être pris quelconque. Les circonstances sont analogues à celles du n° 2.6 du chapitre I. J'appellerai de nouveau composantes strictes de Ω les différentielles obtenues dans les propositions 1.3.3 et 1.3.4 en choisissant $d_0 = |d|$ (resp. $d_0 = 1$ si Ω est de deuxième espèce).

La composante stricte de Schottky-Ahlfors $\frac{1}{2}(\varphi' + \overline{\varphi'}) + d\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{S}'_{hg}$ est telle que $\left[\Omega = \frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi}) + \Omega_1, \ \Omega_1 \text{ multiple de } d'_0\right]$:

$$(1.4.1)\qquad \begin{cases} \mathcal{R} \text{ résidu } \Phi = \mathcal{R} \text{ résidu } \varphi^i, \qquad \mathcal{I} \text{ résidu } \Phi = \mathcal{I} \text{ résidu } \varphi^r, \\ \underset{\Phi, P_\nu}{\text{coefficient de}} \dfrac{dz}{z^n} = 2 \underset{\varphi^r, P_\nu}{\text{coef.}} \dfrac{dz}{z^n} = 2 \underset{\varphi^i, P_\nu}{\text{coef.}} \dfrac{dz}{\overline{z}^n} \qquad (n > 1). \end{cases}$$

Les dernières relations sont obtenues en remarquant que φ a au plus un pôle simple en un point symétrique $\tilde{P}$ d'un pôle P sur D, donc que $\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi' - \varphi^i$ a au plus un pôle simple en P. La composante stricte de Schottky-Ahlfors dans $\mathcal{S}'_{hg}$ est donc définie par les parties singulières et les périodes de Ω dans D.

La proposition correspondante à la proposition 2.6.1 du chapitre I s'énonce :

PROPOSITION 1.4.1. — *Si* d_2 *est multiple de* d_1, *la composante* ω_1 *de Schottky-Ahlfors de* $\Omega \in \Gamma_f(d^{-1}; [d', d'_2])$ *dans* $\mathcal{S}_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_1^{-1})$ *[ou* $\mathcal{S}'_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_1^{-1})$*] est aussi*

([32]) C'est ce que je supposerai toujours en parlant de composante d'une différentielle fermée au sens des propositions 1.3.4 et 1.3.3.

la composante dans $\mathcal{S}_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_1^{-1})$ $[ou\ \mathcal{S}'_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_1^{-1})]$ *de la composante* ω_2 *de* Ω *dans* $\mathcal{S}_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_2^{-1})$ $[ou\ \mathcal{S}'_{hg}(d^{-1}\tilde{d}_2^{-1})]$.

En introduisant les notations utilisées aux n^{os} 2.6 et 2.7 du chapitre I et en raisonnant de façon analogue, on obtient les résultats suivants :

Proposition 1.4.2. — *Les normes des composantes de Schottky-Ahlfors* $\omega = \frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r) + d\mathfrak{g}$ *de différentielles* Ω *de* $\Gamma_f(d^{-1}; [d', d'_0])$, *sur un domaine compact* $\overline{D}$, *satisfont par rapport aux normes de ces différentielles, aux propriétés de minimum au sens principal représentées par*

$$\lim_{V \in U} (\| \Omega \|^2_{D-V} - \| \varphi \|^2_{D-V}) \geqq 0$$

et à la relation

$$\| \Omega - \omega \|^2_D = [\| \Omega \|^2 - \| \omega \|^2]_D. \tag{1.4.3}$$

Proposition 1.4.3. — *L'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors* $\mathcal{S}_{hg}(d^{-1}|\tilde{d}|^{-1}\tilde{Q}^{-k})$ $[ou\ \mathcal{S}'_{hg}(d^{-1}|\tilde{d}^{-1}|\tilde{Q}^{-k})]$ $(k = 0, 2, 3, \ldots)$, *est dense dans* $\Gamma_h(d^{-1})$. *L'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors de deuxième espèce sur* D, $\mathcal{S}_{hg,2}(d^{-1}\tilde{Q}^{-k})$ $[ou\ \mathcal{S}'_{hg,2}(d^{-1}\tilde{Q}^{-k})]$ *est dense dans* $\Gamma_{h,2}(d^{-1})$.

2. Différentielles fermées et harmoniques sur une surface ouverte.

2.1. Décomposition des différentielles fermées. — La décomposition faite au chapitre I pour les différentielles méromorphes peut être opérée, de façon identique, pour les différentielles harmoniques à singularités polaires isolées, grâce aux résultats du paragraphe précédent. Je ne ferai donc pas de démonstration et me contenterai d'énoncer le résultat, sans énoncer les propositions qui généralisent les propositions 3.1.1 et 3.1.2 du chapitre I, pour le cas des différentielles harmoniques.

Théorème 2.1.1. — *Étant donné sur une surface de Riemann* S, *une différentielle harmonique,* Ω, d^{-1}*-polaire, on peut définir sur* S *un diviseur* d_0, *tel que* Ω *soit la somme d'une différentielle harmonique, exacte, de première espèce et de norme finie et de la limite* ω *de ses composantes-*d_0 *relatives aux domaines* S_n *d'une exhaustion de* S. *La norme de la différence* $\Omega - \omega$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} \| \Omega - \omega \|^2_S &= \lim_n \lim_U (\| \Omega \|^2_{S_n - U((P_\nu))} - \| \omega \|^2_{S_n - U((P_\nu))}) \\ &= \lim_U \lim_n (\| \Omega \|^2_{S_n - U((P_\nu))} - \| \omega \|^2_{S_n - U((P_\nu))}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

U *désignant un voisinage des pôles* (P_ν) *de* Ω *parcourant une base* $\mathfrak{U}$ *convenable du filtre de ces voisinages.*

Il faut dire un mot sur le lemme qui permet d'établir ces relations (2.1) :

Lemme. — *Étant donné deux différentielles harmoniques polaires* Ω *et* Π *ayant*

une même partie singulière en un point P, *il existe une base* $\mathfrak{U}$ *du filtre des voisinages de* P *telle que*

$$\lim_{U\subset\mathfrak{U}} [\,\|\Omega\|^2 - \|\Pi\|^2]_{U(P)} = 0.$$

La démonstration est la même que celle du lemme correspondant du chapitre I; il suffit de voir que la partie singulière de Ω et Π, $\frac{1}{2}(\alpha+\overline{\alpha})$, est bien la composante stricte de Schottky-Ahlfors (proposition 1.3.4) dans l'espace $\mathcal{S}'_{hg}$ correspondant aux domaines $|z|\leq r$; en effet $\alpha = \alpha^r + \alpha^i$ a un pôle simple à l'infini et son résidu en ce point est opposé à son résidu à l'origine; on a donc

$$\underset{0}{\text{résidu}}\,(\alpha^r+\alpha^i) = -\underset{\infty}{\text{résidu}}\,(\alpha^r+\alpha^i) = -\overline{\underset{0}{\text{résidu}}\,(\alpha^r-\alpha^i)}.$$

et par suite :

$$\mathcal{R}\ \text{résidu}\ \alpha^r = 0 = \mathcal{I}\ \text{résidu}\ \alpha^i,$$

et ces dernières égalités montrent bien que $\frac{1}{2}(\alpha+\overline{\alpha})$ appartient à l'espace $\mathcal{S}'_{hg}$ relatif aux cercles de centre origine du plan z.

Le théorème 2.1.1 n'est relatif qu'aux différentielles harmoniques parce que, pour le cas général des différentielles fermées, nous n'avons pas de propriété d'approximation analogue à celle donnée par la proposition 1.4.3. Il faut alors faire une hypothèse suplémentaire et l'on peut énoncer :

Théorème 2.1.2. — *Étant donné sur une surface de Riemann* S, *une différentielle fermée* Ω, d^{-1}*-polaire, si l'on peut définir sur* S *un diviseur* d_0, *tel que* Ω *soit* $[d', d'']$*-harmonique et que,* ρ_n *désignant les composantes-*d_0 *de* ω *dans les ouverts* $T_n = S_n - \overline{S}_{n-1}$ (S_n *étant une exhaustion de* S)

$$\sum_n \|\Omega - \rho_n\|^2_{T_n} < \infty,$$

alors Ω *est égale à la somme d'une différentielle fermée exacte, de première espèce et de norme finie, et de la limite* ω *de ses composantes-*d_0 *relatives aux* S_n. *Les relations* (2.1) *sont valables.*

Le théorème 2.1.1 ne peut être obtenu directement à partir du théorème 3.1 du chapitre I. Le théorème qu'on obtiendrait ainsi pour les différentielles harmoniques donnerait une limite $\omega = \lim_n \omega_n$ qui aurait non seulement mêmes périodes que Ω mais dont l'adjointe aurait également mêmes périodes que Ω^*. Par contre les composantes $\frac{1}{2}(\varphi^i_n + \overline{\varphi}^i_n)$ des ω_n ne seraient pas de la forme $d\mathfrak{g}_n$.

2.2. L'espace $\mathcal{D}_f$ de différentielles fermées a singularités polaires sur une surface ouverte. — Pour les mêmes raisons qu'au chapitre I, le théorème

précédent conduit à considérer des classes particulières $\mathcal{O}_f$ et $\mathcal{O}'_f$ de différentielles fermées sur une surface ouverte.

Définition 2.2.1. — *$\mathcal{O}_f$ (resp. $\mathcal{O}'_f$) est l'espace des différentielles fermées Ω d'-harmoniques, d étant le diviseur à exposants positifs maximum tel que Ω soit multiple de d^{-1}, pour lesquelles il existe un domaine D contenant les pôles de Ω, dont chaque composante connexe est compacte, et telles que, ω désignant la composante stricte de Ω au sens des propositions 1.3.3 ou 1.3.4, on ait*

$$\| \Omega \|^2_{S-D} + \| \Omega - \omega \|^2_D < \infty. \tag{2.2.1}$$

Avec les notations relatives à l'introduction d'une structure uniforme sur S, utilisées au n° 3.2 du chapitre I, on peut aussi poser :

Définition 2.2.2. — *$\mathcal{O}^{\mathfrak{U}}_f$ (resp. $\mathcal{O}'^{\mathfrak{U}}_f$) est le sous-espace de $\mathcal{O}_f$ (resp. $\mathcal{O}'_f$) des différentielles Ω pour lesquelles il existe un entourage U_0 de la structure uniforme définie sur S et une application $A \in \mathfrak{A}$ tels que pour tout entourage $U \subset U_0$:*

1° *deux points de S appartenant à une composante connexe quelconque de $U((P_\nu))$, (P_ν) désignant les pôles de Ω, sont au moins voisins d'ordre $A(U) \subset U^*$;*

2° *Ω et sa composante stricte ω dans $U((P_\nu))$ satisfont à la relation*

$$\| \Omega \|^2_{S-U} + \| \Omega - \omega \|^2_U < \infty. \tag{2.2.2}$$

Ces espaces $\mathcal{O}^{\mathfrak{U}}_f$ et $\mathcal{O}'^{\mathfrak{U}}_f$ sont vectoriels et ont entre eux la relation d'inclusion $\mathcal{O}'^{\mathfrak{U}}_f \subset \mathcal{O}^{\mathfrak{U}}_f$. On peut également transposer pour les espaces $\mathcal{O}^{\mathfrak{U}}_f$ et $\mathcal{O}'^{\mathfrak{U}}_f$ les autres remarques faites au n° 3.2 sur les espaces $\mathcal{O}^{\mathfrak{U}}_a$ et $\mathcal{O}'^{\mathfrak{U}}_a$.

Je désignerai par $\mathcal{O}_h$, $\mathcal{O}'_h$, $\mathcal{O}^{\mathfrak{U}}_h$, $\mathcal{O}'^{\mathfrak{U}}_h$ les sous-espaces de $\mathcal{O}_f$, $\mathcal{O}'_f$, $\mathcal{O}^{\mathfrak{U}}_f$, $\mathcal{O}'^{\mathfrak{U}}_f$ dont les différentielles sont non seulement fermées mais harmoniques sur S.

En désignant par C_{HD} la classe des surfaces de Riemann où toute différentielle harmonique de première espèce et de norme finie est nulle, on peut appliquer le théorème 2.1.1 aux classes de différentielles $\mathcal{O}_h$ et $\mathcal{O}'_h$ et l'on obtient :

Proposition 2.2. — *Sur une surface $S \in C_{HD}$, toute différentielle harmonique $\Omega \in \mathcal{O}_h$ (ou $\mathcal{O}'_h$) est la limite uniforme dans tout compact, de ses composantes strictes de Schottky-Ahlfors prises au sens de la proposition 1.3.3 (ou 1.3.4) correspondant aux domaines S_n d'une exhaustion de S; les composantes prises au sens de la proposition 1.3.4 ont des parties singulières données par les relations (1.4.1) et sont définies par ces relations et les périodes de Ω.*

La classe $\mathcal{O}'_h$ joue un rôle particulier sur les surfaces appartenant à C_{HD}, car, si deux différentielles Ω_1 et Ω_2 de cette classe ont mêmes périodes et parties singulières, leur différence est nulle. On a donc le théorème d'unicité :

Théorème 2.2. — *Les différentielles de $\mathcal{O}'_h$ sont déterminées par leurs périodes et leurs parties singulières sur une surface de Riemann $S \in C_{HD}$.*

2.3. Sur l'existence de différentielles de deuxième espèce de $\mathcal{O}_h'^{\mathfrak{u}}$. — Virtanen* a donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une différentielle harmonique Ω de première espèce et de norme finie dont la composante $\Phi\left[\Omega = \frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi})\right]$ a des périodes données sur les cycles A (les A-périodes) d'une surface de Riemann ([33]) $S \in C_0$. Il ne semble pas qu'on connaisse actuellement de condition analogue pour le cas où l'on se donne les périodes de Ω. Par rapport à la classe $\mathcal{O}_h'^{\mathfrak{u}}$ introduite dans ce travail, il est donc raisonnable de poser la question de l'existence d'une différentielle harmonique Ω dont la partie analytique Φ a des A-périodes et des parties singulières données. Comme $\mathcal{O}_h'^{\mathfrak{u}}$ est vectoriel, on peut utiliser le résultat de Virtanen et l'on est ramené à chercher une condition d'existence d'une différentielle harmonique $\Omega \in \mathcal{O}_h'^{\mathfrak{u}}$ dont la partie analytique a ses A-périodes nulles (par rapport à des cycles A donnés) et dont les parties singulières sont données. Je n'ai obtenu qu'une condition suffisante et non nécessaire. Cette condition est également suffisante pour l'existence d'une différentielle $\Omega \in \mathcal{O}_h'^{\mathfrak{u}}$ harmonique de périodes nulles (par rapport à des cycles A et B donnés) de parties singulières données.

Pour simplifier l'exposé je me placerai d'abord dans le cas de parties singulières de deuxième espèce (coefficient de $\frac{dz}{z}$ nul; ce sous-espace de $\mathcal{O}_h'^{\mathfrak{u}}$ est identique au sous-espace correspondant de $\mathcal{O}_h^{\mathfrak{u}}$) puis dans le cas où toutes les parties singulières sont des pôles simples.

Le résultat est basé sur l'estimation de la norme d'une différentielle harmonique $\varpi_P \in \mathcal{O}_h^{\mathfrak{u}}$, ayant un seul point singulier P, de partie singulière :

$$(2.3.1) \qquad \sigma_P = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{a}_{-h}}{\overline{z}^h} + \ldots + \frac{\overline{a}_{-2}}{\overline{z}^2}\right)d\overline{z} \qquad (h \geqq 2),$$

et de partie analytique A-exacte, la norme étant calculée à l'extérieur d'un cercle $|z| \leqq r$ centré en P sur $S \in C_0$. L'existence d'une telle différentielle a été démontrée par Virtanen*. Pour calculer la norme de ϖ_P à l'extérieur de $|z| \leqq r$ il faut couper S suivant les cycles A_ν; sur la surface S^* obtenue, ϖ_P est exacte, soit $du_{A,P}$. On estime alors $\| du_{A,P} \|^2_{S^* - (|z| \leqq r)}$ de la façon suivante (S_n étant une exhaustion de S) :

$$\| \varpi_P \|^2_{S^* - (|z| \leqq r)} = \lim_n \| \varpi_P \|^2_{S^* - (|z| \leqq r)}$$
$$= \int_{|z| = r} u_{A,P}\, du^*_{A,P} + \lim_n \int_{S'_n} u_{A,P}\, du^*_{A,P};$$

([33]) C_0 désigne la classe des surfaces paraboliques (nullberandet), c'est-à-dire celle dont la « frontière idéale » est de mesure harmonique nulle (Nevanlinna*). Parmi la classe des surfaces ouvertes c'est une de celles qui se rapprochent le plus des surfaces closes du point de vue de l'extension des propriétés des intégrales abéliennes (Sario [1]).

les intégrales portant sur les cycles A_ν intérieurs à S_n sont nulles parce que la partie analytique de ϖ_P est A-exacte. Comme $du_{A,P}$ est une différentielle de norme finie à l'extérieur de $|z|\leq r$, $u_{A,P}$ convenablement normée, est bornée sur $S^\star - (|z|\leq r)$ (Nevanlinna*). D'autre part on sait (Nevanlinna*) que l'on peut choisir l'exhaustion (S_n) de façon que $\lim_n \int_{S'_n} |du_{A,P} + i du^*_{A,P}| = 0$. En faisant augmenter n indéfiniment on obtient donc :

$$(2.3.2) \qquad \| \varpi_P \|^2_{S-(|z|\leq r)} = -\int_{|z|=r} u_{A,P}\, du^*_{A,P},$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct par rapport à $|z|\leq r$. Supposons qu'au voisinage de P, $\varpi_P = du_{A,P}$ est donnée par

$$du_{A,P} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{-k}}{z^k} + \ldots + \frac{p_{-2}}{z^2} + p_0 + p_1 z + \ldots\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{p}_{-h}}{\overline{z}^h} + \ldots + \frac{\overline{p}_{-2}}{\overline{z}^2} + \overline{p}_0 + \overline{p}_1 \overline{z} + \ldots\right) d\overline{z}.$$

Alors on obtient

$$\| \varpi_P \|^2_{S-(|z|\leq r)} = \pi \left[|p_{-h}|^2 \frac{1}{(h-1)\, r^{2h-2}} + \ldots + \frac{|p_{-2}|^2}{r^2} - |p_0|^2 r^2 - |p_1|^2 \frac{r^4}{2} - \ldots - |p_n|^2 \frac{r^{2n+2}}{n+1} - \ldots \right].$$

Ainsi on a les deux inégalités :

$$(2.3.3) \qquad \| \varpi_P \|^2_{S-(|z|\leq r)} \leq \pi \sum_2^h \frac{|p_{-\nu}|^2}{(\nu-1)\, r^{2\nu-2}},$$

$$(2.3.4) \qquad \sum_2^k \frac{|p_{-\nu}|^2}{(\nu-1)\, r^{2\nu-2}} \geq \sum_0^\infty \frac{|p_\nu|^2 r^{2\nu+2}}{\nu+1}.$$

Donnons-nous maintenant, sur une surface de Riemann $S \in C_0$ munie d'une structure uniforme $\mathfrak{U}$, un ensemble de points (P_ν) tel que la première condition de la définition 2.2.2 soit remplie (existence de U_0 et de A). Représentons ([34]) chaque $U_0(P_\nu)$ sur $|z|\leq 1$ $(z = 0 \leftrightarrow P_\nu)$; supposons que la famille des cercles $|z|\leq r < 1$ forme une base du filtre des voisinages de l'ensemble (P_ν) sur S. Soit σ_{P_ν} :

$$(2.3.5) \qquad \sigma_{P_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{-k_\nu,\nu}}{z^{k_\nu}} + \ldots + \frac{p_{-2,\nu}}{z^2}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{p}_{-k_\nu,\nu}}{\overline{z}^{k_\nu}} + \ldots + \frac{\overline{p}_{-2,\nu}}{\overline{z}^2}\right) d\overline{z},$$

([34]) Il faut supposer en plus $U_0(P_\nu)$ suffisamment petit pour que la représentation conforme et biunivoque sur $|z|\leq 1$ soit possible.

les parties singulières données en chaque P_ν. Considérons l'expression formelle :

$$\Omega = \sum_{\nu} \varpi_{P_\nu}, \tag{2.3.6}$$

et cherchons dans quelles conditions Ω est une différentielle de la classe $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{M}}$. Dans tout compact ne contenant pas de point P_ν, il existe une limite Ω de $\sum_1^n \varpi_{P_\nu}$ pour n tendant vers l'infini, dès que

$$\sum_1^\infty \sum_2^{k_\nu} \frac{|p_{-\mu,\nu}|^2}{(\mu-1)r^{2\mu-2}} < \infty, \tag{2.3.7}$$

car cette somme majore la norme des différentielles $\sum_1^n \varpi_{P_\nu}$, d'après (2.3.3); ainsi Ω est bien une différentielle harmonique si (2.3.7) est réalisée, et l'on voit facilement qu'elle a en P_ν la singularité σ_{P_ν}. Je vais montrer que cette condition suffit pour que $\Omega \in \mathcal{D}_h^{\mathfrak{M}}$.

Évaluons la quantité $\|\Omega\|^2_{S-U^r} + \|\Omega - \omega\|^2_{U^r}$, où ω est la composante stricte de Schottky-Ahlfors (au sens de la proposition 1.3.4) de Ω dans le domaine $U^r((P_\nu))$ [$U^r((P_\nu))$ désigne l'intérieur des cercles de rayon r centrés en (P_ν)]. Si D désigne une composante connexe de $U^r((P_\nu))$ on peut écrire, en faisant le même raisonnement qu'au premier chapitre (n° 3.2), et en désignant par ω_{P_ν} la composante stricte de Schottky-Ahlfors de ϖ_{P_ν} dans D, et par I l'ensemble des indices ν des points $P_\nu \in D$ en écrivant U^r à la place de $U^r(P_\nu)$:

$$\|\Omega - \omega\|_D^2 = \left\| \sum_1^\infty \varpi_{P_\nu} - \sum_{\nu\in I} \omega_{P_\nu} \right\|_D^2 \leq \sum_{\nu\in I} \|\varpi_{P_\nu} - \omega_{P_\nu}\|_D^2 + \sum_{\nu\notin I} \|\varpi_{P_\nu}\|_D^2$$
$$\leq \sum_{\nu\in I} \|\varpi_{P_\nu}\|^2_{D-U^r} + \sum_{\nu\notin I} \|\varpi_{P_\nu}\|_D^2 + \sum_{\nu\in I} \|\varpi_{P_\nu} - \sigma_{P_\nu}\|^2_{U^r};$$

en effet, σ_{P_ν} est la composante stricte de Schottky-Ahlfors de ϖ_{P_ν} dans $U^r(P_\nu)$. Ainsi en utilisant (2.3.3) et (2.3.4) :

$$\|\Omega\|^2_{S-U^r((P_\nu))} + \|\Omega - \omega\|^2_{U^r((P_\nu))} \leq \sum_1^\infty \|\varpi_{P_\nu}\|^2_{S-U^r} + \sum_1^\infty \|\varpi_{P_\nu} - \sigma_{P_\nu}\|^2_{U^r} \leq 2\pi \sum_1^\infty \sum_2^{k_\nu} \frac{|p_{-\mu,\nu}|^2}{(\mu-1)r^{2\mu-2}}$$

Si (2.3.7) est réalisée, Ω appartient bien à $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{M}}$ et par suite est définie de façon unique sur $S \in C_0 \subset C_{HD}$.

Si l'on se propose de chercher une condition suffisante pour l'existence d'une différentielle harmonique Ω exacte de parties singulières (2.3.5) on obtient le même résultat en utilisant les différentielles du_{P_ν} harmoniques exactes, régulières en dehors de P_ν, appartenant à $\mathcal{D}_h$ et ayant en P_ν la partie singulière σ_{P_ν} (leur existence est démontrée par Nevanlinna*, par exemple). On

obtient directement une relation analogue à (2.3.2) et la suite des raisonnements est identique.

Formulons sur l'ensemble (P_ν) l'hypothèse suivante :

Hypothèse H_1. — 1° Étant donné la structure uniforme $\mathfrak{U}$, il existe un entourage U_0 et une application A satisfaisant à la première condition de la définition 2.2.2.

2° Chaque $U_0(P_\nu)$ est représentable conformément et biunivoquement sur le cercle $|z| \leq 1$; il existe une base U^r du filtre des entourages telle que $U^r(P_\nu)$ soit représenté sur $|z| \leq r$.

On peut énoncer :

Proposition 2.3. — *Sur une surface parabolique, étant donné d'une part une suite de points* (P_ν) *convenablement répartis par rapport à une structure uniforme* $\mathfrak{U}$ *définie sur* S (*c'est-à-dire satisfaisant à l'hypothèse* H_1), *et d'autre part, des parties singulières* σ_ν *analogues à* (2.3.5), *la condition* (2.3.7) *est suffisante pour l'existence d'une différentielle harmonique* Ω *de deuxième espèce dont la partie analytique est* A-*exacte* (*resp. d'une différentielle harmonique exacte*) *qui appartient à* $\mathfrak{D}_h^{\mathfrak{U}}$ *et qui possède les singularités* σ_{P_ν} *en* P_ν.

2.4. Les différentielles harmoniques normales sur $S \in C_{HD}$. — On sait qu'on appelle différentielle harmonique normale de deuxième espèce les différentielles exactes admettant un seul point singulier P et la singularité

$$\sigma_P = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{z^k} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}^k}\right) \qquad (k > 1),$$

en ce point, et qui est d'autre part de norme finie à l'extérieur d'un voisinage de P. Une différentielle normale de troisième espèce est une différentielle de périodes nulles admettant deux points singuliers P_1 et P_2 et les singularités :

$$\sigma_{P_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right), \qquad \sigma_{P_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right)$$

en ces points, et qui est de norme finie à l'extérieur d'un voisinage de P_1 et P_2. Leur existence sur une surface $S \in C_0$ a été démontrée par Nevanlinna. Il faut souligner ici que leur existence sur une surface $S \in C_{HD}$ résulte du théorème 2.1.2. En effet, il existe toujours des différentielles fermées normales $\Omega \in \mathfrak{D}'_f$; il suffit de les choisir nulles en dehors d'un compact simplement connexe contenant les singularités; leurs composantes strictes de Schottky-Ahlfors convergent vers une différentielle harmonique ω qui appartient à $\mathfrak{D}'_h$.

2.5. Remarque sur la condition (2.3.7). — La condition (2.3.7) qui intervient dans la proposition 2.3 n'est pas sans rapport avec le résultat de la pro-

(35) Je rappelle que $C_0 \subset C_{HD}$.

position 2.2. Je vais montrer qu'en effet, c'est une condition suffisante pour qu'une différentielle de deuxième espèce $\Omega \in \mathcal{O}_h^{\mathfrak{U}}$ ayant les parties singulières (σ_{P_ν}) en (P_ν), sur une surface S de la classe C_{HD}, soit décomposable en deux différentielles harmoniques appartenant à $\mathcal{O}_h^{\mathfrak{U}}$, la première étant limite des différentielles $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)$, la seconde des différentielles $d\mathfrak{g}$, différentielles relatives aux domaines S_n d'une exhaustion de S et données par la proposition 1.3.4.

Pour vérifier cette propriété, il suffit de calculer la norme de $d\mathfrak{g}$ dans la partie de S_n extérieur à $U^r((P_\nu))$ (mêmes notations qu'au numéro précédent) :

$$(2.5) \qquad \| d\mathfrak{g} \|^2_{S_n - U^r((P_\nu))} \leq \sum_{P_\nu \in S_n} \| d\mathfrak{g}_\nu \|^2_{S_n - U^r((P_\nu))} = -\sum_{P_\nu \in S_n} \int_{|z|=r} \mathfrak{g}_\nu \, d\mathfrak{g}^*_\nu,$$

$d\mathfrak{g}_\nu$ désigne la différentielle de Schottky-Ahlfors singulière en P_ν et $\tilde{P}_\nu$ seulement, et ayant en P_ν la même partie singulière que $d\mathfrak{g}\left(d\mathfrak{g} = \sum_{P_\nu \in S_n} d\mathfrak{g}_\nu\right)$; l'intégrale est à prendre dans le sens direct par rapport au domaine $|z| \leq r$. On sait [relations (1.4.1)] que l'expression de $d\mathfrak{g}_\nu$ au voisinage de P_ν a la forme (Ω ayant la singularité σ_{P_ν}) :

$$d\mathfrak{g}_\nu = \frac{1}{4}\left(\frac{P_{-k_\nu,\nu}}{z^{k_\nu}} + \ldots + \frac{P_{-2,\nu}}{z^2} + \alpha_{0,\nu} + \alpha_{1,\nu} z + \ldots\right) dz$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{\overline{P}_{-k_\nu,\nu}}{\overline{z}^{k_\nu}} + \ldots + \frac{\overline{P}_{-2,\nu}}{\overline{z}^2} + \overline{\alpha}_{0,\nu} + \overline{\alpha}_{1,\nu}\overline{z} + \ldots\right) d\overline{z}.$$

On trouve alors que pour chaque point P_ν :

$$-\int_{|z|=r} \mathfrak{g}_\nu \, d\mathfrak{g}^*_\nu = \frac{1}{4\pi}\left[\sum_{k_\nu}^{2} \frac{|p^2_{-\mu,\nu}|}{(\mu-1) r^{2\mu-2}} - \sum_{\infty}^{0} \frac{|\alpha^2_{\mu,\nu}| \, r^{2\mu+2}}{\mu+1}\right].$$

Avec les relations (2.5) ceci montre immédiatement que si la condition (2.3.7) est réalisée, les différentielles $d\mathfrak{g}$ relatives aux S_n convergent vers une différentielle $d\mathcal{G}$ qui appartient à $\mathcal{O}_h^{\mathfrak{U}}$. Si $S \in C_{HD}$ on sait que Ω est la limite de

$$\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r) + d\mathfrak{g},$$

et l'on en conclut donc que les différentielles $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)$ convergent également vers une différentielle $\frac{1}{2}(\Phi^r + \overline{\Phi}^r)$ appartenant à $\mathcal{O}_h^{\mathfrak{U}}$. On peut énoncer :

PROPOSITION 2.5. — *Sur une surface* S *appartenant à* C_{HD}, *une différentielle harmonique* $\Omega \in \mathcal{O}_h^{\mathfrak{U}}$, *de deuxième espèce, se décompose en deux différentielles harmoniques* $\frac{1}{2}(\Phi^r + \overline{\Phi}^r)$ *et* $d\mathcal{G}$, *appartenant à* $\mathcal{O}_h^{\mathfrak{U}}$ *et limites des différentielles* $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)$

et dg, relatives aux domaines S_n d'une exhaustion de S, dès que la condition (2.3.7) sur les parties singulières de Ω est réalisée.

2.6. Sur l'existence des différentielles de $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{U}}$ n'ayant que des pôles simples. — Étudions la norme d'une différentielle harmonique ([36]) $\omega_{A,P_1,P_2} \in \mathcal{D}'_h$, dont la partie analytique a des A-périodes nulles sur $S \in C_0$ et qui a deux pôles simples de résidus opposés en P_1 et P_2; ω_{A,P_1,P_2} est exacte sur S_l^*, c'est-à-dire sur S coupée suivant des cycles A et un chemin l allant de P_1 à P_2. Cette norme est finie à l'extérieur de deux cercles de rayon r centrés en P_1 et P_2. Donnons-nous les développements suivants ($\omega_{A,P_1,P_2} = du_{A,P_1,P_2}$ au voisinage de P_1 et P_2) :

$$du_{A,P_1,P_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{-1}}{z} + p_{0,1} + p_{1,1} z + \dots \right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{p}_{-1}}{\bar{z}} + \overline{p}_{0,1} + \overline{p}_{1,1} \bar{z} + \dots \right) d\bar{z} \quad \text{en } P_1,$$

$$du_{A,P_1,P_2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{p_{-1}}{z} + p_{0,2} + p_{1,2} z + \dots \right) dz + \frac{1}{2}\left(-\frac{\overline{p}_{-1}}{\bar{z}} + \overline{p}_{0,2} + \overline{p}_{1,2} \bar{z} + \dots \right) d\bar{z} \quad \text{en } P_2.$$

A partir de ces développements on obtient aisément ceux de u_{A,P_1,P_2}, u^*_{A,P_1,P_2} et du^*_{A,P_1,P_2} en P_1 et P_2. Je désigne par p_1 et p_2 (resp. p_1^* et p_2^*) les coefficients constants réels des développements de u_{A,P_1,P_2} (resp. u^*_{A,P_1,P_2}) en P_1 et P_2. Comme au n° 2.3 on peut choisir une exhaustion S de façon que

$$\| \omega_{A,P_1,P_2} \|^2_{S-(|z|\leq r)} = \int_{|z|=r,P_1} u\, du^* + \int_{|z|=r,P_2} u\, du^* + 2\pi \mathfrak{I} p_{-1} \int_l du^* \qquad (u = u_{A,P_1,P_2}).$$

Les deux premières intégrales sont à prendre dans le sens direct par rapport au domaine envisagé, la dernière, sur le bord de la coupure l parcourue dans le sens direct en allant de P_1 à P_2 : en effet, si u_{A,P_1,P_2} désigne la valeur de la fonction harmonique sur ce bord, $u_{A,P_1,P_2} - 2\pi \mathfrak{I} p_{-1}$ est sa valeur sur l'autre bord. Les calculs effectués donnent

$$\| \omega_{A,P_1,P_2} \|^2_{S-(|z|\leq r)} = -4\pi |p_{-1}^2| \log r + 2\pi [\mathcal{R} p_{-1}(p_2 - p_1) + \mathfrak{I} p_{-1}(p_2^* - p_1^*)] - \pi \sum_0^\infty (|p_{\nu,1}^2| + |p_{\nu,2}^2|) \frac{r^{2\nu+2}}{\nu+1}.$$

Ce calcul est valable ([37]) pour $r = 1$ et montre que le crochet qui figure au

([36]) Son existence a été établie par Virtanen *.

([37]) Je suppose les cercles $|z| \leq 1$ centrés en P_1 et P_2 suffisamment petits pour qu'ils soient sans points communs.

second membre est positif, soit a^2 ; cette quantité dépend non seulement de p_{-1} mais encore de z par l'intermédiaire de $p_1 - p_2$ et $p_1^* - p_2^*$.

Supposons maintenant donnée une suite de points (P_ν) et de quantités complexes $(p_{-1,\nu})$, les points (P_ν) satisfaisant par rapport à la structure uniforme définie sur $S \in C_0$, à l'hypothèse H_1. On peut évidemment toujours supposer les points rangés dans un ordre tel que les voisinages $U_r(P_\nu)(U^r \subset U_0)$ de deux points successifs soient sans points communs. Appelons $\omega_{A,P_\nu,P_{\nu+1}}$ les différentielles harmoniques, exactes sur $S^*_{l_\nu}(l_\nu$ joignant P_ν à $P_{\nu+1})$, dont la partie analytique est A-exacte sur S_{l_ν}, singulières en P_ν et $P_{\nu+1}$, de résidus égaux à

$$(2.6.1) \qquad \sum_1^\nu p_{-1,\mu} \quad \text{en } P_\nu, \qquad -\sum_1^\nu p_{-1,\mu} \quad \text{en } P_{\nu+1}.$$

Soit a_ν^2 la quantité positive relative à $\omega_{A,P_\nu,P_{\nu+1}}$ qui intervient dans le calcul de sa norme, comme coefficient indépendant de r. Par une vérification tout à fait analogue à celle que nous avons faite dans le cas des différentielles de deuxième espèce, on peut montrer que si

$$(2.6.2) \qquad \sum_1^\infty \left| \sum_1^\nu p_{-1,\mu} \right|^2 + \sum_1^\infty a_\nu^2 < \infty,$$

la différentielle harmonique $\sum_1^\infty \omega_{A,P_\nu,P_{\nu+1}}$ appartient à $\mathcal{D}_h'^{\mu}$, a une partie analytique A-exacte sur S coupée suivant les chemins l_ν et possède bien aux points P_ν un pôle simple de résidu $p_{-1,\nu}$.

Au lieu de $\omega_{A,P_\nu,P_{\nu+1}} \in \mathcal{D}_h'$ on aurait pu utiliser les différentielles $du_{P_\nu,P_{\nu+1}} \in \mathcal{D}_h'$ exactes sur S coupée le long des chemins l_ν et possédant seulement en P_ν et $P_{\nu+1}$ les pôles simples de résidus (2.6.1) (leur existence est donnée par Nevanlinna*). La quantité a^2 relative à ω_{A,P_1,P_2} doit être remplacée par une quantité b^2 car $p_2 - p_1$ et $p_2^* - p_1^*$ sont remplacés par des quantités $p_2' - p_1'$ et $p_2'^* - p_1'^*$ qui dépendent de r (définie de façon analogue). La condition (2.6.2) doit être remplacée par

$$(2.6.3) \qquad \sum_1^\infty \left| \sum_1^\nu p_{-1,\mu} \right|^2 + \sum_1^\infty b_\nu^2 < \infty ;$$

et l'on peut énoncer :

PROPOSITION 2.6. — *Sur une surface* $S \in C_0$, *la condition* (2.6.2) [*resp.* (2.6.3)] *est suffisante pour l'existence d'une différentielle harmonique* $\in \mathcal{D}_h'^{\mu}$ *dont la partie analytique est* A-*exacte sur* S_l^* (*resp. d'une différentielle harmonique exacte sur* S_l) *ayant des pôles simples en des points* (P_ν), *satisfaisant à l'hypothèse* H_1, *et de résidus* $(p_{-1,\nu})$ *donnés en ces points.*

Remarque. — Dans le cas où une différentielle $\Omega \in \mathcal{D}_h'^{\mu}$ n'a que des pôles

simples, un calcul facile montre que ses composantes $d\mathfrak{g}$ et $\frac{1}{2}(\varphi^r+\overline{\varphi}^r)$ par rapport aux domaines S_n, sont orthogonales dans S_n.

CHAPITRE III.

Fonctions multiplicatives et fonctions uniformes.

Je me propose maintenant d'étudier plus particulièrement, sur une surface de Riemann ouverte S, des fonctions méromorphes uniformes c'est-à-dire des intégrales de différentielles analytiques de deuxième espèce exactes, qui peuvent admettre une infinité de singularités polaires isolées. Suivant une idée qu'on trouve par exemple chez H. Weyl*, je vais considérer ces fonctions comme un cas particulier des fonctions multiplicatives, c'est-à-dire des fonctions méromorphes dont la valeur en un point P de S, suivie par continuité le long d'un cycle, est multipliée par un facteur constant dépendant seulement de la classe d'homologie du cycle, quand on parcourt le cycle

$$f(\mathrm{CP})=\mu_{\mathrm{C}}f(\mathrm{P});$$

$f(\mathrm{CP})$ indique la valeur de la fonction f en P, obtenue après avoir parcouru le cycle C, en supposant que cette valeur au point initial soit $f(\mathrm{P})$; μ_{C} est le multiplicateur que l'on suppose être de module 1. On est alors amené à considérer une classe particulière de fonctions uniformes, à savoir celle dont le maximum et le minimum du module sont compris entre deux constantes positives, à l'extérieur d'un voisinage convenable des zéros et des pôles.

1. Fonctions multiplicatives sur un compact.

1.1. Décomposition des fonctions multiplicatives sur une surface de Schottky. — Soit f une fonction multiplicative sur une surface de Schottky $\hat{\mathrm{D}}$. Pour fixer les idées, nous supposerons tracées sur $\hat{\mathrm{D}}$ un système de rétrosections symétriques (si R désigne une rétrosection, $\tilde{\mathrm{R}}$ est aussi une rétrosection du système) qui rend $\hat{\mathrm{D}}$ simplement connexe; nous entendons alors par $f(\mathrm{P})$ (ou simplement f) une détermination bien choisie de la fonction sur ce domaine simplement connexe. Nous appellerons D'_0 la composante de D' le long de laquelle $\hat{\mathrm{D}}$ n'est pas coupée.

A partir de f on peut former deux fonctions f_1 et f_0 données par

$$f_1=f(\tilde{f})^{-1},\qquad f_0=f(\tilde{\tilde{f}}), \tag{1.1.1}$$

de sorte que

$$f=(f_1f_0)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.2}$$

f_1 jouit de la propriété caractéristique d'avoir son module égale à 1 sur la frontière D′ de D. La propriété caractéristique de f_0 est d'avoir son argument constant sur chaque composante de D′ (il est nul sur D'_0). L'ensemble des fonctions f forme un groupe abélien M par rapport à la multiplication. En désignant par M_1 (resp. M_0) les sous-groupes de M dont les éléments sont de module 1 (resp. d'argument constant, nul sur D'_0) sur D′, on peut énoncer :

Proposition 1.1.1. *Tout élément de* M *se décompose de façon unique en la racine du produit d'un élément de* M_1 *par un élément de* M_0.

En effet, si f'_1 et f'_0 étaient deux autres composantes de f la fonction $f'_0(f_0)^{-1}$ aurait un module 1 sur D′ et un argument constant sur chaque composante de D′ (nul sur D'_0) : ainsi $f'_0(f_0)^{-1}=1$, et par suite, également $f_1=f'_1$.

Ce résultat est également moins fort que celui du chapitre I sur la décomposition additive de $\mathcal{S}_a$, car la racine du produit d'un élément de M_1 par un élément de M_0 n'est pas forcément un élément de M : il ne peut être question ici de décomposition en produit direct.

Les éléments f_1 et f_0 de M_1 et M_0 satisfont aux relations

$$f_1=(\tilde{\bar{f}}_1)^{-1}, \qquad \tilde{\bar{f}}_0=f_0, \tag{1.1.3}$$

où $\tilde{\bar{f}}_1$ et $\tilde{\bar{f}}_0$ désignent les valeurs imaginaires conjugées de f_1 et f_0 au point symétrique du point considéré (comme aux premiers chapitres). On voit qu'à un zéro ou un pôle de f_1 (resp, f_0) correspond un pôle ou un zéro (resp. un zéro ou un pôle) au point symétrique sur $\hat{D}$. Inversement si une fonction, méromorphe multiplicative sur $\hat{D}$, a un diviseur satisfaisant à $d^{-1}=\tilde{d}$ (resp. $d=\tilde{d}$), elle appartient à M_1 (resp. M_0) car elle est définie de façon unique par son diviseur et elle satisfait donc à la relation (1.1.3) qui caractérise l'appartenance à M_1 (resp. M_0). On peut donc énoncer :

Proposition 1.1.2. — *Pour qu'une fonction f appartienne à* M_1 *(resp.* M_0*) il faut et il suffit qu'à chaque zéro ou pôle d'ordre r sur* D *ou* $\tilde{D}$ *corresponde un pôle ou un zéro d'ordre r au point symétrique sur* $\tilde{D}$ *ou* D *(resp. un zéro ou un pôle d'ordre r). Les multiplicateurs de f_1 (resp. f_0) relatifs à des chemins symétriques sont égaux (resp. imaginaires conjugués). Enfin, f_1 (resp. f_0) a pour multiplicateurs* 1 *sur des cycles conjugués des composantes de* D′ *(resp. sur des cycles homologues aux composantes de* D′*).*

En effet les relations (1.1.3) donnent

$$\arg f_1(\tilde{P})=\arg f_1(P), \qquad \arg f_0(\tilde{P})=-\arg f_0(P),$$

et l'on voit que la propriété énoncée, relative aux multiplicateurs, est bien

vérifiée parce que, par définition, on a (C et $\tilde{C}$ désignant deux chemins symétriques) :

$$\mu_C^1 = \exp i \int_C d(\arg f_1), \qquad \mu_C^0 = \exp i \int_C d(\arg f_0).$$

$$\mu_{\tilde{C}}^1 = \exp i \int_{\tilde{C}} d(\arg f_1), \qquad \mu_{\tilde{C}}^0 = \exp i \int_{\tilde{C}} d(\arg f_0).$$

D'autre part, sur un chemin $R = -\tilde{R}$, en désignant R_D et $R_{\tilde{D}}$ les parties de R situées dans D et $\tilde{D}$:

$$\mu_R^1 = \exp\left[i \int_{R_D} d(\arg f_1) + i \int_{R_{\tilde{D}}} d(\arg f_1) \right] = \exp\left[i \int_{R_D} d(\arg f_1) - i \int_{R_D} d(\arg f_1) \right] = 1.$$

La dernière propriété énoncée sur f_0 découle immédiatement du fait que $\arg_{D'} f_0 = \text{const.}$

1.2. Composante dans M_1 d'une fonction multiplicative sur D. — On sait que sur une surface de Riemann close une fonction multiplicative est déterminée de façon unique (à une constante multiplicative près, que je néglige systématiquement) par la donnée de son diviseur $d = \prod_{\nu,\mu} P_\nu^{h_\nu} Q_\mu^{k_\mu} (h_\nu > 0,\ k_\mu > 0)$, à la seule condition que la somme de ses zéros comptés avec leur ordre de multiplicité soit égale à la somme de ses pôles comptés également avec leur ordre de multiplicité, autrement dit si et seulement si $\sum_\nu h_\nu = h = k = \sum_\mu k_\mu$ (H. Weyl*).

Considérons une fonction F, multiplicative sur $\bar{D}$, à zéros et pôles situés dans D. Soit d son diviseur. Au diviseur $d\tilde{d}^{-1}$ correspond une et une seule fonction multiplicative sur $\hat{D}$, soit f. La fonction $\tilde{f}$ a pour diviseur $\tilde{d}d^{-1}$; comme elle est également déterminée de façon unique, elle est égale à f^{-1}. Ainsi on voit que $f = f_1$ appartient à M_1 et l'on peut énoncer :

Proposition 1.2. — *A toute fonction multiplicative* F *sur* $\bar{D}$, *à zéros et pôles situés dans* D, *correspond une et une seule fonction multiplicative sur* $\hat{D}$, *appartenant à* M_1, *soit* f_1, *telle que la fonction* $F f_1^{-1}$ *soit sans zéros et sans pôles dans* $\bar{D}$.

1.3. Base des différentielles de première espèce sur $\hat{D}$. — Pour énoncer le théorème d'Abel relatif aux fonctions uniformes de M_1 et M_0, sur une surface de Schottky $\hat{D}$, sous la forme utilisée par H. Weyl pour les surfaces closes quelconques, nous avons besoin d'expliciter une base du système des différentielles de première espèce sur $\hat{D}$.

Considérons une base d'homologie canonique (n° 1.3 du chapitre I) du

groupe d'homologie des cycles sur $\hat{D}$. Si g et c désignent le genre et le nombre de courbes frontières de D, on peut désigner les cycles de la base par

$$(1.3.1)\quad \begin{cases} A_1, & B_1; & A_2, & B_2; & \dots; & A_g, & B_g; \\ \tilde{A}_1, & -\tilde{B}_1; & \tilde{A}_2, & -\tilde{B}_1; & \dots; & \tilde{A}_g, & -\tilde{B}_g; \\ A_{g+1}, & B_{g+1}; & A_{g+2}, & B_{g+2}; & \dots; & A_{g+c-1}, & B_{g+c-1}. \end{cases}$$

J'ai désigné les $c-1$ composantes de D′, distinctes de D′, par les $c-1$ derniers A; $\tilde{A}$ (resp. $\tilde{B}$) désigne le cycle symétrique de A (resp. B), c'est pourquoi apparaît un signe moins qui assure que le nombre d'intersections de deux cycles $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ de même rang est toujours égal à $+1$. On a évidemment les relations

$$(1.3.2)\qquad A_\nu \sim \tilde{A}_\nu, \qquad B_\nu \sim -\tilde{B}_\nu \qquad (\nu > g).$$

Définissons les différentielles de première espèce φ_C, $C = A_\nu, B_\nu, \tilde{A}_\nu, \tilde{B}_\nu$, en choisissant la partie réelle de leurs périodes nulle pour tout cycle différent de C, égale à 1 pour C.

A partir de la relation générale [chap. I, formule (2.2.2)], vrai pour une différentielle φ et un cycle quelconque :

$$(1.3.3)\qquad \int_{\tilde{C}} \varphi = \int_C \tilde{\varphi},$$

on a

$$(1.3.4)\qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{A_\nu} = \varphi_{\tilde{A}_\nu}, \qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{B_\nu} = \varphi_{\tilde{B}_\nu} \qquad (\nu \leq g);$$

d'autre part, en raison de (1.3.2), on a

$$(1.3.5)\qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{A_\nu} = \varphi_{A_\nu}, \qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{B_\nu} = -\varphi_{B_\nu} \qquad (\nu > g).$$

1.4. Le théorème d'Abel pour les fonctions uniformes de M_0 et M_1. — La propriété énoncée par le théorème d'Abel est que les zéros (P_ν) et les pôles (Q_ν) d'une fonction analytique uniforme sur une surface de Riemann close sont tels que la somme des valeurs aux zéros (P_ν) des intégrales de différentielles de première espèce φ est égale à la somme des valeurs aux pôles (Q_ν) de ces intégrales, modulo une somme de périodes de φ. Pour une fonction $f_1 \in M_1$ qui serait uniforme, on aurait alors, en désignant par (P_ν) et (Q_ν) ses zéros et ses pôles dans D :

$$(1.4.1)\quad \begin{cases} 2\sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} \varphi_{B_\mu} - 2\sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} \varphi_{A_\mu} = 0 \pmod 1 & (\mu > g), \\ \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} (\varphi_{A_\mu} + \varphi_{\tilde{A}_\mu}) - \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} (\varphi_{A_\mu} - \varphi_{\tilde{A}_\mu}) = 0 \pmod 1 & (\mu \leq g), \\ \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} (\varphi_{B_\mu} - \varphi_{\tilde{B}_\mu}) - \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} (\varphi_{B_\mu} - \varphi_{\tilde{B}_\mu}) = 0 \pmod 1 & (\mu \leq g); \end{cases}$$

P_0 désigne un point choisi arbitrairement sur D'. Le fait important de (1.4.1) est qu'il n'y figure aucun $\varphi_{B_\nu}(\nu > g)$, les relations correspondantes étant automatiquement satisfaites ([38]).

Pour une fonction $f_0 \in M_0$ qui serait uniforme on aurait de la même manière, en désignant également par (P_ν) et (Q_ν) ses zéros et ses pôles dans D (ils doivent être en nombre égal si on les compte avec leur ordre de multiplicité) :

$$(1.4.2)\quad \begin{cases} 2\sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} \varphi_{B_\mu} - 2\sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} \varphi_{B_\mu} = 0 \pmod 1 & (\mu > g), \\ \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} (\varphi_{A_\mu} + \varphi_{\tilde{A}_\mu}) - \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} (\varphi_{A_\mu} + \varphi_{\tilde{A}_\mu}) = 0 \pmod 1 & (\mu \leq g), \\ \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} (\varphi_{B_\mu} + \varphi_{\tilde{B}_\mu}) - \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} (\varphi_{B_\mu} + \varphi_{\tilde{B}_\mu}) = 0 \pmod 1 & (\mu \leq g). \end{cases}$$

2. Convergence des différentielles de Schottky-Ahlfors de $\mathfrak{S}_0$.

Au paragraphe 3 nous donnerons une généralisation du théorème d'Abel en approchant une fonction uniforme sur une surface de Riemann ouverte S par des fonctions multiplicatives de la classe M_1 sur les domaines S_n d'une exhaustion de S. Les égalités généralisant (1.4.1) seront obtenues par passage à la limite et c'est pourquoi il est intéressant de connaître la limite des différentielles $\mathcal{R}(\varphi_{A_\nu} - \varphi_{\tilde{A}_\nu})$ [resp. $\mathcal{R}(\varphi_{B_\nu} - \varphi_{\tilde{B}_\nu})$] quand le domaine D parcourt (S_n). C'est l'objet du présent paragraphe.

Les différentielles $\mathcal{R}(\varphi_{A_\nu} + \varphi_{\tilde{A}_\nu})$ [resp. $\mathcal{R}(\varphi_{B_\nu} + \varphi_{\tilde{B}_\nu})$] du paragraphe 1, appartiennent à l'espace $\mathfrak{S}_0^*$ des différentielles de Schottky (de première espèce) sur $\hat{D}$: en effet, sur D',

$$\mathcal{J}(\varphi_{A_\nu} + \varphi_{\tilde{A}_\nu}) = 0 = [\mathcal{R}(\varphi_{A_\nu} + \varphi_{\tilde{A}_\nu})]^* \qquad (\text{resp. } 0 = \mathcal{J}(\varphi_{B_\nu} + \varphi_{\tilde{B}_\nu}) = [\mathcal{R}(\varphi_{B_\nu} + \varphi_{\tilde{B}_\nu})]^*).$$

Quand D parcourt une exhaustion d'une surface de Riemann $S \in C_{HD}$, ces différentielles convergent donc vers une différentielle harmonique de norme finie qui a comme unique période non nulle et égale à 1, la période relative à B_ν (resp. A_ν) : c'est une conséquence des résultats d'Ahlfors [1] sur les différentielles de première espèce. Pour les différentielles $\mathcal{R}(\varphi_{A_\nu} - \varphi_{\tilde{A}_\nu})$ [resp. $\mathcal{R}(\varphi_{B_\nu} - \varphi_{\tilde{B}_\nu})$] du paragraphe 1 les résultats d'Ahlfors ne permettent pas de conclure sur leur convergence quand D parcourt une exhaustion de S, car ces différentielles appartiennent à la classe ([39]) $\mathfrak{S}_0$. Pourtant nous allons voir qu'elles convergent encore vers la différentielle harmonique de norme finie qui a comme seule

---

([38]) Dans les relations (1.4.1) et (1.4.2) il faut évidemment faire figurer un point P_ν ou Q_ν autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité comme zéro ou pôle.

([39]) Différentielles de Schottky harmoniques, de première espèce, nulles sur D'.

période non nulle et égale à 1 la période relative à B_1 (resp. A_1) sur une surface $S \in C_0$. Ce résultat pourra être atteint en utilisant une généralisation d'un lemme de Johansson* ; son application est possible car les différentielles considérées sont exactes en dehors d'un compact. De façon générale, je démontrerai la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Supposons données, sur un compact S_0 d'une surface de Riemann $S \in C_0$, des périodes relatives à des cycles non homologues aux composantes de la frontière S'_0 de S_0, et des parties singulières relatives à un nombre fini de points de S_0 ; la suite des différentielles harmoniques de Schottky-Ahlfors appartenant aux espaces $\mathfrak{S}_0$ relatifs aux domaines (S_n) d'une exhaustion de S et ayant les périodes et les parties singulières données sur S_0, converge uniformément, sur tout compact extérieur aux singularités, vers la différentielle harmonique unique sur S, de norme finie à l'extérieur de S_0, ayant ces périodes et ces parties singulières aux points donnés sur S_0, si et seulement si la somme des résidus des singularités données est nulle.*

Je démontrerai d'abord la généralisation suivante d'un lemme de Johansson :

LEMME (JOHANSSON). — *Étant donné deux compacts D_1 et $D_2 (\overline{D}_1 \subset D_2)$ sur une surface de Riemann, et deux fonctions harmoniques dans $\overline{D_2 - D_1}$, u et v, $u - v$ étant harmonique dans $\overline{D}_2$, telles que*

$$O_{D'_2}(u) \leq O_{D'_1}(u), \qquad O_{D'_2}(v) \leq O_{D'_1}(v),$$

$O_{D'}(f)$ désignant l'oscillation de f sur D', il existe un nombre positif K indépendant de u et v tel que

$$O_{D'_1}(v) \leq K O_{D'_1}(u).$$

En effet

$$O_{D'_2}(v - u) \leq O_{D'_2}(v) + O_{D'_2}(u) \leq O_{D'_1}(v) + O_{D'_2}(u).$$

Or un lemme de Sario ([40]) dit que

$$O_{D'_1}(v - u) \leq q O_{D'_2}(v - u) \qquad (0 < q < 1).$$

q indépendant de $v - u$. Ainsi

$$O_{D'_1}(v) \leq O_{D'_1}(v - u) + O_{D'_1}(u) \leq q O_{D'_1}(v) + (1 + q) O_{D'_1}(u),$$

ce qui démontre le lemme.

J'en viens maintenant à la proposition 2. Soit ω_ν les différentielles harmoniques de Schottky-Ahlfors appartenant aux espaces $\mathfrak{S}_0$ relatifs aux domaines (S_n) d'une exhaustion de S et définies par les périodes et les demi-périodes nulles et les parties singulières données sur S_0 (exactes et régulières

([40]) J'utilise le lemme sous sa forme énoncée par Sario [2] (lemme 2). Il a été énoncé et démontré par Sario [3] sous une forme très voisine.

en dehors de S_0 et $\tilde{S}_0$) : ces différentielles existent parce que la somme des résidus des parties singulières est nulle et d'après la proposition 1.1.3 du chapitre II, il suffit pour cela que cette somme soit réelle.

On peut utiliser le lemme de Johansson avec

$$v = \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu, \qquad u = \int_{P_1}^{P} \omega_1, \qquad (P_\nu \in S'_\nu,\ P \in S_1),$$

et les domaines S_0 et S_1 ; d'une part $O_{S'_1}(u) \equiv 0$; d'autre part

$$O_{S'_0} \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu \geqq O_{S'_1} \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu,$$

car $\int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu$, $P \in S_\nu$ est exacte dans $S_\nu - S_0$, nulle sur S'_ν et $\left(^{41}\right) \Big| \omega_\nu = \frac{1}{2}\left(\varphi_\nu + \overline{\varphi}_\nu\right)\Big]$:

$$\int_{S'_\nu} \omega^*_\nu = \frac{1}{i} \mathcal{J} \int_{S'_\nu} \varphi_\nu = 2\pi \sum \mathcal{R} \text{ résidus } \varphi_\nu = 0,$$

ce qui entraîne que la moyenne sur S'_ν de la dérivée normale de v est nulle, c'est-à-dire que cette fonction prend la valeur zéro dans $S_\nu - S_0$. Ainsi donc le lemme de Johansson donne

$$O_{S'_0} \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu < B,$$

B désignant une borne finie indépendante de ν ; comme v prend au moins une fois la valeur zéro sur S'_0, on a dans $S_\nu - S_0$:

$$\left| \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu \right| < O_{S'_0} \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu < B.$$

On a la même inégalité en des points intérieurs à S_0, distincts des points singuliers, si l'on suppose tracées dans S_0 des coupures de façon à entraîner l'uniformité des intégrales considérées (la constante B est évidemment à remplacer par une quantité finie mais qui augmente indéfiniment quand on se rapproche des points singuliers). Les intégrales étant bornées dans leur ensemble à l'extérieur d'un voisinage des singularités, sur S coupée convenablement, forment une famille normale et l'on peut extraire de toute suite partielle une suite uniformément convergente sur tout compact de S (coupée convenablement) ne contenant pas de points singuliers. D'autre part, les limites des suites partielles convergentes diffèrent d'une constante. Ceci démontre que la condition énoncée dans la proposition est bien suffisante. Il est évident qu'elle est nécessaire en vertu du théorème des résidus vrai sur une surface parabolique pour une différentielle ayant un nombre fini de singularités et de périodes non nulles et appartenant à $\mathcal{O}'_h$ (Nevanlinna*).

---

(41) On utilise ainsi dans sa totalité l'hypothèse faite sur la somme de résidus

3. Fonctions de la classe $\mathcal{B}_a$ sur une surface de Riemann ouverte.

Les résultats du paragraphe 2 relatifs aux fonctions multiplicatives sur un compact nous donnent moins de propriétés intéressantes que les résultats correspondants du paragraphe 2 du chapitre I relatifs aux fonctions considérées du point de vue additif. Ainsi nous ne pourrons pas obtenir pour les fonctions multiplicatives, sur une surface de Riemann ouverte, de théorème général analogue au théorème 3.1. Pourtant, la proposition particulière 1.2 nous suggère de considérer une classe $\mathcal{B}_a$ de fonctions multiplicatives analogue à $\mathcal{D}_a$.

3.1. L'ESPACE $\mathcal{B}_a$. — Au lieu de la norme de F nous considérons maintenant les maximums de $|F|$ et de $|F^{-1}|$ et nous posons :

DÉFINITION 3.1.1. — *L'espace $\mathcal{B}_a$ est l'ensemble des fonctions multiplicatives sur une surface de Riemann, de zéros et de pôles (P_ν, Q_ν) tels qu'il existe un voisinage V de (P_ν, Q_ν) dont chaque composante connexe est compacte et tel qu'à l'extérieur de V, $|F|$ et $|F^{-1}|$ soient bornés.*

En introduisant une structure uniforme $\mathfrak{U}$ sur S et les notations U_0, A_a, U^* du chapitre I, on peut aussi considérer le sous-espace $\mathcal{B}_a^{\mathfrak{U}}$ de $\mathcal{B}_a$ défini par :

DÉFINITION 3.1.2. — *L'espace $\mathcal{B}_a^{\mathfrak{U}}$ est l'ensemble des fonctions multiplicatives sur une surface de Riemann, de zéros et de pôles (P_ν, Q_ν), telles qu'il existe A et U_0 satisfaisant à :*

1° *deux points de S appartenant à une composante connexe de $U((P_\nu, Q_\nu))$, $U \subset U_0$, sont au moins voisins d'ordre $A(U) \subset U^*$;*

2° *il existe deux fonctions positives $b(U)$ et $B(U)$ satisfaisant à*

$$0 < b(U) < \min_{S-U} |F| < \max_{S-U} |F| < B(U) < \infty,$$

avec

$$\lim_{\mathfrak{U}} b(U) = 0, \qquad \lim_{\mathfrak{U}} B(U) = \infty, \qquad \textit{pour tout } U \subset U_0.$$

Le produit ([42]) de deux fonctions de $\mathcal{B}_a^{\mathfrak{U}}$ est encore une fonction de $\mathcal{B}_a^{\mathfrak{U}}$, ce qui n'est pas forcément vrai pour $\mathcal{B}_a$. En effet, comme au chapitre I (n° 3.2), si (P_ν, Q_ν), U_0, A, (H_ν, K_ν), V_0, B désignent les zéros, les pôles, l'entourage et l'application correspondant à F et G respectivement, on peut prendre pour W_0 et C un entourage satisfaisant à

$$\overline{W_0 \circ B(W_0)} \subset U_0,$$

et comme application C l'application $W \to A(W \circ B(W))$. Dans S-W on a évidemment, b_F, b_G, B_F et B_G désignant les bornes relatives à F et G :

$$0 < b_{FG}(W) = b_F(W)\, b_G(W) < |FG| < B_F(W) B_G(W) = B_{FG}(W) < \infty.$$

([42]) $\mathcal{B}_a^{\mathfrak{U}}$ est un groupe abélien.

Exemple. — Considérons la fonction

$$F=\frac{\alpha^2(z)}{\alpha^2(-z)},\qquad \alpha(z)=\beta(z)\beta\left(\frac{1}{z}\right)(1+z),\qquad \beta(z)=\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{k^n}\right),$$

où k est entier supérieur à 1, dans le plan z (surface S). Définissons comme métrique sur S la métrique du plan complexe à l'extérieur du cercle unité et la métrique $|dZ|$, $Z=\frac{1}{z}$, à l'intérieur du cercle unité. La fonction F est invariante quand on change z en kz. A l'extérieur d'un voisinage V_ε, $\varepsilon<\frac{k-1}{2}$, des points $z=\pm 1$, elle est bornée inférieurement et supérieurement, dans la couronne $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)<|z|<\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$, par $b(\varepsilon)>0$ et $B(\varepsilon)<\infty$; elle est donc bornée inférieurement et supérieurement, par les mêmes bornes, dans $S-V_\varepsilon((P_\nu))$, $(P_\nu)=(\pm k^{1-n})$, c'est-à-dire à l'extérieur d'un entourage quelconque des zéros et des pôles de F. Cette fonction est donc bien de la classe $\mathcal{B}_a^{\mathrm{II}}$. On pourrait donner de la même manière des exemples sur des surfaces plus générales, de genre infini.

3.2. Les fonctions de $\mathcal{B}_a$, limites de fonctions de M_1. — Soit F une fonction de $\mathcal{B}_a$ ayant pour pôles et zéros l'ensemble (P_ν) de points de S. Soit (S_n) une exhaustion de S telle que $V((P_\nu))\cap S'_n=\emptyset$ (V désigne le voisinage intervenant dans la définition 3.1.1). Soit f_n les fonctions ([43]) de M_1 correspondant à F et aux domaines S_n, normées de façon à fixer la constante multiplicative arbitraire dont elles dépendent. La suite des fonctions harmoniques régulières $(\log|F|-\log|f_n|)$ est bornée dans son ensemble, parce que F appartient à $\mathcal{B}_a$ et que, sur S'_n, $|f_n|=1$. Ainsi on peut en extraire une suite d'indice n', convergent uniformément sur tout compact vers une fonction harmonique bornée u; F est égale à la limite de la suite f_n, à une fonction $\exp(u+iv)$ multiplicative près, qui n'a ni zéros ni pôles et dont le module est logarithmiquement borné. Sur une surface où toute fonction multiplicative de module logarithmiquement borné, sans zéros et sans pôles est une constante, c'est-à-dire sur une surface où toute fonction harmonique bornée est constante (leur classe est notée C_{HB}), on peut donc énoncer :

Proposition 3.2. — *Sur une surface de Riemann* $S\in C_{HB}$, *toute fonction multiplicative* $F\in\mathcal{B}_a$ *est la limite uniforme sur tout compact, des fonctions* $f_nF(P_0)f_n^{-1}(P_0)$, *multiplicatives sur* S_n, f_n *données par la proposition* 1.2, P_0 *point choisi sur* S.

Comme conséquence directe de cette proposition on a le théorème d'unicité :

Théorème 3.2. — *Sur une surface de Riemann* $S\in C_{HB}$, *toute fonction multiplicative* $F\in\mathcal{B}_a$ *est déterminée de façon unique par son diviseur.*

([43]) J'écris f_n au lieu de $f_{1,n}$, pour simplifier.

3.3. Une généralisation de la condition nécessaire d'Abel pour les fonctions uniformes de $\mathcal{B}_a$ sur $S \in C_{HB}$. — Considérons une fonction $F \in \mathcal{B}_a$, uniforme sur une surface de Riemann $S \in C_{AB}$. Soient (f_n) les fonctions multiplicatives sur (S_n) données par la proposition 3.2, convenablement normées qui convergent vers F; appelons μ_C^n leurs multiplicateurs relatifs à un cycle

$$\mu_C^n = \exp\left[i \int_C d(\arg f_n) \right].$$

Ces multiplicateurs μ_C^n convergent donc uniformément vers 1. C'est en explicitant ce fait que nous allons obtenir une condition nécessaire pour que F soit uniforme, condition qui généralise en partie le théorème d'Abel : dans le cas d'un nombre fini de singularités, le théorème d'Abel consiste précisément en ce que la condition est nécessaire et suffisante.

Soit donc A_ν^n, B_ν^n et leurs symétriques, les cycles d'une base (44) d'homologie canonique sur $\hat{S}_n$; $\omega_{A_\nu^n}$, $\omega_{B_\nu^n}$, $\omega_{\tilde{A}_\nu^n}$, $\omega_{\tilde{B}_\nu^n}$ les différentielles de Schottky correspondantes définies comme au n° 1.3. Si (P_ν) et (Q_ν) désignent les zéros et les pôles de F, appelons I_n et J_n l'ensemble des indices ν correspondant aux zéros et aux pôles contenus dans S_n, de genre g_n et dont le nombre de courbes frontières est c_n. On sait (H. Weyl*) que les multiplicateurs de f_n sont égaux aux caractères intégraux de son diviseur; on peut donc écrire, en tenant compte des propriétés de symétrie de f_n, comme au n° 1.4 ($P_{0,n} \in S_n'$) :

$$\mu_{B_\mu^n}^n = \exp - 2i\pi \left[2 \sum_{I_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{P_\nu} \omega_{B_\mu^n} - 2 \sum_{J_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{Q_\nu} \omega_{B_\mu^n} \right] \qquad (g_n < \mu \leq g_n + c_n - 1),$$

$$\mu_{A_\mu^n}^n = \exp - 2i\pi \left[\sum_{I_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{P_\nu} \left(\omega_{A_\mu^n} - \omega_{\tilde{A}_\mu^n} \right) - \sum_{J_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{Q_\nu} \left(\omega_{A_\mu^n} - \omega_{\tilde{A}_\mu^n} \right) \right] \qquad (\mu \leq g_n),$$

$$\mu_{B_\mu^n}^n = \exp - 2i\pi \left[\sum_{I_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{P_\nu} \left(\omega_{B_\mu^n} - \omega_{\tilde{B}_\mu^n} \right) - \sum_{J_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{Q_\nu} \left(\omega_{B_\mu^n} - \omega_{\tilde{B}_\mu^n} \right) \right] \qquad (\mu \leq g_n).$$

En choisissant convenablement les contours d'intégration, on voit donc que les zéros et les pôles d'une fonction uniforme de $\mathcal{B}_a$ sur $S \in C_{HB}$ doivent satisfaire aux conditions

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \lim_n \left[\sum_{I_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{P_\nu} \omega_{B_\mu^n} - \sum_{J_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{Q_\nu} \omega_{B_\mu^n} \right] = 0 & (g_n < \mu \leq g_n + c_n - 1), \\ \lim_n \left[\sum_{I_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{P_\nu} \left(\omega_{A_\mu^n} - \omega_{\tilde{A}_\mu^n} \right) - \sum_{J_n} \mathcal{R} \int_{P_{0,n}}^{Q_\nu} \left(\omega_{A_\mu^n} - \omega_{\tilde{A}_\mu^n} \right) \right] & (\mu \leq g_n), \\ \lim_n \left[\sum_{I_n} \mathcal{R} \int_{P_0}^{P_\nu} \left(\omega_{B_\mu^n} - \omega_{\tilde{B}_\mu^n} \right) - \sum_{J_n} \mathcal{R} \int_{P_0}^{Q_\nu} \left(\omega_{B_\mu^n} - \omega_{\tilde{B}_\mu^n} \right) \right] & (\mu \leq g_n). \end{cases}$$

(44) Quand $\nu \leq g_n$, A_ν^n et B_ν^n sont égaux à A_ν, B_ν, les cycles (A_ν, B_ν) formant une base d'homologie canonique sur S; je leur laisse l'indice n pour indiquer que je les considère sur S; cela me permet de parler de $\tilde{A}_\nu^n$ et $\tilde{B}_\nu^n$ en sous-entendant que je considère les symétriques sur $\tilde{S}_n$.

On peut essayer de faire des hypothèses supplémentaires qui permettent d'énoncer cette condition dans des cas moins généraux mais sous une forme plus simple. Il se pose alors la question de savoir dans quelles conditions on peut intervertir le passage à la limite et la sommation qui figure dans (3.3.1). Considérant une surface S parabolique ($\in C_0$), on trouve ainsi qu'il faut faire des hypothèses sur la densité des zéros et des pôles sur S, hypothèses dont la plus simple est par exemple :

Hypothèse H_2. — 1° La suite des points (P_ν, Q_ν) est telle que pour toute suite convergente de fonctions harmoniques (u_n), définies dans les domaines (S_n) d'une exhaustion de S, bornées dans leur ensemble, $u_n(P_0)=0$, $P_0 \in S_0$, on ait

$$\lim_n \sum_{I_n} u_n(P_\nu) = 0, \qquad \lim_n \sum_{J_n} u_n(Q_\nu) = 0,$$

I_n et J_n étant l'ensemble des indices ν des points P_ν et Q_ν appartenant à S_n.

2° Si p_n et q_n désignent le nombre des zéros et des pôles dans S_n, comptés avec leur ordre de multiplicité : $\lim_n (p_n - q_n) = 0$.

C'est bien là une hypothèse sur la densité de l'ensemble (P_ν, Q_ν) car si cet ensemble ne comprend qu'un nombre fini de points le nombre des zéros doit être égal au nombre des pôles et elle est automatiquement satisfaite, puisque toute suite convergente de fonctions harmoniques bornées dans leur ensemble, nulles en un point, converge vers zéro sur une surface parabolique.

Étudions maintenant l'effet qu'aurait l'hypothèse H_2, faite sur les pôles et les zéros d'une fonction uniforme F, sur l'énoncé de la condition (3.3.1). Celle-ci s'écrit aussi, en substituant au point $P_{0,n} \in S'_n$ un point P_0 indépendant de n, à condition d'ajouter alors dans les trois équations, au premier membre, respectivement :

$$(3.3.2) \qquad \begin{cases} (p_n - q_n)\,\mathcal{R}\displaystyle\int_{P_{0,n}}^{P_0} \varphi_{B_\mu^n} & (g_n < \mu \leq g_n + c_n - 1), \\ (p_n - q_n)\,\mathcal{R}\displaystyle\int_{P_{0,n}}^{P_0} \left(\varphi_{A_\mu^n} - \varphi_{\tilde{A}_\mu^n}\right) & (\mu \leq g_n), \\ (p_n - q_n)\,\mathcal{R}\displaystyle\int_{P_{0,n}}^{P_0} \left(\varphi_{B_\mu^n} - \varphi_{\tilde{B}_\mu^n}\right) & (\mu \leq g_n). \end{cases}$$

Or les résultats du paragraphe 2 donnent la convergence uniforme sur tout compact des fonctions

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{P_0} \varphi_{B_\mu^n} & (g_n < \mu \leq g_n + c_n - 1), \\ \displaystyle\int_{P_0} \left(\varphi_{A_\mu^n} - \varphi_{\tilde{A}_\mu^n}\right) & (\mu \leq g_n), \\ \displaystyle\int_{P_0} \left(\varphi_{B_\mu^n} - \varphi_{\tilde{B}_\mu^n}\right) & (\mu \leq g_n). \end{cases}$$

respectivement vers zéro, $\int_{P_0} \varphi_{A_\mu}$, $\int_{P_0} \varphi_{B_\mu}$ et nous dit que ces fonctions (3.5) sont bornées dans leur ensemble sur S convenablement coupée. Dans le cas de l'hypothèse H_2 la condition (3.3.1) se réduit donc à la suivante [les termes (3.3.2) tendent vers zéro car $\lim_n (p_n - q_n) = 0$] :

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \sum_\nu \mathcal{R} \int_{P_0}^{P_\nu} \varphi_{A_\mu} - \sum_\nu \mathcal{R} \int_{P_0}^{Q_\nu} \varphi_{A_\mu} = 0, \\ \sum_\nu \mathcal{R} \int_{P_0}^{P_\nu} \varphi_{B_\mu} - \sum_\nu \mathcal{R} \int_{P_0}^{Q_\nu} \varphi_{B_\mu} = 0. \end{cases}$$

On peut donc énoncer :

Condition d'Abel. — Pour qu'une fonction analytique F appartenant à $\mathcal{B}_a$ de pôles et de zéros (P_ν, Q_ν), sur une surface $S \in C_{HB}$, soit uniforme il faut que les conditions (3.3.1) soient réalisées. Si $S \in C_0$ et si l'hypothèse H_2 est réalisée il faut que la somme des valeurs aux zéros de F d'une intégrale de différentielle harmonique de première espèce et de norme finie, à un nombre fini de périodes non nulles, soit égale à la somme de ses valeurs aux pôles de F.

BIBLIOGRAPHIE.

L. Ahlfors :

[1] *Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions* (*Comm. Math. Helv.*, t. 24, 1950, p. 100-134).

[2] *Normalintegrale auf offenen Riemannschen Flächen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. 35, 1947, p. 5-24).

P. Appepl et E. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, Paris, 1929.

R. Bader, *Différentielles sur une surface de Riemann ouverte* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1951, 1564-1565).

P. Bidal et G. de Rham, *Les formes différentielles harmoniques* (*Comm. Math. Helv.*, t. 19, 1946, p. 1-49).

N. Bourbaki :

[1] *Algèbre*, t. I, chap. 2 (*Algèbre linéaire*), Paris, 1947.

[2] *Topologie générale*, chap. 2 (*Structures uniformes*), Paris, 1940.

[3] *Topologie générale*, chap. 9 (*Utilisation des nombres réels*), Paris, 1948.

G. de Rham et K. Kodaira, *Harmonic integrals*, Princeton, 1950.

S. Johansson, *Herstellung automorpher Potentiale bei belibieger Hauptkreisgruppen* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. 41, 1912).

---

(45) Il est sous-entendu qu'on choisit des chemins d'intégration convenables et que les sommes en question sont définies comme limite des sommes correspondant aux S_n tels que $\lim_n (p_n - q_n) = 0$.

S. Lefschetz, *Topology*, New-York, 1930.

H. Meschkowski, *Einige Extremal probleme aus der Theorie der konformen Abbildung* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **117**, 1952).

P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Paris, 1927.

P. J. Myrberg, *Uber analytische Funktionen auf transzendenten zweiblattrigen Riemannschen Flächen mit reellen Verzweigungspunkten* (*Acta Math.*, t. 76, 1944).

R. Nevanlinna :

[1] *Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **1**, 1941, 34 pages).

[2] *Uber das Anwachsen des Dirichletintegrals einer analytischer Funktion auf einer Riemannschen Fläche* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **45**, 1948).

[3] *Uniformisierung*, Berlin, 1953.

M. Parreau, *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 3, 1951, p. 103-197).

A. Pfluger, *Uber das Anwachsen eindeutiger analytischer Funktionen auf offene Riemannschen Flächen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **64**, 1949).

L. Sario :

[1] *On open Riemann surfaces* (*Proc. Internat. Cong.*, t. **1**, 1950, p. 398-399).

[2] *Existence des fonctions d'allure donnée sur une surface de Riemann arbitraire* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **229**, 1949, p. 1293-1295).

[3] *A linear operator method on arbitrary Riemann surfaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **72**, 1952, p. 281-295).

[4] *Alternating method on arbitrary Riemann surfaces* (*Pac. J. Math.*, t. 3, 1953, p. 631-645).

S. Stoïlow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1938.

G. Valiron, *Équations fonctionnelles, Applications*, Paris, 1945.

K. I. Virtanen, *Uber Abelsche Integrale auf nullberandeten Riemannschen Flächen von unendlichen Geschlecht* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **56**, 1949, 44 pages).

H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Berlin, 1923.

INFLUENCE
DES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES
DES
EXPOSANTS DANS UNE SÉRIE DE DIRICHLET

PAR M. S. MANDELBROJT.

1. Il existe une liaison intéressante entre deux phénomènes en apparence distincts de la théorie des fonctions : d'une part, la dépendance du caractère d'une fonction représentée par une série de Dirichlet (et surtout de la distribution de ses singularités) de la structure arithmétique de ses exposants, et, d'autre part, le comportement d'une fonction de la classe A (c'est-à-dire, d'une transformée de Fourier d'une fonction intégrable au sens de Lebesgue) à support compact, ou ce qui revient au même, d'après le théorème de Paley-Wiener, le comportement d'une fonction entière de type moyen, intégrable sur la droite réelle (1).

C'est un théorème de composition des singularités qui est à la base de ces considérations. On sait que le célèbre théorème d'Hadamard sur les singularités de $\Sigma a_n b_n z^n$ n'est plus vrai lorsqu'on substitue aux séries de Taylor-D (c'est-à-dire, aux séries de la forme $\Sigma a_n e^{-ns}$) des séries de Dirichlet générales. Mais, avec certaines hypothèses sur la croissance des fonctions en dehors des singularités, et en modifiant, au besoin, « la composante » on peut, comme je l'ai démontré il y a vingt cinq ans, énoncer des théorèmes d'une grande généralité [4]. On trouvera un exposé de mes résultats dans le livre de V. Bernstein [2]. Récemment Agmon [1] a repris le sujet. Dans le théorème d'Agmon, comme dans un des miens, on compose deux séries de types

(1) Le support d'une fonction est la fermeture de l'ensemble où cette fonction est distincte de zéro.

différents (c'est à dire d'exposants différents). Tout en étant obligé de poser des conditions restrictives sur les exposants (aucune restriction sur les exposants n'est imposée dans mes théorèmes), Agmon suppose beaucoup moins que moi sur la croissance des fonctions composantes, en dehors des singularités (²); la « composée » d'Agmon a d'ailleurs la simplicité de celle d'Hadamard, ou de celle que j'ai introduite dans le cas où les composées sont du même type.

Mon théorème le plus général était basé sur l'étude d'une intégrale de la forme

$$\text{(A)} \qquad \int f(s-z)\,\varphi(z)\,\frac{dz}{z^k}$$

étendue sur une droite verticale, les fonctions f et φ étant données par des séries de Dirichlet. Le fait essentiel dans le développement de cette intégrale est exprimé par la circonstance suivante : la transformée de Fourier de $(x+iy)^{-k}$ (considérée comme fonction de y) a comme support une demi-droite. L'idée essentielle d'Agmon consiste à remplacer cette fonction par une fonction dont la transformée de Fourier est à support compact. Il considère, en d'autres mots, une intégrale de la forme

$$\text{(B)} \qquad \int f(s-z)\,\varphi(z)\,\mathrm{H}(z)\,dz,$$

la transformée de Fourier de $\mathrm{H}(iy)$ étant à support compact $\mathrm{H}(z)$ est, par conséquent, une fonction entière, du type moyen, $\mathrm{H}(iy)$ appartenant à L^2.

Ce sont des intégrales de la forme (B) qui vont nous servir. Voici comment on peut résumer, tout en restant formel et intuitif, l'idée générale qui est à la base des considérations de ce Mémoire.

En désignant par C une suite de nombres complexes $\{c_n\}$, et par Λ une suite $\{\lambda_n\}$ avec $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, $\lim \lambda_n=\infty$, on désignera par (C, Λ) la série de Dirichlet $\mathrm{X}=\Sigma c_n e^{-\lambda_n s}$, et l'on dira que cette série est du type Λ. Soient $\mathrm{X}=(\mathrm{C}, \Lambda)$ et $\mathrm{Y}=(\mathrm{B}, \mathrm{M})$ deux séries de Dirichlet (respectivement du type Λ et du type M), et soit ω une fonction de la classe A, c'est-à-dire la transformée de Fourier d'une fonction G appartenant sur la droite à L, dont le support est un compact [c'est-à-dire que $\omega(u)$ s'annule en dehors de ce compact]. Moyennant des hypothèses simples sur les suites Λ et M, on voit que, si le support de ω est assez petit, à tout n correspond, *au plus*, un seul k tel que $\omega(\lambda_k-\mu_n)\neq 0$. La suite $\{p_n\}$, où $p_n=c_k b_n\,\omega(\lambda_k-\mu_n)$ est donc bien définie [avec $p_n=c_{k_n} b_n\,\omega(\lambda_{k_n}-\mu_n)$ si $\omega(\lambda_{k_n}-\mu_n)\neq 0$, et $p_n=0$ si un tel λ_{k_n} n'existe pas]. On désignera pas $\mathrm{H}(\omega; \mathrm{X}, \mathrm{Y})$ la série composée $(\mathrm{P}, \mathrm{M})=\Sigma p_n e^{-\mu_n s}$. Désignons par $\omega(\Lambda-\mathrm{M})$ la suite $\{\omega_n\}$, où $\omega_n=\omega(\lambda_{k_n}-\mu_n)$, ou $\omega_n=0$, selon

(²) Chez Agmon la croissance de la fonction en dehors des singularités, est caractérisée par une fonction $\mathrm{A}(t)$ satisfaisant (25). Chez moi $\mathrm{A}(t)$ était une puissance de t.

que k_n avec $\omega(\lambda_{k_n} - \mu_n) \not\equiv 0$ existe ou non. Un théorème de composition s'énoncera de la manière suivante : Si X appartient à une classe D_1 (classe de séries de Dirichlet qui sera, par exemple, caractérisée par la distribution de ses singularités et par la croissance de la fonction en dehors de ces singularités) et Y à une classe D_2, $H(\omega; X, Y)$ appartient à une classe $[D_1 D_2]$, dont les propriétés sont décrites en partant de celles de D_1 et D_2, à condition, toutefois, que la fonction entière dont ω est la transformée de Fourier croisse d'une manière convenable. Mais du fait qu'une série du type M appartient à une classe, en l'occurence $[D_1 D_2]$, résulte que ses coefficients, ici la suite P, possèdent une certaine propriété qui dépend uniquement des propriétés des classes D_1 et D_2. Il en résulte qu'une propriété de la suite $\omega(\Lambda - M)$, quelle que soit la fonction ω qu'on a caractérisée plus haut, dérive des propriétés des classes D_1 et D_2. Or la série Y sera donnée d'avance, c'est-à-dire que les séries B et M seront convenablement choisies et fixées, de sorte que *avec chaque choix de la fonction* ω, *une propriété de la série* $X = (A, \Lambda)$ *fournit une propriété de la suite* Λ. Ainsi si M est la suite d'entiers positifs, cette propriété de la suite Λ porte sur la partie fractionnaire des λ_n. *Par contre, une propriété de* X, *lorsque la suite* Λ *est donnée, fournit*, comme nous l'avons dit plus haut, *une propriété de toutes les fonctions* ω, *assujetties aux conditions précitées*. Mais ce point de vue sera abordé dans un autre Mémoire.

2. Pour démontrer son théorème de composition dont il a été question plus haut, Agmon a utilisé un lemme qui est une adaptation d'un lemme de Levinson [3], mais ce lemme (3) résulte en réalité aussi, sous une forme constructive et plus précise, d'un théorème que j'ai démontré en 1941 [5].

Nous allons reprendre ces considérations en les complétant et en les adaptant au sujet traité.

LEMME 1. — *Soit* $\{k_n\} = K$ *une suite positive avec* $\Sigma k_n = k < \infty$, *et soit* $a > k$. *La fonction*

$$F(z) = F_{K,a}(z) = \frac{\sin az}{z} \prod \frac{\sin k_n z}{k_n z} \qquad (z = x + iy) \tag{1}$$

est une fonction entière, le produit convergeant uniformément dans tout compact, et l'on a

$$F(z) \not\equiv 0,$$

$$|F(z)| < e^{(a+k)|y| - \Lambda(r)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} a, \tag{2}$$

(3) *Voir* notre lemme 5 qui est plus précis que le lemme d'Agmon. Le lemme 4, dont le lemme 5 est une conséquence, se trouve implicitement dans [5] et [7].

où

$$A(u) = \operatorname{Sup}\left(n \log u + \sum_{1}^{n} \log k_p \right) \qquad (u > 0),$$

$F(x) \in L$, *et la transformée de Fourier* $f(t) = f_{K,a}(t)$ *de* $F(x)$ *possède les propriétés suivantes :*

$$(3) \qquad \begin{cases} f(t) = 1 & \text{pour } |t| \leq a - k, \\ f(t) = 0 & \text{pour } |t| \geq a + k. \end{cases}$$

Démonstration. — Posons

$$(4) \qquad \begin{cases} f_0(t) = 1 & \text{pour } |t| \leq a, \\ f_0(t) = 0 & \text{pour } |t| > a, \end{cases}$$

et soit

$$f(t) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n k_1 k_2 \dots k_n} \int_{-k_n}^{k_n} dt_n \int_{-k_{n-1}}^{k_{n-1}} dt_{n-1} \dots \int_{-k_1}^{k_1} f_0(t + t_1 + \dots + t_n)\, dt,$$

On sait (*voir* [5] et [7]) que cette limite existe, que la fonction $f(t)$ ainsi définie possède les propriétés (3), et qu'elle est indéfiniment dérivable.

Posons

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{itz}\, dt.$$

On voit facilement que

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim \frac{1}{2^n k_1 \dots k_n} \int_{-k_n}^{k_n} dt_n \int_{-k_{n-1}}^{k_{n-1}} dt_{n-1} \dots \int_{-k_1}^{k_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t + t_1 + \dots + t_n)\, e^{itz}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim \frac{1}{2^n k_1 \dots k_n} \int_{-k_n}^{k_n} dt_n \dots \int_{-k_1}^{k_1} dt_1 \int_{-a-(t_1+\dots+t_n)}^{a-(t_1+\dots+t_n)} e^{itz}\, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin az}{z} \lim \frac{\sin k_1 z}{k_1 z} \dots \frac{\sin k_n z}{k_n z} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin az}{z} \prod \frac{\sin k_n z}{k_n z}, \end{aligned}$$

$f(t)$ et $F(x)$ étant transformées de Fourier l'une de l'autre, toutes les deux appartenant à L; d'ailleurs, comme $|\sin z| \leq |z|\, e^{|y|}$, on voit que

$$|F(z)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, e^{(a+k)|y|} \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n |z|^n},$$

et, par conséquent :

$$|F(z)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, e^{(a+k)|y|} \operatorname{Inf} \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n |z|^n}.$$

Ainsi F satisfait à l'inégalité (2).

LEMME 2. — *Soit* $B(t)$ *une fonction convexe, non décroissante sur la droite, satisfaisant aux conditions*

$$\lim_{t=\infty} B(t)\, t^{-1} = \infty, \tag{5}$$

$$\int^{\infty} B(t)\, e^{-t}\, dt < \infty, \tag{6}$$

et posons

$$\log M_n = \operatorname{Sup}_t [(n-4)\, t - B(t)], \tag{7}$$

$$k_n^B = \frac{M_{n-1}}{M_n} \quad (n \geq 2), \qquad k_1^B = \frac{1}{M_1}. \tag{8}$$

On a $\Sigma k_n^B = k^B < \infty$, *et la fonction* $F(z) = F_{K^B,a}(z)$, *définie par* (1), *où l'on pose* $k_n = k_n^B$, *satisfait à l'inégalité*

$$|F(z)| \leq R\, e^{(a+k^B)|y|}\, e^{-B(\log|z|)} \frac{1}{1+|z|^2}, \tag{9}$$

où R *est une constante. La transformée de Fourier* f *de* F *satisfait à* (3).

Démonstration. — Il résulte d'abord du lemme 1 que

$$|F_{K^B,a}(z)| \leq R_1\, e^{(a+k^B)|y|}\, e^{-A(|z|)}, \tag{10}$$

où

$$A(u) = \operatorname{Sup}_n \left(n \log u + \sum_1^n \log k_p^B \right) \qquad (u > 0)$$

Il résulte aussi de (5) que $\frac{\log M_n}{n} \to \infty$, et, en posant

$$\log M_x = \operatorname{Sup}_t [(x-4)\, t - B(t)],$$

on a $\frac{\log M_x}{x} = \infty$; à chaque t, assez grand, correspond donc un x_t tel que

$$B(t) + 4t = \operatorname{Sup}_{x \geq 0} (xt - \log M_x) = x_t t - \log M_{x_t};$$

ce qui permet d'écrire, pour t assez grand, l'inégalité suivante :

$$B(t) + 4t \leq (|x_t| + 1)\, t - \log M_{|x_t|+1}$$

c'est-à-dire l'inégalité

$$B(t) + 4t \leq A(e^t) + 2t. \tag{11}$$

L'inégalité (9) résulte alors de (10) et (11).

LEMME 3. — *Soit* $B(t)$ *une fonction satisfaisant aux conditions du lemme* 2, *et soient* a *et* b *deux constantes telles que* $0 < b < a$. *Il existe alors, une fonction entière*

$F(z) = F_{a,b}(z)$ *telle que la transformée de Fourier* f *de* $F(x)$ *satisfait à* (3) *avec* k *remplacé par* b, *et telle que*

$$|F_{a,b}(z)| \leq R_1 e^{(a+b)|y|} e^{-B(\log|z|+p)} \frac{1}{1+|z|^2}, \tag{12}$$

où R_1 *et* p *sont des constantes.*

Démonstration. — Posons

$$B_p(t) = B(t+p),$$

et appliquons le lemme 2 à la fonction $B_p(t)$ (avec $k_n^B = k_n^{B_p}$). En posant

$$\log M_n^p = \operatorname*{Sup}_t [nt - B_p(t)],$$

il résulte de (7) que

$$\log M_n^p = \operatorname*{Sup}_t [nt - B(t+p)] = \operatorname*{Sup}_t [n(t+p) - B(t+p)] - pn = \log M_n - pn.$$

Ainsi

$$k_n^{B_p} = \frac{M_n^p}{M_{n+1}^p} = \frac{M_n e^{p(n+1)}}{M_{n+1} e^{pn}} = \frac{M_n}{M_{n+1}} e^p \qquad (n \geq 2).$$

Il suffit donc de choisir p de sorte que $e^p k = b$ (où $k = \Sigma k_\nu^B$) pour que (12) ait lieu.

Lemme 4. — *Le lemme* 3 *reste vrai si l'on abandonne la condition de la convexité de* $B(t)$, *ainsi que la condition* (5).

On peut, évidemment, supposer, sans restreindre la généralité, que la fonction B est positive. Posons, alors

$$B_0(t) = \int_0^t B(u)\, du.$$

Il est clair que pour $t > 1$:

$$B_0(t) \geq \int_{t-1}^t B(u)\, du \geq B(t-1).$$

Il suffit donc de démontrer le lemme 4 lorsque $B(t)$ y est remplacé par la fonction $C(t) = B_0(t+1)$. Or, la fonction $C(t)$ possède toutes les propriétés exigées, dans l'énoncé du lemme 3 de la fonction $B(t)$ qui y figure.

Ce même lemme peut s'écrire de la manière suivante :

Lemme 5. — *Soient* $0 < \alpha < \beta < \infty$, *et soit* $C(u)$ *une fonction non décroissante sur la demi-droite positive, telle que*

$$\int^\infty \frac{C(u)}{u^2}\, du < \infty. \tag{13}$$

Il existe une fonction entière $F(z)$ *non identiquement nulle satisfaisant à l'inégalité*

$$|F(z)| \leq C e^{\beta|y|} \frac{1}{1+x^2} e^{-C(|z|)} \tag{14}$$

où C *est une constante, la transformée de Fourier* f *de* F *possédant les propriétés suivantes :*

$$(15)\qquad \begin{cases} f(u)=1 & \text{pour } |u|\leq\alpha, \\ f(u)=0 & \text{pour } |u|\geq\beta, \end{cases}$$

les fonctions F *et* f *étant respectivement de la forme suivante :*

$$(16)\qquad \mathrm{F}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin az}{z}\prod\frac{\sin k_n z}{k_n z},$$

$$(17)\qquad f(u)=\lim\frac{1}{2^n k_1\ldots k_n}\int_{-k_n}^{k_n}dt_n\int_{-k_{n-1}}^{k_{n-1}}dt_{n-1}\ldots\int_{-k_1}^{k_1}f_0(t+t_1+\ldots+t_n)\,dt_1,$$

où $a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, *les* $k_n>0$ *sont tels que* $\Sigma k_n=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, $f_0(t)=1$ *pour* $|t|\leq a$, $f_0(t)=0$ *pour* $|t|>a$.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 6. — *Soit* $\mathrm{B}(t)$ *une fonction non décroissante telle que*

$$\int^{\infty}\mathrm{B}(t)\,e^{-t}\,dt<\infty,$$

Il existe une fonction $p(t)$ *tendant vers l'infini en croissant (lorsque* t *tend vers l'infini) et telle que*

$$\int^{\infty}(\mathrm{B}[t+p(t)]\,e^{-t}\,dt<\infty.$$

la fonction $p(t)$ *pouvant, d'ailleurs, être choisie de la manière suivante : en posant*

$$q(c)=\int_{c}^{\infty}\mathrm{B}(u)\,e^{-u}\,du,$$

et en désignant par $\{p_n\}$ *une suite positive quelconque tendant vers l'infini en croissant, choisissons la suite* $\{c_n\}$ *de sorte que*

$$\Sigma\,e^{p_n}q(c_n+p_n)<\infty,$$

et posons $p(t)=p_n$ *pour* $c_n\leq t<c_{n+1}$.

Démonstration. — On a quels que soient c et p :

$$\int_{c}^{\infty}\mathrm{B}(t+p)\,e^{-t}\,dt=e^{p}\int_{c+p}^{\infty}\mathrm{B}(u)\,e^{-u}\,du=e^{p}q(c+p).$$

Ainsi, avec notre choix de $p(t)$ on a

$$\int_{c_1}^{\infty}\mathrm{B}[t+p(t)]\,e^{-t}\,dt\leq\Sigma\,e^{p_n}q(c_n+p_n)<\infty$$

Les deux lemmes 5 et 6 permettent d'énoncer le lemme suivant :

LEMME 7. — *La fonction* $C(u)$ *et les quantités* α *et* β *étant définies comme dans le lemme* 5, *il existe une fonction* $\varphi(r)$ *tendant vers l'infini en croissant, et une fonction* $F(z)$ *satisfaisant à l'inégalité*

$$|F(z)| \leq C_1 e^{\beta|y|} \frac{1}{1+x^2} e^{-C_2\varphi(|z|)|z|}, \tag{18}$$

cette fonction, ainsi que sa transformée de Fourier f, *satisfaisant aux relations* (15), (16) *et* (17).

La fonction $\varphi(r)$ *peut, d'ailleurs, être choisie de la manière suivante : en posant*

$$\int_g^\infty \frac{C(u)}{u^2} du = h(g). \tag{19}$$

et en désignant par $\{\gamma_n\}$ *une suite croissante tendant vers l'infini, avec* $\gamma_1 > 1$, *et telle que*

$$\Sigma \gamma_n h(g_n \gamma_n) < \infty, \tag{20}$$

il suffit de poser $\varphi(r) = \gamma_n$ *pour* $g_n \leq r < g_{n+1}$.

LEMME 8. — *Soit* $C(u)$ *une fonction non décroissante sur la demi-droite positive satisfaisant à* (13) *et soient* $0 < \alpha < \beta$. *Soient* $\{\eta_n\}$ *et* $\{g_n\}$ *deux suites positives, avec* $\eta_n < 1$, $\lim \eta_n = 0$, *la suite* $\{g_n\}$ *tendant vers l'infini en croissant : supposons en plus que*

$$\sum \frac{h\left(\frac{g_n}{\eta_n}\right)}{\eta_n} < \infty, \tag{21}$$

où h *est la fonction définie par* (19).

Il existe une fonction entière $F(z)$, *donnée par une expression de la forme* (16) *dont la transformée de Fourier,* f, *possède les propriétés* (15) *et est donnée par* (17), *et qui satisfait aux inégalités* ($n \geq 1$) :

$$|F(\eta_n z)| \leq e^{\varepsilon_n g_n - C(g_n)|z|} e^{\beta\eta_n|y|} \frac{1}{1+\eta_n^2 x^2}, \tag{22}$$

avec $\lim \varepsilon_n = 0$.

Démonstration. — En posant $\gamma_n = \eta_n^{-1}$, formons les fonctions $\varphi(r)$ et $F(z)$ du lemme 7 correspondant aux suites $\{g_n\}$ et $\{\gamma_n\}$ (g_n de l'énoncé du lemme 8, γ_n venant d'être défini), ce qui est possible grâce à (21).

On a, d'après la définition de $\varphi(r)$, pour $r > g_n \eta_n^{-1}$:

$$C(\varphi(\eta_n r)\eta_n r) \geq C(r).$$

La fonction $C(u)$ étant non décroissante, on a, en vertu de (19) :

$$g\, h(g) \geq C(g).$$

On peut donc écrire pour $r \geqq 0$:

$$\begin{aligned} C(\varphi(\eta_n r)\eta_n r) &= C(\varphi(\eta_n r)\eta_n r) - C(r) + C(r) \\ &\geqq C(0) + C(r) - C(g_n \eta_n^{-1}) \geqq C(0) + C(r) - g_n \eta_n^{-1} h(g_n \eta_n^{-1}), \end{aligned}$$

et le lemme 7 permet d'écrire

$$\begin{aligned} |F(\eta_n z)| &\leqq C_1 e^{\beta \eta_n |y|} \frac{1}{1 + \eta_n^2 x^2} e^{-C(\varphi(\eta_n |z|)\eta_n |z|)} \\ &\leqq C_1 e^{\beta \eta_n |y|} \frac{1}{1 + \eta_n^2 x^2} e^{-C(0) - C(|z|) e^{g_n \eta_n^{-1} h(g_n \eta_n^{-1})}}. \end{aligned}$$

Mais il résulte de (21) que $\lim \eta_n^{-1} h(g_n \eta_n^{-1}) = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 9. — *Les deux suites positives* $\{g_n\}\{\gamma_n\}$ *tendant vers l'infini, la fonction* h *étant définie par* (19), *avec* $C(u) = \log u$, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\lim \gamma_n h(g_n \gamma_n) = 0, \qquad \lim \gamma_n^{g_n} = 1.$$

Démonstration. — On a, pour g assez grand :

$$\log g . g^{-1} \leqq h(g) = (\log g + 1) g^{-1} \leqq 2 \log g . g^{-1},$$

et par conséquent

$$\frac{\log g_n + \log \gamma_n}{g_n} \leqq \gamma_n h(g_n \gamma_n) \leqq \frac{2(\log g_n + \log \gamma_n)}{g_n},$$

ce qui prouve l'assertion.

3. Soit $f(s)(s = \sigma + it)$ une fonction holomorphe dans un demi-plan $P_\alpha \equiv \sigma > \alpha$. Soit $a < \alpha$; désignons par R un domaine tel que $P_\alpha \subset R \subset P_a$ et tel qu'il existe une fonction holomorphe, uniforme dans R coïncidant dans P_α avec f. Supposons qu'il existe un domaine R_a possédant les propriétés mentionnées d'un domaine R et contenant tous les domaines R (autrement dit, R_a est le plus grand domaine R, si ce plus grand domaine R existe). Nous dirons alors que *le prolongement analytique direct de* f *dans* P_a *est uniforme*. Ce prolongement sera encore désigné par f.

Si le prolongement direct de f dans P_a est uniforme, l'ensemble $S_a^f = P_a - R_a$ sera appelé l'*ensemble singulier de* f *dans* P_a. Soit $\varepsilon > 0$, désignons par C_a la frontière de R_a, par $C(s_0, \varepsilon)$ le cercle $|s - s_0| < \varepsilon$, et écrivons

$$R_a^{\varepsilon \cdot f} = R_a^\varepsilon = R_a - \bigcup_{s_0 \in C_a} C(s_0, \varepsilon).$$

R_a^ε est donc l'ensemble qui reste après avoir enlevé de R_a tous les cercles de rayon ε centrés sur les points de C_a.

Soit $A(t)$ une fonction positive de $t>0$. Si, quel que soit $\varepsilon>0$, on a dans R_a^ε, uniformément par rapport à σ, lorsque $s\in R_a^\varepsilon$:

$$f(s)=O[A(|t|)] \qquad (t\to\infty), \tag{23}$$

on dira que *la croissance de f dans P_a, en dehors des singularités, ne dépasse pas celle de $A(t)$*. Si, dans (23), $A(t)$ peut être remplacé par une constante, on dira que la fonction f (ou, le prolongement direct de f) *est bornée dans P_a, en dehors des singularités*.

Lemme 10. — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans un demi-plan P_α et dont le prolongement analytique direct est uniforme dans un demi-plan $P_a(a<\alpha)$, $f(s)$ étant bornée dnns P_a, en dehors des singularités. Soit, de même $\varphi(s)$ une fonction holomorphe dans un demi-plan P_β et dont le prolongement analytique direct est uniforme dans un demi-plan $P_b(b<\beta)$. Supposons que dans $R_b^{\varepsilon,\varphi}$, on ait pour tout $\varepsilon>0$:*

$$\varphi(s)=O(L(|t|)) \qquad (t\to\infty),$$

où $L(u)(u>0)$ est intégrable, décroissant, uniformément par rapport à σ, lorsque $s\in R_b^{\varepsilon,\varphi}$, $\sigma<l$, l étant quelconque supérieur à b. Soit $p>\alpha+\beta$. L'intégrale

$$F(s)=\int_{p-i\infty}^{p+i\infty} f(s-z)\varphi(z)\,dz \tag{24}$$

représente une fonction holomorphe dans le domaine $R_{ab}^{f\varphi}$ défini de la manière suivante : désignons par $S_{ab}^{f\varphi}$ la fermeture de l'ensemble des points $\gamma+\delta$ où γ est un point quelconque de S_a^f et δ un point quelconque de S_b^φ, $R_{ab}^{f\varphi}$ est le plus grand domaine faisant partie du complémentaire de $S_{ab}^{f\varphi}$ contenant un demi-plan $P_k(\sigma>k)$.

La démonstration de ce lemme se trouve dans mon travail [4], où l'intégrale (24) est étudiée, sauf que les fonctions f et φ sont données, dans ce Mémoire, par des séries de Dirichlet, ce qui ne change en rien la démonstration (4).

4. Soit $\Lambda=\{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs, croissants, tendant vers l'infini, et soit $A=\{a_n\}$ une suite de nombres complexes. La série de Dirichlet $(A,\Lambda)=\Sigma a_n e^{\lambda_n s}$ est dite *du type* Λ. Le type est régulier si $\operatorname{Inf}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=\alpha>0$. La quantité α sera appelée l'*écart du type*. Pour une série du type régulier les abscisses de convergence simple et absolue coïncident et sont données par

$$c=\lim\frac{-\log|a_n|}{\lambda_n}.$$

Nous supposerons toujours que $-\infty<c<\infty$.

(4) En réalité dans [4] f est une série de Dirichlet, φ étant une série de Dirichlet divisée par une puissance α de s, avec $\alpha>1$.

Soit $a < c$ [c abscisse de convergence de (A, λ)], et supposons que le prolongement analytique direct de f dans P_a est uniforme; soit S_a^f l'ensemble singulier de f dans P_a. Désignons par $S_a^{f,*}$ la fermeture de l'ensemble de tous les points $\alpha + 2k\pi i$, où α est un point quelconque de S_a^f et où k est un entier quelconque. Désignons par Σ l'intersection de $S_a^{f,*}$ avec la droite $\sigma = c$. Cet ensemble est indépendant de a si $a < c$. Si Σ n'est pas la droite entière $\sigma = c$, nous dirons que la série $f = (A, \lambda)$ est *prolongeable modulo* $2\pi i$. Dans le cas contraire on dira que cette série admet l'axe de convergence comme *coupure modulo* $2\pi i$. Si les points de Σ sont des points isolés de $S_a^{f,*}$ on dira que l'*ensemble singulier de f sur l'axe de convergence est isolé, modulo* $2\pi i$.

Désignons par (λ_n) la *partie fractionnaire de* λ_n, c'est-à-dire $\lambda_n - [\lambda_n]$, où $[\lambda_n]$ est le plus grand entier inférieur à λ_n. La suite $\{(\lambda_n)\}$ des parties fractionnaires sera aussi désignée par (λ).

Les théorèmes que nous allons tout d'abord démontrer ont le sens suivant : Si $f = (A, \lambda)$ peut être prolongée modulo $2\pi i$ à travers son axe de convergence, et si dans $P_a (a < c)$ f ne croît pas, en dehors de ses singularités, plus vite qu'une fonction $A(t)$ (soumise à certaines conditions, elle-même), alors les valeurs prises par les parties fractionnaires (λ_n) doivent être assez « *tassées* », ce « tassement » dépendant de la croissance de $A(t)$. Ce tassement est encore plus grand — par exemple presque toutes les valeurs isolées de l'ensemble des valeurs prises par les (λ_n) doivent, chacune, être prise une infinité de fois — si l'ensemble singulier de f sur l'axe de convergence est isolé, modulo $2\pi i$.

Pour pouvoir énoncer ces théorèmes avec précision, il nous faut quelques nouvelles définitions.

Désignons par Ω l'ensemble des valeurs prises par les membres de (λ), c'est-à-dire par les parties fractionnaires (λ_n) des λ_n. Si donc $\omega \in \Omega$, il existe un $\lambda_n \in \lambda$ tel qué $(\lambda_n) = \omega$, et $0 \leq \omega < 1$, $\lambda_n - \omega$ entier; mais il peut y avoir plusieurs λ_n, et même une infinité, dont la partie fractionnaire est égale à ω. On désignera par λ_ω l'ensemble de tous les λ_n tels que $(\lambda_n) = \omega$. Désignons par $\lambda^{(\omega)}$ le plus petit terme de λ_ω, et par $\nu^{(\omega)}$ le nombre d'éléments dans λ_ω; $\nu^{(\omega)}$ peut être égal à l'infini. Si $\omega \neq 0$, $\omega \in \Omega$ étant un point isolé de Ω, nous désignerons par $\delta^{(\omega)}$ la plus petite distance de ω aux autres points de l'adhérence (fermeture) de Ω. L'intervalle $I^{(\omega)} = (\omega - \delta^{(\omega)}, \omega + \delta^{(\omega)})$ sera appelé l'*intervalle d'isolement de* ω. Dans l'intervalle d'isolement de ω il n'existe aucun autre point de Ω, une de ses extrémités appartenant à $\bar{\Omega}$.

5. Voici quelques énoncés dont les démonstrations seront données plus loin,

THÉORÈME I. — 1° *Soit $f = (A, \lambda)$ une série de Dirichlet de type régulier, admettant une abscisse de convergence finie c; soit $a < c$, et supposons que f est prolon-*

geable modulo $2\pi i$ *à travers l'axe de convergence, dans* P_a, *le prolongement analytique direct de* f *dans* P_a *étant uniforme. Supposons que dans* P_a, *en dehors des singularités, la croissance de* f *ne dépasse pas celle d'une fonction non décroissante* $A(t)(t>0)$, *satisfaisant à la condition*

$$\int^{\infty} \frac{\log A(t)}{t^2}\,dt < \infty. \tag{25}$$

2° *Supposons, qu'en posant*

$$h(g) = \int_g^{\infty} \frac{\log A(t)}{t^2}\,dt \qquad (g>0), \tag{26}$$

l'ensemble Ω *des valeurs* ω *prises par les termes de la suite* (Λ) *des parties fractionnaires des* λ_n, *contienne une suite infinie* $\{\omega_n\}$ *de valeurs isolées dans* Ω *satisfaisant à la condition*

$$\lim \frac{h\left(\frac{\lambda^{(\omega_n)}}{\delta^{(\omega_n)}}\right)}{\delta^{(\omega_n)}} = 0. \tag{27}$$

3° *Dans chaque* Λ_{ω_n} *il existe un* λ_{m_n} *tel que*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log|a_{m_n}|}{\lambda_{m_n}} = c. \tag{28}$$

Conclusion :

$$\lim_{n=\infty} \frac{\nu^{(\omega_n)}}{\lambda^{(\omega_n)}} > 0.$$

Rappelons que les notations Λ_ω, $\lambda^{(\omega)}$, $\delta^{(\omega)}$, $\nu^{(\omega)}$ ont été expliquées à la page précédente. Remarquons aussi que de la régularité du type Λ résulte déjà que $c = \overline{\lim}\,\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}$.

Ainsi donc, l'ordre de grandeur du nombre de fois que chaque valeur isolée, ω, de Ω est prise [la valeur de ω étant une valeur *utile* dans le sens de (28)] par les termes de la suite (Λ) est au moins égal à celui du plus petit terme de Λ dont la partie fractionnaire est égale à ω.

Lorsque $A(t)\equiv 1$, on a $h(g)\equiv 0$, et la condition (27) est satisfaite automatiquement. Le théorème I conduit donc, en particulier au théorème suivant :

Théorème II. — *La conclusion du théorème* I *subsiste, si l'ensemble des conditions de ce théorème est remplacé par la condition suivante :*

La série $f=(A,\Lambda)$ *du type régulier, avec* $-\infty < c < \infty$ *est prolongeable modulo* $2\pi i$ *à travers l'axe de convergence dans un demi-plan* P_a, $a<c$, *où le prolongement direct de* f *est uniforme et borné, en dehors des singularités. L'ensemble des valeurs prises par* (Λ) *contient une suite infinie* $\{\omega_n\}$ *de valeurs isolées dans* Ω *satisfaisant à la condition* 3° *du théorème* I.

Nous allons construire un exemple d'une série (A,Λ) satisfaisant à toutes

les hypothèses du théorème II (qui n'est, comme nous venons de voir, qu'un cas particulier du théorème I) et qui n'est pas une série de Taylor-D (série de Taylor en e^{-s}).

Considérons, d'une part, une suite d'entiers positifs, pairs $\{\mu_n\}$ tels que $\mu_{n+1} > 2\mu_n$ et, d'autre part, une suite positive $\{\omega_n\}$ avec $\omega_1 < 1$, tendant, en décroissant, vers zéro; ces suites étant, en plus, telles que, pour une certaine valeur $a < -\log 2$, on ait

$$\Sigma \omega_n e^{-2\mu_n a} < \infty \tag{29}$$

Étudions alors la fonction

$$f(s) = \Sigma e^{-\omega_n s}\left(\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n}.$$

Deux polynomes $(z+z^2)^{\mu_n}$ (correspondant à deux valeurs différentes de n) n'ont pas de puissance commune du fait que $\mu_{n+1} > 2\mu_n$; on voit aussi que, pour $\sigma > 0$, $f(s)$ peut être mis sous la forme

$$f(s) = \Sigma a_m e^{-\lambda_m s} = (\mathrm{A}, \Lambda),$$

où les λ_m parcourent tous les nombres de la forme $\omega_n + q$, avec $\mu_n \leq q \leq 2\mu_n (n \geq 1)$. Des inégalités $1 > \omega_1 > \omega_2 > \ldots$; $\mu_{n+1} > 2\mu_n + 1$, résulte alors que la suite Λ est régulière (l'écart du type Λ étant supérieur à $1 - \omega_1$). Comme pour $\lambda_m = \omega_n + q$ on a $(\lambda_m) = \omega_n$, on voit que $\Omega \equiv \{\omega_n\}$, et il est clair que $\lambda^{(\omega_n)} = \mu_n + \omega_n$, $\nu^{(\omega_n)} = \mu_n + 1$. On voit aussi que lorsque $\lambda_m = \mu_n + q$, on a $a_m = 2^{-\mu_n} C_{\mu_n}^{q-\mu_n}$. En posant $\lambda_{m_n} = \omega_n + \frac{3\mu_n}{2}$, on voit facilement que la condition 3° du théorème I est satisfaite, avec $c = 0$ comme abscisse de convergence de la série (A, Λ).

On voit, d'autre part, facilement, que la fonction f est holomorphe dans le domaine D limité par la courbe C, donnée par $|e^{-s}+e^{-2s}| = 2$ et contenant la demi-droite $\sigma > 0$, et que cette courbe est une coupure pour f.

En effet, la fonction

$$f_1(s) = \sum\left(\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n}$$

possède certainement ces propriétés, en vertu du théorème lacunaire d'Hadamard; et pour $\sigma > 0$, on a

$$f(s) - f_1(s) = \Sigma(e^{-\omega_n s} - 1)\left(\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{2}\right)^{\mu_n},$$

c'est-à-dire que dans tout compact contenu dans P_a [avec la valeur a choisie : $a < -\log 2$; (29) a lieu] on a

$$|f(s) - f_1(s)| \leq \mathrm{K}\Sigma\omega_n |s| e^{2\mu_n a} \leq \mathrm{K}_1 \Sigma \omega_n e^{-2\mu_n a} < \infty;$$

le domaine D étant contenu dans P_a (du fait que $a < -\log 2$), on voit que $f(s)$

est holomorphe dans D, et C est une coupure pour f. On a aussi, dans R_a^ε (pour la définition de ce domaine, *voir* p. 309) :

$$|f(s) - f_1(s)| \leq \Sigma(1 + e^{-\omega_n \sigma})\,\delta^n,$$

où $0 < \delta < 1$, ce qui prouve immédiatement que f est bornée dans R_a^ε. Ainsi donc f satisfait à toutes les hypothèses de l'énoncé du théorème II. On a ici, évidemment :

$$\lim_{n=\infty} \frac{\nu(\omega_n)}{\lambda(\omega_n)} = 1.$$

Un ensemble S est dit *partie isolée, modulo* $2\pi i$, *de* S_a^f (*voir* p. 309), s'il possède les propriétés suivantes : $S \subset S_a^{f,*}$ (*voir* p. 311), et il existe une courbe de Jordan fermée, simple, contenue dans $P_a - S_a^{f,*}$ et contenant, dans son intérieur, S.

Il est clair que, dans l'exemple construit plus haut, aucun point de S_a^f situé sur $\sigma = c (= 0)$ ne fait partie d'une partie isolée, modulo $2\pi i$, de S_a^f (c'est d'ailleurs vrai pour tout point de S_a^f, dans notre exemple). Cette remarque montre que notre exemple illustre aussi les hypothèses du théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si aux hypothèses du théorème* I, *on ajoute l'hypothèse suivante :*

4° *Pour une infinité de valeurs de n on a*

$$\nu(\omega_n) < \infty$$

alors, il existe au moins un point de S_a^f *situé sur* $\sigma = c$ *qui n'appartient à aucune partie isolée, modulo* $2\pi i$, *de* S_a^f.

THÉORÈME IV. — *Si aux hypothèses du théorème* II *on ajoute l'hypothèse* 4° *du théorème* III, *la conclusion du théorème* III *est encore valable.*

Signalons qu'en vertu du lemme 9, on peut faire la remarque suivante :

Remarque. — *Si, dans les théorèmes* I *et* III, *on suppose que* $A(t) = t^k$ $(k > 0)$, *la condition* (25) *est automatiquement satisfaite, et la condition* (27) *est équivalente à la suivante :*

$$\lim_{n=\infty} \delta^{(\omega_n)^{\frac{1}{\lambda(\omega_n)}}} = 1. \tag{30}$$

On peut construire facilement un exemple où toutes les conditions du théorème I sont satisfaites avec $A(t) = t^k$, sauf la condition (27), c'est-à-dire, d'après ce que nous venons de voir, sauf la condition (30), $S_a^{f,*}$ ne comportant, par exemple, dans chaque bande $T \leq t < T + 2\pi$, qu'un nombre fini de points — ou même, S_a^f étant un ensemble périodique de période $2\pi i$, tous les points de S_a^f étant des pôles — et pourtant $\nu(\omega_n) = 1$ pour chaque valeur de n.

Soit, en effet, $\Sigma a_n z^n$ une série de Taylor de rayon de convergence égal à 1, admettant dans le cercle $|z|<2$ un ensemble fermé, donné d'avance (quelques-uns de ces points étant alors sur $|z|=1$). Soit $0<\delta_1<1$, et posons

$$\lambda_n = n + \delta_1^n \quad (n \geq 1).$$

En écrivant $f(s)=\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, $f_1(s)=\Sigma a_n e^{-ns}$, on a

$$\varphi(s)=f_1(s)-f(s)=\Sigma a_n e^{-ns}(e^{-(\lambda_n-n)s}-1)=\Sigma a_n e^{-ns}(e^{-\delta_1^n s}-1).$$

Il est clair que cette somme converge uniformément sur tout compact contenu dans le demi-plan $\sigma>\log\delta_1$. Dans ce demi-plan $\varphi(s)$ est donc holomorphe. On a, d'autre part, pour $0<a<1$, $P>0$, $n\geq -\log\left(\frac{P}{a}\right)\frac{1}{\log\delta_1}=q$, l'inégalité

$$\delta_1^n P \leq a < 1,$$

ce qui donne, lorsque $|s|\leq P$, $\sigma\geq\sigma_0>\log\delta_1$:

$$\left|\sum_{n\geq q} a_n e^{-ns}(e^{-\delta_1^n s}-1)\right|\leq L_1 P,$$

où L_1 est inpépendant de P. Comme on a, d'autre part, dans le même domaine, en posant $|a_n|<R^n (R>1)$:

$$\left|\sum_{n<q} a_n e^{-ns}(e^{-\delta_1^n s}-1)\right|\leq L_2\frac{R^{[q]+1}-1}{R-1},$$

on voit que $\varphi(s)$ ne croît pas dans P_{σ_0} plus vite qu'une puissance, tout en y étant holomorphe. Comme $f(s)$ est bornée dans P_{σ_0}, en dehors des singularités, on voit que $f_1(s)$ admet dans P_{σ_0} les mêmes singularités que $f_1(s)$, et croît dans ce demi-plan, en dehors des singularités, moins vite qu'une puissance de $|t|$. Si $f_1(s)$ est choisie à n'avoir que des pôles simples dans P_{σ_0}, $f(s)$ n'y admet pas d'autres singularités non plus. On voit enfin que $\omega_n=\delta_1^n$, $\lambda^{(\omega_n)}=\lambda_n=n+\delta_1^n$, $\delta^{(\omega_n)}=\delta_1^n(1-\delta_1)$, ainsi donc $\lim \delta^{(\omega_n)\frac{1}{\lambda^{(\omega_n)}}}=\delta_1<1$ et $\nu^{(\omega_n)}=1$.

6. Nous allons maintenant fournir la démonstration des théorèmes énoncés dans le paragraphe précédent.

Démonstration du théorème I. — Supposons que le théorème ne soit pas vrai. Dans ces conditions on peut extraire de la suite $\{\omega_n\}$ une suite partielle, que nous désignerons par $\{\alpha_n\}$, qui jouit des propriétés suivantes :

1° α_n tend d'une manière monotone vers une quantité α; supposons que α_n décroît vers α, un changement insignifiant au raisonnement qui suit suffit pour traiter le cas où α_n croît vers α;

2° $0<\alpha_n-\alpha<\frac{d}{2+2d}$, où d est l'écart du type Λ, c'est-à-dire $d=\operatorname{Inf}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$.

On a, par conséquent,

$$\alpha_n-\alpha<\frac{d}{2},\qquad \alpha_n-\alpha<\frac{1}{2};$$

3° $\lim\frac{\nu^{(\alpha_n)}}{\lambda^{(\alpha_n)}}=0$;

4° $\lim\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\nu^{(\alpha_k)}}{\lambda^{(\alpha_n)}}=0$;

5° $\sum\frac{h\left(\frac{\lambda^{(\alpha_n)}}{\delta^{(\alpha_n)}}\right)}{\delta^{(\alpha_n)}}<\infty$;

(6°) $\lambda^{(\alpha_{n+1})}$ est plus grand que le plus grand terme de Λ_{α_n}. Rappelons que Λ_ω désigne l'ensemble des λ_n dont la partie fractionnaire est égale à ω.

7° $\alpha_n-\delta^{(\alpha_n)}>\alpha_{n+1}+\delta^{(\alpha_{n+1})}\ (n\geq 1)$.

Désignons par $\Lambda'\equiv\{\lambda'_n\}$ la suite, rangée par ordre de grandeur, composée des termes de $\bigcup_p\Lambda_{\alpha_p}$. Λ' est donc composé de tous les λ_m appartenant à tous les $\Lambda_{\alpha_p}(p\geq 1)$.

Soit m_n la partie entière de $\lambda'_n-\alpha$, et posons $\mu_n=m_n+\alpha$. On a $\lambda'_n=\mu_n+\varepsilon'_n$, avec $0<\varepsilon'_n<\frac{d}{2+2d}$, ε'_n tendant vers zéro en décroissant. Posons $\beta_p=\alpha_p-\alpha$. A chaque n correspond un p tel que $\varepsilon'_n=\beta_p$. β_p décroît vers zéro. On voit que m_n croît vers l'infini, et il résulte de 3° et 4° que

$$\lim\frac{n}{m_n}=0. \tag{31}$$

Désignons par λ_{r_p} un terme de Λ_{α_p}, choisi de telle manière que

$$\lim_p\frac{\log|a_{r_p}|}{\lambda_{r_p}}=c,$$

ce qui est possible en vertu de l'hypothèse 3° de l'énoncé du théorème.

Construisons alors la fonction $F(z)$ du lemme 8, correspondant aux éléments de cet énoncé définis de la manière suivante : $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma_n=\delta^{(\alpha_n)}$, $g_n=\lambda_{r_n}$, $C(u)=\log A(u)$ [α et β dont il est question *ici* sont les constantes correspondant à la propriété (15) de la transformée de Fourier de F]. $\{\varepsilon_n\}$ étant la suite intervenant dans (22), posons

$$\Phi(z)=\sum\frac{\gamma_n}{n^2}e^{-\varepsilon_n g_n+i\beta_n r}F(\gamma_n z).$$

D'après le lemme 8 on peut écrire

$$|\Phi(z)|\leq(A(|z|))^{-1}e^{c|y|}\sum\frac{1}{n^2}\frac{\gamma_n}{1+\gamma_n^2x^2}=(A|z|))^{-1}e^{c|y|}L(x). \tag{32}$$

où c est une constante et où $L(x)$ est une fonction intégrable tendant vers zéro, lorsque $|x|$ tend vers l'infini. En désignant par $\omega(u)$ la transformée de Fourier de F et par φ celle de Φ, on a, évidemment

$$\varphi(u) = \sum \frac{1}{n^2} e^{-\varepsilon_n \beta_n} \omega\left(\frac{u - \beta_n}{\eta_n}\right).$$

En tenant alors compte des propriétés de la transformée de Fourier de F (*voir* lemme 8) on voit que

$$\varphi(k_{n,m}) = 0$$

pour tout nombre $k_{n,m}$ de la forme $\lambda_n - m - \alpha$, à moins que λ_n soit un terme λ'_p de Λ', m étant la partie entière de $\lambda'_p - \alpha$. Si la partie fractionnaire de $\lambda'_p - \alpha$ est égale à β_n on a

$$\varphi(\beta_n) = \frac{1}{n^2} e^{-\varepsilon_n \beta_n}.$$

Posons

$$\psi(\zeta) = \frac{e^{-\alpha\zeta}}{e^{\zeta} - 1}$$

et considérons, pour $\sigma > h$, l'intégrale

$$\Psi(s) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \psi(s - z) f(z) \Phi(-iz)\, dz, \tag{33}$$

où h est une constante telle que $h > c$. Les hypothèses du théorème et l'inégalité (32) montrent que cette intégrale a un sens pour $\sigma > h$. On voit aussi, d'après le lemme 10, que $\Psi(s)$ est une fonction holomorphe dans tout domaine $R^{\psi,\chi}_{\nu,a}$ où $\chi(z)$ dénote la fonction $f(z)\Phi(-iz)$, ν étant une quantité négative quelconque.

Comme les seules singularités de ψ sont les points $2k\pi i$, k étant un entier quelconque, la fonction ψ étant bornée dans tout P_a, en dehors des singularités, on voit que les seules singularités de Ψ dans P_a sont les points de S'^{*}_a. $\Psi(s)$ est donc prolongeable analytiquement à travers la droite, $\sigma = c$, elle est holomorphe dans le demi-plan P_c.

On a, pour $R\zeta > 0$

$$\psi(\zeta) = \sum_{1}^{\infty} e^{-(\alpha+n)\zeta}.$$

On peut donc écrire, pour $\sigma \geq h' > h$, (33) sous la forme suivante :

$$\Psi(s) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-(\alpha+n)s} \sum_m a_m \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{(\alpha+n-\lambda_m)z} \Phi(-iz)\, dz.$$

Or, en utilisant d'une manière évidente le théorème de Cauchy (en profitant

du fait que sur des segments $0 \leqq x \leqq h$, $y = Y$, l'expression sous le signe d'intégrale tend vers zéro lorsque $|Y|$ tend vers l'infini) on voit que

$$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{(\alpha+h-\lambda_m)z}\,\Phi(-iz)\,dz = i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_m-n-\alpha)y}\,\Phi(y)\,dy.$$

Ainsi, pour $\sigma > h'$ on a

$$\Psi(s) = \sum_n e^{-(\alpha+n)s} \sum_m a_m \varphi(\lambda_m - n - \alpha).$$

D'après les remarques faites plus haut sur la fonction φ, on voit alors que

$$\Psi(s) = \sum_p e^{-\mu_p s}\, a_{k_p} \frac{1}{\nu_p^2}\, e^{-\varepsilon_{\nu_p}}\, g_{\nu_p},$$

où les quantités μ_p, k_p, ν_p sont définies de la manière suivante : on a $\mu_p = m_p + \alpha$, où les entiers croissants m_p sont les parties entières des λ'_p, les λ'_p constituant, comme on se le rappelle, l'ensemble Λ', qui est la réunion de tous les ensembles Λ_{α_n} $(n \geqq 1)$; à chaque μ_p correspond, par conséquent, un entier unique ν_p tel que $\lambda'_p \in \Lambda_{\alpha_{\nu_p}}$, c'est-à-dire tel que

$$\lambda'_p = m_p + \alpha_{\nu_p} = \mu_p + \beta_{\nu_p};$$

dans chaque Λ_{α_n} on a choisi un terme $\lambda_{r_n} = g_n$ tel que

$$\lim \frac{\log |a_{r_n}|}{\lambda_{r_n}} = c;$$

l'entier k_p est alors défini par $k_p = r_{\nu_p}$, k_p est aussi uniquement déterminé à partir de p (donc à partir de μ_p).

Il existe, en particulier, une suite d'entiers positifs, croissants $\{p_n\}$ telle que ν_{p_n} croît, et telle que

$$\mu_{p_n} = m_{p_n} + \alpha,$$
$$\lambda_{r_{p_n}} = g_{\nu_{p_n}} = m_{p_n} + \alpha + \beta_{\nu_{p_n}} \in \Lambda_{\alpha_{\nu_{p_n}}},$$
$$k_{p_n} = r_{\nu_{p_n}},$$
$$\lim \frac{\log |a_{k_{p_n}}|}{\mu_{p_n}} = \lim \frac{\log |a_{k_{r_n}}|}{g_{\nu_{p_n}}} = c.$$

Comme il existe une quantité positive A telle que $n \leqq A\lambda_n$ (le type Λ étant régulier), et comme la suite $\{g_{\nu_{p_n}}\}$ est une suite extraite de la suite $\{\lambda_n\}$, la suite $\{\nu_{p_n}\}$ et la suite $\{g_{\nu_{p_n}}\}$ étant croissantes (d'après la propriété 6° de la page 316), on a $1 \leqq \nu_{p_n} \leqq A\lambda_{\nu_{p_n}} \leqq Ag_{\nu_{p_n}}$. On a, par conséquent

$$\lim \frac{\log \nu_{p_n}}{g_{\nu_{p_n}}} = \lim \frac{\log \nu_{p_n}}{m_{p_n}} = 0.$$

La suite $\varepsilon_{\nu_{p_n}}$ tend vers zéro. Par conséquent on peut écrire

$$\lim \frac{\log |a_{k_p}| - 2\log \nu_{p_n} - \varepsilon_{\nu_{p_n}} g_{\nu_{p_n}}}{m_{p_n}} = c. \tag{34}$$

Posons $e^{-s} = z$, et écrivons $T(z) = \Psi(s)$. $T(z)$ est développable, autour de l'origine en série de la forme

$$T(z) = z^{\alpha} \Sigma b_n z^{m_n}; \tag{35}$$

cette fonction est holomorphe dans le cercle $|z| \leq e^{-c}$, car $\Psi(s)$, comme nous l'avons vu, est holomorphe pour $\sigma > c$, le rayon de convergence de la série dans (35) étant égal, d'après (34), au plus à e^{-c}, donc *exactement* à e^{-c}. Il résulte de (31), d'après le théorème de Fabry, que le cercle de convergence est, pour $T(z)$, une coupure, ce qui est en contradiction avec le fait établi plus haut que $\Psi(s)$ est prolongeable à travers la ligne $\sigma = c$. Ainsi notre théorème est complètement démontré si α_n décroît vers α. Si α_n croît vers α, il suffit de remplacer dans (33) $\Phi(-iz)$ par $\Phi(iz)$ pour achever la démonstration.

Le théorème II est, comme nous l'avons vu, un cas particulier du théorème I. Passons donc à la démonstration du théorème III.

Démonstration du théorème III. — Supposons que le théorème ne soit pas vrai. Dans ces conditions, tout point de S_a^f situé sur $\sigma = c$ appartient à une partie isolée, modulo $2\pi i$, de S_a^f. Cela veut dire que tout point de $S_a^{f,*}$ situé sur $\sigma = c$ fait partie d'un ensemble faisant partie de $S_a^{f,*}$ tel qu'il existe une courbe de Jordan fermée, simple, contenant cet ensemble, contenue dans P_a, aucun point de $S_a^{f,*}$ ne se trouvant sur la courbe.

On peut encore extraire de la suite $\{\omega_n\}$ une suite partielle $\{\alpha_n\}$ qui, vu la propriété 4° de l'énoncé du théorème III, jouit des propriétés suivantes : les propriétés 1°, 5° et 7° de la page 316, et la propriété que voici : en désignant par $\lambda_1^{(\alpha_n)}$ le plus grand terme de Λ_{α_n} on a

$$\lim \frac{\lambda^{(\alpha_{n+1})}}{\lambda_1^{(\alpha_n)}} = \infty.$$

En conservant toutes les notations et toutes les opérations qui servaient à la démonstration du théorème I, il suffit de faire les remarques suivantes : d'après ce que nous venons de dire sur les points de $S_a^{f,*}$ sur $\sigma = c$ (si l'on suppose que le théorème est faux !), la fonction $T(z)$ n'admet sur son cercle de convergence, $|z| = e^{-c}$, que des points singuliers dont chacun peut être entouré par une courbe de Jordan située dans le cercle $|z| < e^{-a}$ sur laquelle $T(z)$ est holomorphe; on a, d'autre part,

$$T(z) = z^{\alpha} \Sigma b_n z^{m_n},$$

où la suite $\{m_n\}$ possède, cette fois-ci, la propriété qui peut s'exprimer ainsi : il existe une suite $\{m_{n_p}\}$ extraite de la suite $\{m_n\}$ avec

$$\lim \frac{m_{n_k+1}}{m_{n_k}} = \infty .$$

Or, d'après un théorème d'Ostrowski [8], le domaine d'existence d'une fonction, dont le développement de Taylor admet de telles lacunes, est nécessairement simplement connexe. D'où la contradiction, et le théorème est démontré.

Nous savons que le théoréme IV est un cas particulier du théorème III.

Ainsi tous les théorèmes énoncés sont démontrés.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Agmon, *A composition theorem for Dirichlet series* (*Journal d'Analyse Mathématique*, vol. 1, II^e partie, 1951).

[2] V. Bernstein, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[3] N. Levinson, *Gap and Density Theorems* (*Amer. Math. Soc. Colloq. publications*, vol. 26, 1940).

[4] S. Mandelbrojt, *Contribution à la théorie du prolongement analytique des séries de Dirichlet* (*Acta Math.*, t. 55, 1929).

[5] S. Mandelbrojt, *Analytic Functions and Classes of infinitely differentiable functions* (*The Rice Institute Pamphlet*, t. 29, n° 1, 1942).

[6] S. Mandeldrojt, *Dirichlet Series* (*The Rice Institute Pamphlet*, t. 31, n° 4, 1944).

[7] S. Mandelbrojt, *Some theorems connected with the theory of infinitely differentiable functions* (*Duke Math.*, vol. 11, n° 2, 1944).

[8] A. Ostrowski, *Ueber Potenzreihen die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen* (*Berl. Sitz. der Akademie*, 1921).

ERRATA.

Trisectrices des angles d'un triangle,

par M. B. Gambier.

(*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 71, 1954, p. 191.)

Page 193, 6^e ligne en remontant, *au lieu de* $\gamma_{2,A}$, *lire* $\gamma_{1,A}$.

CONTRIBUTION

A LA THÉORIE ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR M. JEAN-CLAUDE HERZ.

INTRODUCTION

Le présent travail a pour point de départ l'exposé par Goursat (1) de la théorie de l'intégration des systèmes linéaires et homogènes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue, d'après le Mémoire fondamental de Clebsch (2) complété par Mayer (3). La théorie avait été amorcée par Jacobi (4) à propos des équations de la dynamique analytique, ainsi que par Bour (5), Boole (6), Collet (7). Elle a été rattachée par Frobenius et Cartan à la théorie des systèmes de Pfaff (8).

Le raisonnement employé est, en grande partie, spécifiquement algébrique. Il était donc intéressant de chercher à l'exprimer en langage moderne. Comme l'indépendance linéaire des premiers membres $X_i f$ intervient d'une manière fondamentale, il était naturel de considérer les symboles de différentiation X

(1) *Cours d'Analyse*, t. II, p. 634-641; *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 46-69. *Cf.* VALIRON, *Équations fonctionnelles*, p. 548-549.
(2) *Journal de Crelle*, t. 65, 1866, p. 257-268.
(3) *Math. Ann.*, t. 4, 1871, p. 88-94; t. 5, 1872, p. 448-470.
(4) *Journal de Crelle*, t. 60, 1861, p. 1-182.
(5) *J. Éc. Polyt.*, t. 39, 1862, p. 149 et suiv.
(6) *Phil. Trans.*, 1863, p. 485-501.
(7) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 7, 1870, p. 1-57.
(8) CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, p. 99-101.

comme des *vecteurs* sur le corps des coefficients. De plus, la théorie adjoint à un système $X_i f$ les équations $X_i(X_j f) - X_j(X_i f)$ qui sont encore du même type. C'est là une *opération* définie sur l'espace vectoriel précédemment introduit, qui devient ainsi une *algèbre*. On a alors un premier résultat purement algébrique : tout élément de la sous-algèbre engendrée par les symboles X_i annule toute solution du système. La réciproque fait appel à l'analyse et s'énonce : aucun autre symbole de différentiation n'annule à la fois toutes les solutions du système. Le résultat final de la théorie est plus précis : si le nombre des variables est n et la dimension de la sous-algèbre q, l'intégrale générale est une fonction arbitraire de $n - q$ fonctions indépendantes. On trouvera cet exposé au chapitre V (§ 6).

Un pas décisif dans l'algébrisation de cette théorie a pu être fait grâce aux remarquables travaux de Ritt, le fondateur de l'*Algèbre différentielle*. Le théorème des zéros de Hilbert, étendu par lui aux équations différentielles et aux dérivées partielles algébriques ([9]), m'a permis en effet de donner une démonstration purement algébrique de la réciproque énoncée plus haut. La question est traitée au chapitre V (§ 1 à 5).

L'étude de l'opération $X_i X_j - X_j X_i$, que je note $\{X_i, X_j\}$, fait l'objet des chapitres I à IV. On voit immédiatement qu'elle est *quasi commutative* et *distributive* pour l'addition, et qu'elle vérifie *l'identité de Jacobi*. Elle n'est pas linéaire, mais on a

$$\{X_i, \lambda X_j\} = \lambda \{X_i, X_j\} + \alpha X_j,$$

α ne dépendant que de X_i et λ (en fait, $\alpha = X_i \lambda$). On peut donc la qualifier, suivant Jacobson ([10]), de *pseudo-linéaire*. Inversement, ces quatre propriétés, prises comme axiomes, définissent sur un espace vectoriel une certaine structure d'algèbre. Vu la similitude de ces axiomes avec ceux des algèbres de Lie, j'ai appelé cette structure « pseudo-algèbre de Lie ».

Le chapitre I donne quelques propriétés générales des pseudo-algèbres de Lie, ainsi que des exemples. Le chapitre II traite le cas où le corps de base n'est pas commutatif. Le chapitre III étudie le cas commutatif. Le chapitre IV étend aux pseudo-algèbres de Lie un raisonnement appliqué par G. Birkhoff aux algèbres de Lie. Enfin un appendice rassemble différentes questions non résolues.

Dans le cours du texte, les références en chiffres romains désignent les chapitres, celles en chiffres arabes les paragraphes.

([9]) *Differential Algebra* (*Amer. Math. Soc. Colloq. Public.*, t. 33, 1950, p. 27 et 166).
([10]) *Pseudo-linear transformations* (*Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 485).

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES DES PSEUDO-ALGÈBRES DE LIE.

1. Définition. — Soit K un corps quelconque (commutatif ou non) dont nous désignerons les éléments par des lettres grecques minuscules. Rappelons qu'une dérivation D de K est une application de K dans lui-même vérifiant les deux propriétés

$$D(\alpha+\beta)=D\alpha+D\beta, \qquad D(\alpha\beta)=D\alpha.\beta+\alpha.D\beta.$$

Soit E un espace vectoriel à gauche sur K, de dimension finie ou infinie, dont nous noterons les éléments par des minuscules ordinaires.

Nous dirons que E est une *pseudo-algèbre de Lie* sur K si E est de plus muni d'une opération notée $\{\ ,\ \}$ (opération « accolade ») vérifiant les axiomes suivants :

I. $\{u, v\}=-\{v, u\}$ (*antisymétrie*);

II. $\{u, v+w\}=\{u, v\}+\{u, w\}$ (*distributivité*);

III. $\{u, \lambda v\}=\lambda\{u, v\}+\alpha v$, α étant un élément de K qui ne dépend que de u et de λ (*pseudo-linéarité*);

IV. $\{u, \{v, w\}\}+\{v, \{w, u\}\}+\{w, \{u, v\}\}=0$ (*identité de Jacobi*).

La dimension de E sera supposée désormais non nulle.

Une pseudo-algèbre de Lie sera dite *abélienne* si $\{u, v\}=0$ pour tout couple d'éléments u, v.

Nous appellerons *sous-pseudo-algèbre de Lie* de E un sous-espace vectoriel de E fermé pour l'opération $\{\ ,\ \}$. Une sous-pseudo-algèbre de Lie de E sera dite *invariante* si elle est permise dans E pour l'opération $\{\ ,\ \}$, c'est-à-dire si elle contient, avec un élément u, tout élément de la forme $\{u, v\}$.

2. Conséquences immédiates des axiomes. — *a*. Si K n'est pas de caractéristique 2, on a $\{u, u\}=0$ (axiome I).

b. $\{u, 0\}=0$ (axiome II).

c. L'axiome III associe à un vecteur u et à un scalaire λ un scalaire $\alpha(u, \lambda)$ que nous noterons $u\lambda$. E devient ainsi un domaine d'opérateurs *à gauche* pour K. En vertu de l'axiome I, on a la relation plus générale

$$\{\lambda u, \mu v\}=\mu\lambda\{u, v\}+[(\lambda u)\mu]v-\mu(v\lambda)u. \tag{1}$$

L'opérateur u est une dérivation de K. En effet,

$$\begin{aligned}\{u, (\lambda+\mu)v\}=\{u, \lambda v+\mu v\}&=\{u, \lambda v\}+\{u, \mu v\}\\&=[\lambda\{u, v\}+(u\lambda)v]+[\mu\{u, v\}+(u\mu)v]\\&=(\lambda+\mu)\{u, v\}+(u\lambda+u\mu)v,\end{aligned}$$

d'où

$$u(\lambda+\mu)=u\lambda+u\mu,$$

et

$$\{u,\lambda\mu\varphi\}=\{u,\lambda(\mu\varphi)\}=\lambda\{u,\mu\varphi\}+(u\lambda)\mu\varphi=\lambda[\mu\{u,\varphi\}+(u\mu)\varphi]+(u\lambda)\mu\varphi$$
$$=\lambda\mu\{u,\varphi\}+[\lambda(u\mu)+(u\lambda)\mu]\varphi,$$

d'où

$$u(\lambda\mu)=(u\lambda)\mu+\lambda(u\mu).$$

d. L'axiome IV nous donne une relation importante entre les dérivations u, φ et $\{u,\varphi\}$:

$$\begin{aligned}0&=\{u,\{\varphi,\lambda\varpi\}\}+\{\varphi,\{\lambda\varpi,u\}\}+\{\lambda\varpi,\{u,\varphi\}\}\\&=\{u,\lambda\{\varphi,\varpi\}+(\varphi\lambda)\varpi\}+\{\varphi,\lambda\{\varpi,u\}-(u\lambda)\varpi\}+\lambda\{\varpi,\{u,\varphi\}\}-(\{u,\varphi\}\lambda)\varpi\\&=\lambda\{u,\{\varphi,\varpi\}\}+(u\lambda)\{\varphi,\varpi\}+(\varphi\lambda)\{u,\varpi\}+[u(\varphi\lambda)]\varpi+\lambda\{\varphi,\{\varpi,u\}\}\\&\quad+(\varphi\lambda)\{\varpi,u\}-(u\lambda)\{\varphi,\varpi\}-[\varphi(u\lambda)]\varpi+\lambda\{\varpi,\{u,\varphi\}\}-(\{u,\varphi\}\lambda)\varpi\\&=[u(\varphi\lambda)-\varphi(u\lambda)-\{u,\varphi\}\lambda]\varpi,\end{aligned}$$

d'où

$$\{u,\varphi\}\lambda=u(\varphi\lambda)-\varphi(u\lambda).$$

e. En utilisant les axiomes II et III, on a immédiatement

$$(u+\varphi)\lambda=u\lambda+\varphi\lambda. \tag{2}$$

Il s'ensuit que l'opérateur $u=0$ est la dérivation nulle, et que, si μ appartient au sous-corps premier de K,

$$(\lambda u)\mu=\lambda(u\mu).$$

3. Exemples. — *a.* Toute *algèbre de Lie* est une pseudo-algèbre de Lie ($\alpha\equiv 0$ dans l'axiome III). En particulier, toute algèbre de Lie *abélienne* est une pseudo-algèbre de Lie abélienne (et réciproquement).

b. Si E est l'espace des *dérivations* d'un corps K commutatif, on en fait une pseudo-algèbre de Lie sur K en posant $\{u,\varphi\}=u\circ\varphi-\varphi\circ u$.

c. Si K est un corps de fonctions réelles de deux variables réelles x, y admettant toutes des dérivées appartenant à K, K est espace vectoriel sur lui-même et devient une pseudo-algèbre de Lie quand on pose $\{f,g\}=f'_xg'_y-f'_yg'_x$.

d. Si V est un espace vectoriel sur un corps commutatif K, on appelle ([11]) *transformation différentielle* de V toute application T de V dans lui-même vérifiant

$$\mathrm{T}(x+y)=\mathrm{T}x+\mathrm{T}y,$$
$$\mathrm{T}(\alpha x)=\alpha(\mathrm{T}x)+\alpha_{\mathrm{T}}x \qquad (\alpha_{\mathrm{T}}\in\mathrm{K}\text{ ne dépendant que de }\alpha\text{ et T}).$$

On voit facilement que l'application $\alpha\to\alpha_{\mathrm{T}}$ est une dérivation de K.

([11]) N. Jacobson, *Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 485.

L'ensemble des transformations différentielles de V devient un espace vectoriel E sur K si l'on pose

$$(T+T')x = Tx + T'x \qquad \text{et} \qquad (\lambda T)x = \lambda(Tx),$$

comme on le vérifie aisément.

L'espace E deviendra une pseudo-algèbre de Lie sur K si l'on pose

$$\{T, T'\} = T \circ T' - T' \circ T,$$

car on vérifie sans peine que la transformation du second membre est une transformation différentielle et que les axiomes I à IV sont remplis.

e. Un corps gauche K, considéré comme espace vectoriel sur lui-même, devient une pseudo-algèbre de Lie A_K quand on pose $\{\alpha, \beta\} = \alpha\beta - \beta\alpha$.

4. Sous-pseudo-algèbres de Lie. — Proposition 1. — *Soit* V *un sous-espace de* E, *de dimension finie ou infinie,* $(u_i)_{i\in I}$ *un système de générateurs de* V. *Pour que* V *soit une sous-pseudo-algèbre de Lie de* E, *il faut et il suffit que* $\{u_i, u_j\} \in V$ *pour tout* $i, j \in I$.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante : soient $u = \sum \alpha_i u_i$, $v = \sum \beta_j u_j$ deux éléments de V. On a

$$\{u, v\} = \left\{\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j u_j\right\} = \sum_i \sum_j \{\alpha_i u_i, \beta_j u_j\}$$

$$= \sum_i \sum_j [\beta_j \alpha_i \{u_i, u_j\} + [(\alpha_i u_i)\beta_j] u_j - \beta_j (u_j \alpha_i) u_i] \quad \text{d'après (1).}$$

Si $\{u_i, u_j\} \in V$ pour tout $i, j \in I$, il s'ensuit que $\{u, v\} \in V$ et que par conséquent V est une sous-pseudo-algèbre de Lie de E.

Corollaire. — *Tout sous-espace de* E *de dimension* 1 *est une sous-pseudo-algèbre de Lie.*

Proposition 2. — *La sous-pseudo-algèbre de Lie* V *engendrée par des vecteurs* $(u_i)_{i\in I}$ *est le sous-espace vectoriel* V_1 *engendré par les vecteurs*

$$v_j = \{u_{j_1}, \{u_{j_2}, \ldots, \{u_{j_{q-1}}, u_{j_q}\} \ldots\}\},$$

où q *est un entier quelconque et* $j_k \in I$.

En effet, tous ces vecteurs appartiennent à V. En vertu de la proposition 1 il suffit donc de montrer que $\{v_i, v_j\} \in V$ pour tout i, j. Désignons par $v_{(q)}$ un vecteur v_j défini par q accolades. Je dis que $\{v_{(q)}, v_{(r)}\}$ est égal à une combinaison linéaire de $v_{(h)}$ avec $h \leq q + r$.

Cette proposition est vraie pour $q = 1$. Supposons-la vraie pour $\{v_{(q-1)}, v_{(r)}\}$.

Nous avons, en utilisant l'axiome IV,

$$\begin{aligned}\{\varphi_{(q)}, \varphi_{(r)}\} &= \{\{u_i, \varphi_{(q-1)}\}, \varphi_{(r+1)}\} \\ &= -\{\{\varphi_{(q-1)}, \varphi_{(r)}\}, u_i\} - \{\{\varphi_{(r)}, u_i\}, \varphi_{(q-1)}\},\end{aligned}$$

d'où, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\{\varphi_{(q)}, \varphi_{(r)}\} &= \left\{u_i, \sum \lambda \varphi_{(h)}\right\} - \{\varphi_{(q-1)}, \varphi_{(r+1)}\} \\ &= \sum \lambda \{u_i, \varphi_{(h)}\} + \sum (u_i \lambda)\varphi_{(h)} - \sum \mu \varphi_{(h')} \\ &= \sum \lambda \varphi_{(h+1)} + \sum (u_i \lambda)\varphi_{(h)} - \sum \mu \varphi_{(h')}\end{aligned}$$

avec $h \leq q - 1 + r$, $h' \leq q - 1 + r + 1$, d'où la proposition.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU CAS NON COMMUTATIF.

1. Pseudo-algèbres de Lie de dimension supérieure à 1 sur un corps gauche. — De l'axiome I et de la relation (1) (I, 2, c), on tire

$$(\mu\lambda - \lambda\mu)\{u, v\} + [(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu)]v + [(\mu v)\lambda - \mu(v\lambda)]u = 0. \tag{1}$$

K étant supposé non commutatif, nous voyons que $\{u, v\}$ appartient au sous-espace engendré par u et v. Donc *les sous-pseudo-algèbres de Lie de* E *ne sont autres que ses sous-espaces.*

Plaçons-nous désormais dans le cas où E est de dimension > 1. Si $u = 0$, on a, d'après la relation (2) (I, 2, e), $u\lambda = 0$, d'où

$$(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu) = 0.$$

Si $u \neq 0$, il existe un vecteur v linéairement indépendant de u, et la formule (1) donne les composantes du vecteur $(\lambda\mu - \mu\lambda)\{u, v\}$ relativement à la base u, v. Lorsque u et v sont fixés, et par conséquent aussi $\{u, v\}$, ces composantes varient proportionnellement à $\lambda\mu - \mu\lambda$. En particulier, on a

$$(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu) = (\lambda\mu - \mu\lambda)\varphi(u),$$

$\varphi(u) \in$ K ne dépendant que de u. Cette relation s'étend au cas $u = 0$, auquel correspond $\varphi(u) = 0$. La formule (1) s'écrit

$$\{u, v\} = \varphi(u)v - \varphi(v)u. \tag{2}$$

Étudions les propriétés de l'application φ de E dans K. Nous pouvons fixer λ et μ, que nous choisirons non permutables,

$$\varphi(u + v) = (\lambda\mu - \mu\lambda)^{-1}[(\lambda u + \lambda v)\mu - \lambda(u\mu + v\mu)],$$

ou

$$\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v),$$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha u)&=(\lambda\mu-\mu\lambda)^{-1}[(\lambda\alpha u)\mu-\lambda([\alpha u]\mu)]\\&=(\lambda\mu-\mu\lambda)^{-1}[(\lambda\alpha u)\mu-\lambda\alpha(u\mu)-\lambda([\alpha u]\mu-\alpha[u\mu])]\\&=(\lambda\mu-\mu\lambda)^{-1}[(\lambda\alpha\mu-\mu\lambda\alpha)\varphi(u)-\lambda(\alpha\mu-\mu\alpha)\varphi(u)],\end{aligned}$$

ou

$$\varphi(\alpha u)=\alpha\varphi(u). \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) expriment que *l'application* φ *est linéaire*. Cherchons maintenant une expression de $u\lambda$:

$$\begin{aligned}\{u,\lambda v\}&=\varphi(u)\lambda v-\varphi(\lambda v)u=\varphi(u)\lambda v-\lambda\varphi(v)u\\&=\lambda\{u,v\}+(u\lambda)v=\lambda\varphi(u)v-\lambda\varphi(v)u+(u\lambda)v,\end{aligned}$$

d'où

$$u\lambda=\varphi(u)\lambda-\lambda\varphi(u). \tag{5}$$

On a, en vertu de (2) et de la linéarité,

$$\varphi(\{u,v\})=\varphi(u)\varphi(v)-\varphi(v)\varphi(u).$$

Par conséquent l'application φ est un *homomorphisme de pseudo-algèbres de Lie de* E *dans* $A_K(I, 3, e)$.

Réciproquement, soit K un corps quelconque, E un espace vectoriel sur K, de dimension quelconque, φ une application linéaire de E dans K. L'opération

$$\{u,v\}=\varphi(u)v-\varphi(v)u \tag{2}$$

vérifie les axiomes I à IV.

Nous avons donc déterminé *toutes les pseudo-algèbres de Lie de dimension* >1 *sur un corps gauche* K. En vertu de (5), ce sont des algèbres de Lie sur le centre de K.

Remarque. — L'axiome IV est, dans ce cas, automatiquement vérifié dès que le sont les axiomes I à III.

2. Pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 sur un corps gauche. — Le résultat précédent n'est plus nécessairement vrai si E est de dimension 1.

La relation (1) permet seulement d'écrire

$$(\mu\lambda-\lambda\mu)\{u,u\}+[(\lambda u)\mu-\lambda(u\mu)+(\mu u)\lambda-\mu(u\lambda)]u=0,$$

d'où, *dans le cas où* K *n'est pas de caractéristique* 2,

$$(\lambda u)\mu+(\mu u)\lambda=\lambda(u\mu)+\mu(u\lambda) \quad (12). \tag{6}$$

---

(12) Cette formule est encore valable dans le cas commutatif, pour une caractéristique quelconque (*cf.* chap. III).

La formule (2), où $\varphi(u)$ est une application linéaire de E dans K, définit encore une pseudo-algèbre de Lie, mais il peut exister d'autres formes de pseudo-algèbres de Lie.

E étant de dimension 1, tout élément u est de la forme λu_0 (u_0 fixe, $\lambda \in K$), et l'application $u \to \varphi(u)$ est définie par une transformation $\lambda \to \varphi(\lambda)$ de K telle que

$$\varphi(\alpha\lambda) = \alpha\varphi(\lambda),$$

donc

$$\varphi(\alpha) = \alpha\varphi(1) = \alpha\theta_0,$$

$\theta_0 = \varphi(1)$ est un élément fixe de K.

On a alors

$$\{\lambda u_0, \mu u_0\} = (\lambda\theta_0\mu - \mu\theta_0\lambda)u_0.$$

Si $\theta_0 = 0$, E est abélienne. Si $\theta_0 \neq 0$, posons $u_1 = \theta_0^{-1} u_0$. Nous obtenons

$$\{\lambda u_1, \mu u_1\} = (\lambda\theta_0^{-1}\theta_0\mu\theta_0^{-1} - \mu\theta_0^{-1}\theta_0\lambda\theta_0^{-1})u_0 = (\lambda\mu - \mu\lambda)u_1.$$

Nous voyons que E est alors isomorphe à la pseudo-algèbre de Lie $A_K(I, 3, e)$.

Nous allons étudier les pseudo-algèbres de Lie sur le corps K des *quaternions rationnels*. K est l'ensemble des éléments $a + b\omega_1 + c\omega_2 + d\omega_3$, a, b, c, d étant des nombres rationnels et ω_1, ω_2, ω_3 vérifiant les règles de multiplication bien connues.

Étudions d'abord les dérivations de K. Une telle dérivation est définie par son effet sur ω_1, ω_2 et ω_3 :

$$\omega_i' = p_i + q_i\omega_i + r_i\omega_{i+1} + s_i\omega_{i-1},$$

où i est un entier défini modulo 3.

De $\omega_i^2 = -1$, on déduit

$$\omega_i'\omega_i + \omega_i\omega_i' = 0$$

et par conséquent $p_i = q_i = 0$.

De $\omega_i\omega_{i+1} = \omega_{i-1}$, on déduit

$$\omega_i'\omega_{i+1} + \omega_i\omega_{i+1}' = \omega_{i-1}'$$

ou

$$r_{i-1}\omega_i + s_{i-1}\omega_{i+1} - r_i - s_i\omega_i - r_{i+1}\omega_{i+1} - s_{i+1} = r_{i-1}\omega_i + s_{i-1}\omega_{i+1}$$

d'où

$$r_i = -s_{i+1}.$$

Toute dérivation de K est donc définie par des relations de la forme

$$\omega_i' = a_{i-1}\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_{i-1}.$$

Soit maintenant E une pseudo-algèbre de Lie de dimension 1 sur K, u un élément non nul de E. E est définie par la donnée des scalaires $u\omega_i$ et $(\omega_i u)\omega_j$

(i, j entiers modulo 3). En effet,

$$\{\alpha u,\ \beta u\} = [(\alpha u)\beta - \beta(u\alpha)]u \qquad (\alpha,\ \beta \in \mathrm{K}).$$

Si $\alpha = a + b\omega_1 + c\omega_2 + d\omega_3$, on a

$$u\alpha = b(u\omega_1) + c(u\omega_2) + d(u\omega_3)$$

et

$$(\alpha u)\beta = a(u\beta) + b[(\omega_1 u)\beta] + c[(\omega_2 u)\beta] + d[(\omega_3 u)\beta] \quad (\mathrm{I},\ 2,\ e).$$

Par conséquent $u\alpha$ et $(\alpha u)\beta$ sont connus dès que le sont les $u\omega_i$ et les $(\omega_i u)\omega_j$. D'après ce qui précède, les $u\omega_i$ et les $(\omega_i u)\omega_j$ sont de la forme

$$u\omega_i = a_{i-1}\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_{i-1},$$
$$(\omega_i u)\omega_j = b_{i,j-1}\omega_{j+1} - b_{i,j+1}\omega_{j-1}.$$

Les b_{ij} sont liés, en vertu de la relation (6), par

$$(\omega_i u)\omega_{i+1} + (\omega_{i+1} u)\omega_i = \omega_i(u\omega_{i+1}) + \omega_{i+1}(u\omega_i)$$

ou

$$b_{ii}\omega_{i-1} - b_{i,i+1}\omega_i + b_{i+1,i-1}\omega_{i+1} - b_{i+1,i+1}\omega_{i-1} = -a_i\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_i,$$

ce qui nous donne

$$b_{ii} = b_{i+1,i+1},$$
$$b_{i,i-1} = a_{i+1},$$
$$b_{i+1,i-1} = -a_i.$$

Posons alors

$$b = b_{11} = b_{22} = b_{33} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{b + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3}{2}.$$

Nous avons alors

$$\theta\omega_i - \omega_i\theta = a_{i-1}\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_{i-1} = u\omega_i,$$
$$\omega_i\theta\omega_{i+1} - \omega_{i+1}\theta\omega_i = a_{i-1} + b\omega_{i-1} = (\omega_i u)\omega_{i+1} - \omega_{i+1}(u\omega_i)$$

et par conséquent

$$\{u,\ \omega_i u\} = (\theta\omega_i - \omega_i\theta)u$$

et

$$\{\omega_i u,\ \omega_{i+1} u\} = (\omega_i\theta\omega_{i+1} - \omega_{i+1}\theta\omega_i)u.$$

En vertu de la double distributivité (pour l'addition) de l'opération accolade et de l'opération $\lambda,\ \mu \to \lambda\theta\mu - \mu\theta\lambda$, il s'ensuit qu'on a la relation générale

$$\{\lambda u,\ \mu u\} = (\lambda\theta\mu - \mu\theta\lambda)u.$$

Nous avons ainsi démontré qu'il n'existait sur le corps K des quaternions rationnels que des pseudo-algèbres de Lie abéliennes ou isomorphes à $\mathrm{A_K}$.

De telles pseudo-algèbres de Lie seront dites *triviales*.

Cas particulier important : le corps K n'admet que des *dérivations intérieures*.

Rappelons qu'une dérivation D d'un corps gauche K est dite *intérieure* ([13]) s'il existe un élément θ_D de K tel que $D\alpha = \theta_D\alpha - \alpha\theta_D$ pour tout $\alpha \in K$. Toute dérivation intérieure de K annule son centre Z. L'ensemble des θ_D vérifiant la condition ci-dessus pour une dérivation donnée D est une classe modulo Z. Si V est un sous-espace supplémentaire de Z (K et Z étant considérés comme espaces sur Z), θ_D admet une forme canonique unique dans V.

Soit E une pseudo-algèbre de Lie *de dimension* 1 sur un corps gauche K de caractéristique $\neq 2$, *sans dérivations non intérieures*, Z le centre de K, u_0 un élément non nul de E. Quel que soit $\lambda \in K$, l'application $\alpha \to (\lambda u_0)\alpha$ est une dérivation de K. A λ correspond ainsi un élément $\bar{\lambda}$ d'un espace V. Cette application φ de K dans V est *linéaire*. En effet, d'une part

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$$

d'après la relation (2) (I, 2, *e*); d'autre part, soit *a* un élément de Z; nous avons d'après la formule (6) ([14])

$$(a\lambda u_0)\alpha + (\alpha\lambda u_0)a = a[(\lambda u_0)\alpha] + \alpha[(\lambda u_0)a]$$

ou

$$(a\lambda u_0)\alpha = a[(\lambda u_0)\alpha],$$

donc

$$\overline{a\lambda} = a\bar{\lambda}.$$

Supposons maintenant que K soit de dimension finie $n+1$ sur Z. V est de dimension n. L'image de K dans V par l'application $\varphi(\lambda \to \bar{\lambda})$ est de dimension $m \leq n$. Le sous-espace des λ tels que $\bar{\lambda} = 0$ est donc de dimension $n+1-m \geq 1$. Autrement dit il existe un élément non nul $u = \lambda u_0$ de E tel que $u\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in K$. Prenons pour u_0 cet élément u. L'opération accolade dans E est alors définie par

$$\{\lambda u, \mu u\} = [(\lambda u)\mu]u = (\theta_\lambda \mu - \mu\theta_\lambda)u.$$

Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ une base de V sur Z. L'application φ transforme l'élément $\lambda = \sum a_i\omega_i + b$ de K ($a_i, b \in Z$) en l'élément $\bar{\lambda} = \sum a_i\bar{\omega}_i$ de V.

Posons

$$\bar{\omega}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\omega_j \qquad (p_{ij} \in Z)$$

nous avons, en vertu de (6),

$$(\omega_1 u)\omega_1 = \bar{\omega}_1\omega_1 - \omega_1\bar{\omega}_1 = \sum_{j=1}^{n} p_{1j}(\omega_j\omega_1 - \omega_1\omega_j) = 0.$$

([13]) N. Jacobson, *Pseudo-linear transformations* (*Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 487).

([14]) Rappelons que cette formule a été établie en supposant la caractéristique du corps K différente de 2.

Supposons que les $n-1$ quantités $\omega_j\omega_1-\omega_1\omega_j$ $(j=2,\ \ldots,\ n)$ soient *linéairement indépendantes* sur Z. Il en résulte que $p_{1j}=0$ pour $j\neq 1$. La relation (6) donne encore pour $k\neq 1$,

$$(\omega_1 u)\omega_k+(\omega_k u)\omega_1=\bar{\omega}_1\omega_k-\omega_k\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_k\omega_1-\omega_1\bar{\omega}_k=0,$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n}p_{1j}(\omega_j\omega_k-\omega_k\omega_j)+\sum_{j=2}^{n}p_{kj}(\omega_j\omega_1-\omega_1\omega_j)=0,$$

d'où, puisque $p_{1j}=0$ pour $j\neq 1$,

$$(p_{kk}-p_{11})(\omega_k\omega_1-\omega_1\omega_k)+\sum_{j\neq 1,\,k}p_{kj}(\omega_j\omega_1-\omega_1\omega_j)=0,$$

ce qui entraîne, grâce à la propriété d'indépendance,

$$p_{kk}=p_{11}, \qquad p_{kj}=0 \quad \text{pour tout } j\neq 1,k.$$

Enfin $(\omega_k u)\omega_k=0$ donne

$$\bar{\omega}_k\omega_k-\omega_k\bar{\omega}_k=0,$$

qui se réduit à

$$p_{k1}(\omega_1\omega_k-\omega_k\omega_1)=0,$$

ce qui exige $p_{k1}=0$.

Posons $p_{11}=p_{22}=\ldots=p_{nn}=a$. Nous aurons finalement

$$\bar{\omega}_i=a\omega_i \quad \text{quel que soit } i;$$

donc, quel que soit $\lambda\in K$,

$$\bar{\lambda}\equiv a\lambda(Z) \qquad \text{et} \qquad \{\lambda u,\mu u\}=a(\lambda\mu-\mu\lambda)u.$$

Si $a=0$, E est abélienne, Si $a\neq 0$, posons $a^{-1}u=v$. Il vient

$$\{\lambda v,\ \mu v\}=(\lambda\mu-\mu\lambda)v.$$

Nous avons ainsi obtenu le

THÉORÈME. — *Si* K *est un corps gauche de caractéristique* $\neq 2$, *de dimension finie sur son centre* Z, *dont toutes les dérivations sont intérieures, et possédant une base* $\omega_0=1,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n$ *sur* Z *telles que les* $n-1$ *quantités* $\omega_1\omega_i-\omega_i\omega_1$ $(i>1)$ *soient linéairement indépendantes sur* Z. *toute pseudo-algèbre de Lie de dimension* 1 *sur* K *est triviale.*

Remarque. — 1. Ce théorème s'applique en particulier au cas des quaternions rationnels, d'où le résultat du début de ce paragraphe.

2. On peut s'affranchir de la condition d'indépendance dans le cas où $n\leq 3$, car sa négation entraînerait l'existence dans K d'une extension commutative de Z. Cela nous amène à faire la *conjecture* suivante : si K est à dérivations intérieures, toute pseudo-algèbre de Lie de dimension 1 sur K est triviale.

3. Inversement, l'existence de dérivations non intérieures pour K n'entraîne pas l'existence de pseudo-algèbres de Lie non triviales sur K. C'est ce que montre l'exemple suivant :

Soit Γ le corps des rationnels, x une indéterminée, K le corps des quaternions sur $\Gamma(x)$.

Les relations $\omega_i^2 = -1$ et $\omega_i\omega_{i+1} = \omega_{i-1}$ étant toujours valables, toute dérivation D de K vérifie des relations de la forme

$$D\omega_i = a_{i-1}\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_{i-1} \tag{7}$$

D'autre part, toute dérivation d'un corps gauche K applique son centre Z dans lui-même, car si $a \in Z$ et $\lambda \in K$, on a

$$D(a\lambda) = D(\lambda a) = Da.\lambda + a.D\lambda = D\lambda.a + \lambda.Da,$$

d'où

$$Da.\lambda = \lambda.Da, \qquad \text{donc} \quad Da \in Z.$$

Enfin si nous désignons par a' la dérivée usuelle de $a \in \Gamma(x)$, nous avons

$$Da = a'.Dx.$$

L'application $a + b\omega_1 + c\omega_2 + d\omega_3 \to a' + b'\omega_1 + c'\omega_2 + d'\omega_3$ est une dérivation de K, comme on le vérifie aisément. Elle n'est pas intérieure puisqu'elle n'annule pas $\Gamma(x)$. Cherchons maintenant les pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 sur K. Soit u un élément quelconque d'une telle pseudo-algèbre de Lie E. La relation (6) donne

$$(\omega_i u)x + (xu)\omega_i = \omega_i(ux) + x(u\omega_i).$$

$(\omega_i u)x$ et ux appartiennent à $\Gamma(x)$. $(xu)\omega_i$ et $x(u\omega_i)$ sont de la forme $p\omega_{i-1} + q\omega_{i+1}$. Cela nécessite $(\omega_i u)x = ux = 0$, d'où

$$ua = a'(ux) = 0 \quad \text{pour tout } a \in \Gamma(x).$$

Il s'ensuit que tout élément de E annule $\Gamma(x)$. Par conséquent, la recherche des pseudo-algèbres de Lie sur K donne lieu aux mêmes calculs que dans le cas des quaternions rationnels. On trouve encore qu'il n'existe que des pseudo-algèbres de Lie triviales.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU CAS COMMUTATIF.

1. Représentation canonique des pseudo-algèbres de Lie de dimension supérieure a 1 sur un corps commutatif. — La relation (1) (II, 1) donne, dans le cas commutatif,

$$[(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu)]v + [(\mu v)\lambda - \mu(v\lambda)]u = 0,$$

d'où, lorsque E est de dimension >1,

$$(\lambda u)\mu = \lambda(u\mu). \tag{1}$$

Nous appellerons *noyau* de E l'ensemble N des $u \in E$ tels que $u\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in K$; c'est, en vertu de la propriété (I, 2, *c*), un sous-module de E, et ce sous-module est permis dans E pour l'opération $\{\ ,\ \}$ (I, 2, *d*). Lorsqu'on a, de plus, la relation (1), N est sous-espace vectoriel de E, donc sous-pseudo-algèbre de Lie invariante (I, 1) de E. C'est de plus une algèbre de Lie sur K.

La relation d'équivalence $u' - u \in N$ est régulière pour l'opération $\{\ ,\}$. En effet, si $u' - u \in N$ et $v' - v \in N$, il en résulte que

$$\{u', v'\} - \{u, v\} = \{u' - u, v'\} + \{u, v' - v\} \in N.$$

L'espace-quotient, $E = E/N$ a par suite une structure de pseudo-algèbre de Lie. Si $\bar{u} \in E$, $\bar{u}\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in K$ entraîne $\bar{u} = 0$. $\bar{E}$ est donc isomorphe à une sous-pseudo-algèbre de Lie de la pseudo-algèbre de Lie des dérivations de K (I, 3, *b*).

Si V est une sous-pseudo-algèbre de Lie invariante de E, et si $u \in E$, $v \in V$ et $\lambda \in K$, on a $\{u, v\} \in V$ et $\{\lambda u, v\} \in V$, d'où $(v\lambda)u \in V$; u étant quelconque, si $V \neq E$, on a nécessairement $v\lambda = 0$, d'où $V \subseteq N$.

Enfin, toute algèbre de Lie sur K contenue dans E est évidemment contenue dans N (I, 3, *a*). En résumé,

THÉORÈME 1. — *Si* E *est une pseudo-algèbre de Lie de dimension* >1 *sur un corps commutatif* K, *toute sous-pseudo-algèbre de Lie invariante de* E *distincte de* E *est une algèbre de Lie sur* K *contenue dans* E, *et réciproquement. Parmi ces algèbres de Lie, il en existe une maximum* N *appelée noyau de* E, *et* E/N *est isomorphe à une sous-pseudo-algèbre de Lie de la pseudo-algèbre de Lie des dérivations de* K.

L'homomorphisme $E \multimap \bar{E}$ sera appelé *représentation canonique de* E.

2. CONSTANTES DE STRUCTURE. — Un espace vectoriel E sur un corps commutatif donné K est défini par la donnée d'une base $(e_i)_{i \in I}$, I étant un ensemble, fini ou infini, d'indices. Cherchons comment l'on peut définir sur E une structure de pseudo-algèbre de Lie sur K. Nous supposerons E de dimension supérieure à 1.

Soient $u = \sum \alpha_i e_i$, $v = \sum \beta_j e_j$ deux éléments de E. Nous aurons

$$\{u, v\} = \Big\{\sum \alpha_i e_i, \sum \beta_j e_j\Big\} = \sum_i \sum_j \{\alpha_i e_i, \beta_j e_j\} \tag{2}$$

$$= \sum_i \sum_j [\alpha_i \beta_j \{e_i, e_j\} + (\alpha_i e_i \beta_j) e_j - (\beta_j e_j \alpha_i) e_i].$$

Pour connaître $\{u, v\}$, il suffit donc de connaître :

1° $\{e_i, e_j\} = \sum_k \gamma_{ijk} e_k$ pour tous les indices $i, j \in \mathrm{I}$;

2° les valeurs des éléments $e_i\lambda$ pour tout $i \in \mathrm{I}$, tout $\lambda \in \mathrm{K}$, autrement dit les *dérivations* de $\mathrm{K}(\lambda \to e_i\lambda)$ pour tout $i \in \mathrm{I}$.

Nous appellerons les éléments γ_{ijk} *constantes de structure* de E. Ces constantes, ainsi que les dérivations e_i, vérifieront certaines conditions, déduites des axiomes I à IV, que nous allons établir.

L'axiome I exige

$$\text{(A)} \qquad \{e_i, e_j\} = -\{e_j, e_i\} \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j \in \mathrm{I}.$$

Réciproquement, la formule (2) assure, à partir de ces conditions, la validité de l'axiome I.

L'axiome II est vérifié sans condition supplémentaire.

La formule (2) donne d'autre part

$$\{u, \lambda v\} = \sum_i \sum_j \{\alpha_i e_i, \lambda\beta_j e_j\} = \sum_i \sum [\alpha_i\lambda\beta_j \{e_i, e_j\} + [\alpha_i e_i(\lambda\beta_j)]e_j - (\lambda\beta_j e_j\alpha_i)e_i].$$

L'application $\lambda \to e_i\lambda$ étant une dérivation, on en déduit

$$\{u, \lambda v\} = \lambda\{u, v\} + \left[\sum_i \alpha_i(e_i\lambda)\right] v,$$

et l'axiome III est vérifié sans condition supplémentaire.

L'axiome IV exige

$$\text{(B)} \qquad \{\{e_i, e_j\}, e_k\} + \{\{e_j, e_k\}, e_i\} + \{\{e_k, e_i\}, e_j\} = 0.$$

Par suite de la distributivité, l'axiome IV sera vérifié dès que le sera la condition

$$\{\{\alpha_i e_i, \beta_j e_j\}, \gamma_k e_k\} + \{\{\beta_j e_j, \gamma_k e_k\}, \alpha_i e_i\} + \{\{\gamma_k\alpha_k, \alpha_i e_i\}, \beta_j e_j\} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}\{\{\alpha_i e_i, \beta_j e_j\}, \gamma_k e_k\} = {} & \{\alpha_i\beta_j\{e_i, e_j\} + (\alpha_i e_i\beta_j)e_j - (\beta_j e_j\alpha_i)e_i, \gamma_k e_k\} \\ = {} & \alpha_i\beta_j\gamma_k\{\{e_i, e_j\}, e_k\} + \alpha_i\beta_j(\{e_i, e_j\}\gamma_k)e_k - \gamma_k e_k(\alpha_i\beta_j)\{e_i, e_j\} \\ & + (\alpha_i e_i\beta_j)\gamma_k\{e_j, e_k\} + (\alpha_i e_i\beta_j)(e_i\gamma_k)e_k - [\gamma_k e_k(\alpha_i e_i\beta_j)]e_j \\ & - (\beta_j e_j\alpha_i)\gamma_k\{e_i, e_k\} - [(\beta_j e_j\alpha_i)e_i\gamma_k]e_k + [\gamma_k e_k(\beta_j e_j\alpha_i)]e_i.\end{aligned}$$

La sommation par permutation circulaire fait disparaître, grâce à (B), les doubles accolades. On obtient, comme coefficient du terme en $\{e_i, e_j\}$,

$$-\gamma_k e_k(\alpha_i\beta_j) + (\gamma_k e_k\alpha_i)\beta_j + (\gamma_k e_k\beta_j)\alpha_i,$$

qui est nul puisque e_k est une dérivation.

Le coefficient du terme en e_k est

$$\begin{aligned}&\alpha_i\beta_j(\{e_i, e_j\}\gamma_k) + (\alpha_i e_i\beta_j)(e_j\gamma_k) - \alpha_i e_i(\beta_j e_j\gamma_k) - (\beta_j e_j\alpha_i)e_i\gamma_k + \beta_j e_j(\alpha_i e_i\gamma_k) \\ &\qquad = \alpha_i\beta_j[\{e_i, e_j\}\gamma_k - e_i(e_j\gamma_k) + e_j(e_i\gamma_k)].\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une troisième et dernière condition :

(C) $$\{e_i, e_j\}\lambda = e_i(e_j\lambda) - e_j(e_i\lambda) \quad \text{tout } i, j \in \mathrm{I}, \text{ tout } \lambda \in \mathrm{K}.$$

En résumé,

THÉORÈME 2. — *Une pseudo-algèbre de Lie de dimension* >1 *sur un corps* K *commutatif est définie par la donnée d'une base* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, *des valeurs des accolades* $\{e_i, e_j\}$ *et des dérivations* $\lambda \to e_i\lambda$ *de* K, *qui doivent satisfaire aux conditions :*

(A) $$\{e_i, e_j\} = -\{e_j, e_i\},$$

(B) $$\{\{e_i, e_j\}, e_k\} + \{\{e_j, e_k\}, e_i\} + \{\{e_k, e_i\}, e_j\} = 0,$$

(C) $$\{e_i, e_j\}\lambda = e_i(e_j\lambda) - e_j(e_i\lambda)$$

pour tout $i, j, k \in \mathrm{I}$.

3. PSEUDO-ALGÈBRE DE LIE DE DIMENSION 1 SUR UN CORPS COMMUTATIF. — Quand E est de dimension 1, la relation

(1) $$(\lambda u)\mu = \lambda(u\mu)$$

n'est plus automatiquement vérifiée. Les éléments de E sont tous de la forme λu, u étant fixe $\neq 0$. On a, quelle que soit la caractéristique de K,

$$\{\lambda u, \mu u\} = \mu\lambda\{u, u\} + [(\lambda u)\mu - \mu(u\lambda)]u$$

et

$$\{\mu u, \lambda u\} = \lambda\mu\{u, u\} + [(\mu u)\lambda - \lambda(u\mu)]u,$$

d'où

$$(\mu\lambda + \lambda\mu)\{u, u\} + [(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu) + (\mu u)\lambda - \mu(u\lambda)]u = 0.$$

Si K est de caractéristique 2, $\lambda\mu + \mu\lambda = 0$; si K n'est pas de caractéristique 2, $\{u, u\} = 0$. On a donc toujours

(3) $$(\lambda u)\mu + (\mu u)\lambda = \lambda(u\mu) + \mu(u\lambda) \quad (^{15}).$$

En particulier

$$2(\lambda u)\lambda = 2\lambda(u\lambda),$$

et *si* K *est de caractéristique* $\neq 2$, ce que nous supposerons désormais,

(4) $$(\lambda u)\lambda = \lambda(u\lambda).$$

On a de plus, puisque $\mu \to (\lambda u)\mu$ est une dérivation,

$$\begin{aligned}(\lambda u)\lambda^2 &= [(\lambda u)\lambda]\lambda + \lambda[(\lambda u)\lambda] = 2\lambda[(\lambda u)\lambda] \\ &= 2\lambda^2(u\lambda) \quad \text{d'après (4)} \\ &= \lambda[(u\lambda)\lambda + \lambda(u\lambda)] = \lambda(u\lambda^2),\end{aligned}$$

et par récurrence

$$(\lambda u)\lambda^n = \lambda(u\lambda^n).$$

---

(15) *Cf.* chap. II, formule (6).

En posant dans (3) $\mu = \lambda^n$, nous en déduisons

$$(\lambda^n u)\lambda = \lambda^n (u\lambda).$$

Si μ est un polynome en λ dont les coefficients sont des *constantes relativement à* E ([16]), on a

$$(\lambda u)\mu = (\lambda u)\left(\sum \alpha_i \lambda^i\right) = \sum \alpha_i [(\lambda u)\lambda^i] = \sum \alpha_i [\lambda (u\lambda^i)] = \lambda\left[\sum \alpha_i (u\lambda^i)\right]$$
$$= \lambda\left[u\left(\sum \alpha_i \lambda^i\right)\right] = \lambda(u\mu) \qquad (\alpha_i \in K_0).$$

Supposons maintenant que μ soit une fraction rationnelle en λ (toujours à coefficients constants) : $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ avec α et β polynomes en λ à coefficients dans le corps des constantes K_0, $\beta \neq 0$. Nous avons

$$(\lambda u)\alpha = \lambda(u\alpha),$$

c'est-à-dire

$$(\lambda u)\beta . \mu + \beta(\lambda u)\mu = \lambda[(u\beta)\mu + \beta(u\mu)],$$

d'où, puisque $(\lambda u)\beta = \lambda(u\beta)$ et $\beta \neq 0$,

$$(\lambda u)\mu = \lambda(u\mu).$$

Examinons maintenant le cas où μ est algébrique séparable sur $K_0(\lambda)$. μ est zéro d'un polynome

$$P(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \ldots + \beta_r X^r \qquad [\beta_i \in K_0(\lambda)],$$

mais non du polynome dérivé

$$P'(X) = \beta_1 + \ldots + r\beta_r X^{r-1}.$$

Posons

$$P_u(X) = u\beta_0 + (u\beta_1)X + \ldots + (u\beta_r)X^r.$$

Nous pouvons écrire

$$0 = u[P(\mu)] = P_u(\mu) + P'(\mu)u\mu$$

et

$$0 = (\lambda u)[P(\mu)] = P_{\lambda u}(\mu) + P'(\mu)(\lambda u)\mu.$$

Or, puisque $\beta_i \in K_0(\lambda)$,

$$P_{\lambda u}(X) = \lambda P_u(X),$$

et comme $P'(\mu)$ n'est pas nul, nous en déduisons

$$\lambda(u\mu) = (\lambda u)\mu. \tag{1}$$

Nous avons ainsi obtenu le

([16]) C'est-à-dire des éléments α_i de K tels que $v\alpha_i = 0$ quel que soit $v \in E$. Ils forment un sous-corps K_0 qui contient le sous-corps premier de K, II.

THÉORÈME 3. — *Si* E *est une pseudo-algèbre de Lie de dimension* 1 *sur un corps commutatif de caractéristique* $\neq 2$, *et si* K_0 *est le sous-corps des constantes, on a la relation* $(\lambda u)\mu = \lambda(u\mu)$ *chaque fois que* μ *est algébrique séparable sur* $K_0(\lambda)$.

COROLLAIRE. — *Dans les mêmes conditions, on a la relation* $(\mu u)\lambda = \mu(u\lambda)$.
C'est une conséquence immédiate de la relation (3).

Nous allons voir que la relation (1) n'est pas nécessairement vérifiée quels que soient λ et μ. Nous allons en effet résoudre le problème suivant :

Trouver toutes les pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 *sur un corps commutatif* K, *de caractéristique quelconque, de dimension finie sur son sous-corps premier* II *et séparablement engendré sur* II.

Nous supposons donc que K possède n éléments $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ algébriquement indépendants sur II et est algébrique séparable sur $\Pi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. K possède n dérivations indépendantes $D_1, \ldots, D_n$ telles que $D_i\xi_j = \delta_{ij}$, et si D est une dérivation de K, on a

$$D\lambda = \sum_i D\xi_i . D_i\lambda \quad (17).$$

Soit E une pseudo-algèbre de Lie de dimension 1 sur K, u un élément non nul de E. Posons

$$u\xi_i = \alpha_i ; \qquad (\xi_i u)\xi_j = \beta_{ij} ; \qquad \{u, u\} = \gamma u.$$

Je dis que *la donnée des* α_i, *des* β_{ij} *et de* γ *détermine* E.
En effet, on a (*en supprimant les signes de sommation*, selon l'usage courant),

$$(\lambda u)\mu = (\lambda u)\xi_i . D_i\mu.$$

Or, d'après (3),

$$\begin{aligned}(\lambda u)\xi_i &= \lambda(u\xi_i) + \xi_i(u\lambda) - (\xi_i u)\lambda \\ &= \lambda\alpha_i + \xi_i(u\xi_j)\, D_j\lambda - (\xi_i u)\xi_j . D_j\lambda \\ &= \lambda\alpha_i + [\xi_i(u\xi_j) - (\xi_i u)\xi_j]\, D_j\lambda.\end{aligned}$$

Posons $\omega_{ij} = \xi_i(u\xi_j) - (\xi_i u)\xi_j = \xi_i\alpha_j - \beta_{ij}$: la donnée des ω_{ij} et des α_i équivaut à celle des β_{ij} et des α_i. Nous obtenons

$$(\lambda u)\xi_i = \lambda\alpha_i + \omega_{ij} . D_j\lambda,$$

d'où

$$(\lambda u)\mu = \lambda\alpha_i . D_i\mu + \omega_{ij} . D_j\lambda . D_i\mu.$$

On en déduit d'une part

$$\begin{aligned}\{\lambda u, \mu u\} &= \lambda\mu\{u, u\} + [(\lambda u)\mu - \mu(u\lambda)]u \\ &= [\gamma\lambda\mu + \lambda\alpha_i . D_i\mu + \omega_{ij} . D_j\lambda . D_i\mu - \mu\alpha_i D_i\lambda]u\end{aligned}$$

(17) *Cf.* WEIL, *Fondations of Algebraic Geometry*, p. 12.

ou

$$\{\lambda u,\ \mu u\} = [\gamma\lambda\mu + \alpha_i(\lambda \mathrm{D}_i\mu - \mu \mathrm{D}_i\lambda) + \omega_{ij}\,\mathrm{D}_j\lambda.\,\mathrm{D}_i\mu]u, \tag{5}$$

et d'autre part

$$(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu) = \omega_{ij}.\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_i\mu,$$

et, si $\varphi = \theta u$,

$$(\lambda\varphi)\mu - \lambda(\varphi\mu) = 0\omega_{ij}.\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_i\mu. \tag{5'}$$

Les ω_{ij}, les α_i et γ peuvent-ils être donnés arbitrairement? Voyons à quelles conditions l'opération (5) vérifie les axiomes I à IV.

Axiome I :

$$\gamma\lambda\mu + \alpha_i(\lambda\mathrm{D}_i\mu - \mu\mathrm{D}_i\lambda) + \omega_{ij}\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_i\mu = -\gamma\lambda\mu - \alpha_i(\mu\mathrm{D}_i\lambda - \lambda\mathrm{D}_i\mu) - \omega_{ij}\mathrm{D}_j\mu.\mathrm{D}_i\lambda.$$

ou

$$2\gamma\lambda\mu + \omega_{ij}(\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_i\mu + \mathrm{D}_j\mu.\mathrm{D}_i\lambda) = 0 \quad \text{quels que soient } \lambda \text{ et } \mu$$

Faisons $\lambda = \mu = 1$: nous trouvons

$$2\gamma = 0, \tag{6}$$

ce que nous savions déjà (I, 2, *a*).

Faisons $\lambda = \xi_k$, $\mu = \xi_l$: nous trouvons

$$\omega_{kl} + \omega_{lk} = 0, \tag{7}$$

qui d'ailleurs découle immédiatement de la relation (3) et de la définition de ω_{ik}.

Réciproquement, si les relations (6) et (7) sont vérifiées, l'axiome I l'est aussi.

Axiome II : si $\mu = \mu_1 + \mu_2$, la formule (5) donne immédiatement

$$\{\lambda u,\ \mu u\} = \{\lambda u,\ \mu_1 u\} + \{\lambda u,\ \mu_2 u\}.$$

Pas de condition supplémentaire.

Axiome III : si $\mu = \mu_1\mu_2$, la formule (5) donne

$$\begin{aligned}\{\lambda u,\ \mu u\} &= [\gamma\lambda\mu_1\mu_2 + \alpha_i(\lambda\mu.\mathrm{D}_i\mu_2 + \lambda\mu_2.\mathrm{D}_i\mu_1 - \mu_1\mu_2.\mathrm{D}_i\lambda) + \omega_{ij}.\mathrm{D}_j\lambda(\mu_1.\mathrm{D}_i\mu_2 + \mu_2.\mathrm{D}_i\mu_1)]u \\ &= \mu_1\{\lambda u,\ \mu u\} + 0\mu_2 u \qquad (\text{avec } 0 \text{ indépendant de } \mu_2).\end{aligned}$$

Pas de condition supplémentaire.

Axiome IV : Calculons $\varphi = \{\{\lambda u,\ \mu u\},\ \nu u\} = \zeta u$:

$$\zeta = \gamma 0\nu + \alpha_i(0.\mathrm{D}_i\nu - \nu.\mathrm{D}_i 0) + \omega_{ij}.\mathrm{D}_j\theta.\mathrm{D}_i\nu,$$

avec

$$0 = \gamma\lambda\mu + \alpha_k(\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \mu.\mathrm{D}_k\lambda) + \omega_{kl}.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_k\mu.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\zeta = {}& \gamma^2\lambda\mu\nu + \gamma\nu\alpha_k(\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \mu.\mathrm{D}_k\lambda) + \gamma\nu\omega_{kl}.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_k\mu\\ &+ \alpha_i\mathrm{D}_i\nu.\gamma\lambda\mu + \alpha_i.\mathrm{D}_i\nu.\alpha_k(\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \mu.\mathrm{D}_k\lambda) + \alpha_i.\mathrm{D}_i\nu.\omega_{kl}.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_k\mu\\ &- \alpha_i\nu.\mathrm{D}_i\gamma.\lambda\mu - \alpha_i\nu\gamma.\mathrm{D}_i\lambda.\mu - \alpha_i\nu\gamma\lambda.\mathrm{D}_i\mu - \alpha_i\nu.\mathrm{D}_i\alpha_k(\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \mu.\mathrm{D}_k\lambda)\\ &- \alpha_i\nu\alpha_k(\mathrm{D}_i\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \mathrm{D}_i\mu.\mathrm{D}_k\lambda) - \alpha_i\nu\alpha_k(\lambda.\mathrm{D}_i.\mathrm{D}_k\mu - \mu\,\mathrm{D}_i.\mathrm{D}_k\lambda)\\ &- \alpha_i\nu.\mathrm{D}_i\omega_{kl}.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \alpha_i\nu\omega_{kl}.\mathrm{D}_i.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \alpha_i\nu\omega_{kl}.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_i.\mathrm{D}_k\mu\\ &+ \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\mathrm{D}_j\gamma.\lambda\mu + \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\gamma.\mathrm{D}_j\lambda.\mu + \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\gamma\lambda.\mathrm{D}_j\mu\\ &+ \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\mathrm{D}_j\alpha_k(\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \mu.\mathrm{D}_k\lambda) + \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\alpha_k(\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \mathrm{D}_j\mu.\mathrm{D}_k\lambda)\\ &+ \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\alpha_k(\lambda.\mathrm{D}_j.\mathrm{D}_k\mu - \mu.\mathrm{D}_j.\mathrm{D}_k\lambda) + \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\mathrm{D}_j\omega_{kl}.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_k\mu\\ &+ \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\omega_{kl}.\mathrm{D}_j.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_k\mu + \omega_{ij}.\mathrm{D}_i\nu.\omega_{kl}.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_j\mathrm{D}_k\mu.\end{aligned}$$

Désignons par le signe $\mathfrak{S}$ une sommation par permutation circulaire sur λ, μ, ν. L'identité de Jacobi s'écrit

$$\mathfrak{S}\{\{\lambda u, \mu u\}, \nu u\} = \mathfrak{S}\rho = 0,$$

$$\mathfrak{S}\zeta = 0 \quad \text{quels que soient } \lambda, \mu, \nu.$$

Or, compte tenu de la relation (7) et de $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j = \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\zeta = {}& (\gamma^2 - \alpha_i.\mathrm{D}_i\gamma)\mathfrak{S}\lambda\mu\nu + (\omega_{ij}.\mathrm{D}_j\gamma - \gamma\alpha_i)\mathfrak{S}\lambda\mu.\mathrm{D}_i\nu\\ &+ (-\gamma\omega_{ij} + \alpha_k.\mathrm{D}_k\omega_{ij} + \omega_{jk}.\mathrm{D}_k\alpha_i - \omega_{ik}.\mathrm{D}_k\alpha_j)\mathfrak{S}\mathrm{D}_i\lambda.\mathrm{D}_j\mu.\nu\\ &+ (\alpha_k\omega_{ij} - \omega_{kl}.\mathrm{D}_l\omega_{ij})\mathfrak{S}\mathrm{D}_i\lambda.\mathrm{D}_j\mu.\mathrm{D}_k\nu\end{aligned}$$

Si nous faisons successivement

$$\begin{aligned}\lambda = \mu = \nu &= 1;\\ \lambda = \mu &= 1, \quad \nu = \xi_i;\\ \lambda = \xi_i, \quad \mu &= \xi_j, \quad \nu = 1;\\ \lambda = \xi_i, \quad \mu &= \xi_j, \quad \nu = \xi_k;\end{aligned}$$

nous obtenons

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} 3(\gamma^2 - \alpha_i.\mathrm{D}_i\gamma) &= 0,\\ \omega_{ij}.\mathrm{D}_j\gamma - \gamma\alpha_i &= 0,\\ -\gamma\omega_{ij} + \alpha_k.\mathrm{D}_k\omega_{ij} + \omega_{jk}.\mathrm{D}_k\alpha_i - \omega_{ik}.\mathrm{D}_k\alpha_j &= 0,\\ \mathfrak{S}_{ijk}(\alpha_k\omega_{ij} - \omega_{kl}.\mathrm{D}_l\omega_{ij}) &= 0.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, les conditions (8) assurent la validité de l'axiome IV.

Dans le cas où K est de caractéristique $p \neq 2$, les conditions (6), (7), (8) se réduisent à

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma &= 0,\\ \omega_{ij} + \omega_{ji} &= 0,\\ \alpha_k.\mathrm{D}_k\omega_{ij} + \omega_{jk}.\mathrm{D}_k\alpha_i - \omega_{ik}.\mathrm{D}_k\alpha_j &= 0,\\ \mathfrak{S}_{ijk}(\alpha_k\omega_{ij} - \omega_{kl}.\mathrm{D}_l\omega_{ij}) &= 0,\end{aligned}\right.$$

Dans le cas où $p = 2$, elles se réduisent à

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_{ij} &= \omega_{ji},\\ \gamma^2 + \alpha_i . D_i\gamma &= 0,\\ \omega_{ij} . D_j\gamma + \gamma\alpha_i &= 0,\\ \gamma\omega_{ij} + \alpha_k . D_k\omega_{ij} + \omega_{jk} . D_k\alpha_i + \omega_{ik} . D_k\alpha_j &= 0,\\ \sum_{ijk} (\alpha_k\omega_{ij} + \omega_{kl} . D_l\omega_{ij}) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Examinons quelques *cas particuliers*.

1° $p \neq 2$, $n = 1$: $\omega_{11} = 0$ est la seule condition. On a donc toujours $(\lambda\rho)\,\mu = \lambda(\rho\mu)$, d'après (5′).

Si $\alpha_1 = 0$, on a $\{\lambda u,\ \mu u\} = 0$ quels que soient λ et μ : E est abélienne.

Si $\alpha_1 \neq 0$, posons $u_1 = \dfrac{u}{\alpha_1}$. Nous trouvons, en vertu de (5),

$$\{\lambda u_1,\ \mu u_1\} = (\lambda . D_1\mu - \mu . D_1\lambda) u_1,$$

ce qui montre que E est isomorphe à la pseudo-algèbre de Lie des dérivations de K.

2° $p \neq 2$, $n = 2$: On doit avoir $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$, $\omega_{12} = -\omega_{21}$. Posons $\omega_{12} = \omega$: les conditions (9) se réduisent à

$$(11)\qquad \alpha_1 . D_1\omega + \alpha_2 . D_2\omega = \omega\,(D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2).$$

On peut y satisfaire en prenant $\omega = 0$, d'où, d'après (5′),

$$(\lambda\rho)\,\mu = \lambda(\rho\mu) \quad \text{quels que soient } \rho,\ \lambda \text{ et } \mu.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, E est abélienne. Si α_1 ou α_2 est $\neq 0$, et si l'on pose alors $D = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2$, on voit que E est isomorphe à la sous-pseudo-algèbre de Lie engendrée par D de la pseudo-algèbre de Lie des dérivations de K.

Supposons maintenant $\omega \neq 0$. Pour que $(\lambda\rho)\mu = \lambda(\rho\mu)$, il faut et il suffit, d'après (5′), que

$$D_2\lambda . D_1\mu - D_1\lambda . D_2\mu = 0 \qquad \text{(condition indépendante de } \rho),$$

donc que λ *et* μ *soient algébriquement liés sur* II.

La condition (11) peut s'écrire

$$(12)\qquad D_1\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right) + D_2\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right) = 0.$$

Une solution de (12) est $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\omega = 1$, qui donne

$$\{\lambda u,\ \mu u\} = (D_2\lambda . D_1\mu - D_1\lambda . D_2\mu) u = [(\lambda u)\mu] u \ (cf.\ \text{I, 3, } c).$$

On a alors $(\lambda u)\mu = 0$ si et seulement si λ et μ sont algébriquement liés sur II.

Le *noyau* de E est donc formé par les éléments θu, où θ est algébrique sur H. Il n'est fermé que pour l'addition, non pour l'opération $\{,\}$ ni pour la multiplication par un scalaire (ce qui était évident puisque E n'a pas de sous-espace vectoriel véritable).

Des conclusions analogues peuvent être tirées pour le système général (9), qui admet la solution particulière $\alpha_i = 0$, $\omega_{ij} = 1 (i < j)$.

Remarque. — Ce qui précède établit *l'indépendance de l'axiome IV.*

3° $p = 2$, $n = 1$: Les conditions (10) donnent

$$(13)\qquad \begin{cases} \gamma^2 + \alpha_1 . D_1 \gamma = 0, \\ \omega_{11} . D_1 \gamma + \gamma \alpha_1 = 0, \\ \gamma \omega_{11} + \alpha_1 . D_1 \omega_{11} = 0, \\ \alpha_1 \omega_{11} + \omega_{11} . D_1 \omega_{11} = 0. \end{cases}$$

Le système (13) admet deux groupes de solutions :

1° $\omega_{11} = \gamma = 0$, α_1 quelconque. On a alors *toujours* $(\lambda \varphi)\mu = \lambda(\varphi \mu)$, $\{\lambda u, \lambda u\} = 0$; on rentre dans le cas 1°.

2° $\omega_{11} \neq 0$ quelconque, $\alpha_1 = D_1 \omega_{11}$, $\gamma = \frac{(D_1 \omega_{11})^2}{\omega_{11}}$. On a alors $(\lambda \varphi)\mu = \lambda(\varphi \mu)$ si et seulement si $D_1 \lambda . D_1 \mu = 0$, c'est-à-dire si λ *ou* μ *est une constante.* En particulier $(\lambda u)\lambda = \lambda(u\lambda)$ seulement si λ est une constante. Enfin, $\{\lambda u, \lambda u\} = 0$ si et seulement si $\lambda \omega_{11}$ est une constante.

Posons $\varphi = \frac{u}{\omega_{11}}$. La formule (5) devient

$$\{\lambda \varphi, \mu \varphi\} = D_1 \lambda . D_1 \mu . \varphi,$$

ce qui montre que toutes les pseudo-algèbres de Lie ainsi construites se déduisent les unes des autres par homothétie.

CHAPITRE IV

Immersion d'une pseudo-algèbre de Lie dans un système associatif.

1. Introduction. — Les exemples *b* et *c* de (I, 3) présentent des pseudo-algèbres de Lie construites à partir d'une opération associative $u \bigstar \varphi$ au moyen de la formule $\{u, \varphi\} = u \bigstar \varphi - \varphi \bigstar u$.

De même (II, 1), toute pseudo-algèbre de Lie E de dimension > 1 sur un corps gauche K peut être considérée comme déduite pareillement de l'espace vectoriel E muni de l'opération

$$u \bigstar \varphi = \varphi(u)\varphi, \qquad [\varphi(u) \text{ application linéaire de E dans K}],$$

dont on vérifie immédiatement l'associativité.

Le présent chapitre adapte aux pseudo-algèbres de Lie de dimension >1 sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$ le raisonnement que G. Birkhoff ([18]) applique aux algèbres de Lie, et montre qu'une telle pseudo-algèbre de Lie peut être déduite de la même façon d'un espace vectoriel muni d'une opération associative. Cette opération est distributive pour l'addition, mais non linéaire. On peut donc appeler ce système associatif une *pseudo-algèbre* sur K.

2. L'anneau $\mathfrak{A}$. — Soit E une pseudo-algèbre de Lie de dimension quelconque >1 sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$. Nous la supposons donnée par une base $(e_i)_{i\in I}$, les relations $\{e_i, e_j\}=\sum_k \gamma_{ijk}e_k$ et les dérivations de K $\lambda \to e_i\lambda$, ces données étant soumises aux conditions énoncées plus haut (III, 2). Nous supposerons *totalement ordonné* l'ensemble I qui indexe la base, ce à quoi nous autorise l'axiome du choix.

Nous allons construire un espace vectoriel $\mathfrak{A}$ muni d'une multiplication associative et distributive pour l'addition. Sa base sera constituée par tous les *mots* de la forme $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_r}$ (r entier positif quelconque, *degré* du mot, $i_p\in I$ pour tout p), donc sera en correspondance biunivoque avec l'ensemble des arrangements finis avec répétitions d'éléments de I. Soit $(w_j)_{j\in J}$ cette base. Les éléments de $\mathfrak{A}$ s'écriront donc $z=\sum \lambda_j w_j (j\in J)$.

Nous définirons sur les mots w_j une multiplication associative en associant aux mots w_j et w_k le mot w_jw_k. Nous étendrons cette multiplication à tous les éléments de $\mathfrak{A}$ de la manière suivante :

$$(1)\qquad e_k\left(\sum_j \lambda_j w_j\right)=\sum_i [(e_k\lambda_j)\,w_j+\lambda_j(e_kw_j)],$$

$$(2)\qquad (e_{k_1}e_{k_2}\dots e_{k_s})\left(\sum_j \lambda_j w_j\right)=e_{k_1}\left[(e_{k_2}e_{k_3}\dots e_{k_s})\left(\sum_j \lambda_j w_j\right)\right],$$

$$(3)\qquad \left(\sum_k \mu_k w_k\right)\left(\sum_i \lambda_j w_j\right)=\sum_k \mu_k\left[w_k\left(\sum_j \lambda_j w_j\right)\right].$$

Cette opération est définie d'une manière unique et possède les propriétés suivantes :

a. Distributivité pour l'addition : à gauche d'après (3) ; à droite d'après (3), (2), (1) et la relation $e_k(\lambda+\mu)=e_k\lambda+e_k\mu$.

b. Linéarité à gauche : $(\alpha z_1)z_2=\alpha(z_1z_2)$ pour $\alpha\in K$, z_1 et $z_2\in\mathfrak{A}$, d'après (3).

([18]) *Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 526-532.

c. $e_k(\mu z) = (e_k\mu)z + \mu(e_k z)$ pour $\mu \in \mathrm{K}$, $z \in \mathfrak{A}$. En effet,

$$e_k\left[\mu\left(\sum_i \lambda_i w_i\right)\right] = e_k\left[\sum_i (\mu\lambda_i)\, w_i\right] = \sum_i \{[e_k(\mu\lambda_i)]\, w_i + (\mu\lambda_i)\,(e_k w_i)\} \quad \text{d'après (1)}$$

$$= \sum_i \{[(e_k\mu)\lambda_i + \mu(e_k\lambda_i)]\, w_i + (\mu\lambda_i)(e_k w_i)\}$$

$$= (e_k\mu)\left(\sum_i \lambda_i w_i\right) + \mu \sum_i [(e_k\lambda_i)\, w_i + \lambda_i (e_k w_i)]$$

$$= (e_k\mu)\left(\sum_i \lambda_i w_i\right) + \mu\left[e_k\left(\sum_i \lambda_i w_i\right)\right] \quad \text{d'après (1), C. Q. F. D.}$$

d. Associativité : on a d'abord, si w et w' sont deux mots, et λ et μ deux éléments de K,

$$\begin{aligned}
e_k[(\mu w')\,(\lambda w)] &= e_k\{\mu[w'(\lambda w)]\} && \text{d'après (3)}\\
&= (e_k\mu)\,[w'(\lambda w)] + \mu\{e_k[w'(\lambda w)]\} && \text{» } c\\
&= [(e_k\mu)\, w']\,(\lambda w) + \mu\{e_k[w'(\lambda w)]\} && \text{» (3)}\\
&= [(e_k\mu)\, w']\,(\lambda w) + \mu[(e_k w')\,(\lambda w)] && \text{» (2)}\\
&= [(e_k\mu)\, w']\,(\lambda w) + [\mu(e_k w')]\,(\lambda w) && \text{» (3)}\\
&= [(e_k\mu)\, w' + \mu(e_k w')]\,(\lambda w) && \text{» } a\\
&= [e_k(\mu w')]\,(\lambda w) && \text{» (1).}
\end{aligned}$$

Ensuite, par récurrence sur le degré du mot w'',

$$\begin{aligned}
(e_k w'')\,[(\mu w')\,(\lambda w)] &= e_k\{w''[(\mu w')\,(\lambda w)]\} && \text{d'après (2)}\\
&= e_k\{[w''(\mu w')]\,(\lambda w)\} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= e_k\left[\left(\sum_i \nu_i w_i\right)(\lambda w)\right] = \sum_i \{e_k[(\nu_i w_i)\,(\lambda w)]\} && \text{d'après } a\\
&= \sum_i \{[e_k(\nu_i w_i)]\}\,(\lambda w) && \text{d'après ce qui précède,}\\
&= \left\{\sum_i [e_k(\nu_i w_i)]\right\}(\lambda w) = \left[e_k\left(\sum_i \nu_i w_i\right)\right](\lambda w) && \text{d'après } a\\
&= \{e_k[w''(\mu w')]\}\,(\lambda w) = [(e_k w'')\,(\mu w')]\,(\lambda w) && \text{d'après (2).}
\end{aligned}$$

Enfin, d'après (3),

$$(\nu w'')\,[(\mu w')\,(\lambda w)] = [(\nu w'')\,(\mu w')]\,(\lambda w),$$

et par suite de la distributivité :

$$z''(z'z) = (z''z')\,z \quad \text{pour tout } z,\ z',\ z'' \in \mathfrak{A}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous adjoindrons à $\mathfrak{A}$, pour la commodité, un élément neutre pour la multiplication e et ses multiples λe ($\lambda \in \mathrm{K}$). e pourra être considéré comme un mot de degré zéro. Les règles de calcul précédentes s'étendent immédiatement au nouvel ensemble $\mathfrak{A}'$, qui est donc à la fois *espace vectoriel* contenant E et *anneau unitaire*.

2. L'idéal $\mathfrak{J}$. — Dans l'anneau $\mathfrak{A}'$, nous allons considérer *l'idéal bilatère* $\mathfrak{J}$ engendré par tous les éléments de la forme

$$z_{ij} = e_i e_j - e_j e_i - \{e_i, e_j\} \qquad (i, j \in \mathrm{I})$$

et l'*anneau quotient* $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}$. $\mathfrak{A}''$ aura une structure d'*espace vectoriel* : en effet, si $z \in \mathfrak{J}$, $\lambda z = (\lambda e) z \in \mathfrak{J}$.

Lemme 1. — *z_{ij} étant l'élément de $\mathfrak{A}'$ défini plus haut, on a*

$$z_{ij}(\lambda w) = \lambda z_{ij} w.$$

En effet,

$$\begin{aligned} z_{ij}(\lambda w) &= (e_i e_j)(\lambda w) - (e_j e_i)(\lambda w) - \{e_i, e_j\}(\lambda w) = e_i[e_j(\lambda w)] - e_j[e_i(\lambda w)] - \{e_i, e_j\}(\lambda w) \\ &= [e_i(e_j\lambda)]w + (e_j\lambda)(e_j w) + \lambda(e_i e_j w) + (e_j\lambda)(e_i w) \\ &\quad - \{[e_j(e_i\lambda)]w + (e_j\lambda)(e_i w) + \lambda(e_j e_i w) + (e_i\lambda)(e_j w)\} - [\{e_i, e_j\}\lambda]w - \lambda\{e_i, e_j\} w \\ &= [e_i(e_j\lambda) - e_j(e_i\lambda) - \{e_i, e_j\}\lambda]w + \lambda[e_i e_j w - e_j e_i w - \{e_i, e_j\} w] \\ &= \lambda z_{ij} w \quad \text{puisque le premier crochet est nul.} \end{aligned}$$

Proposition 1. — *L'idéal $\mathfrak{J}$ coïncide avec l'ensemble $\mathfrak{J}_1$ des sommes finies $\sum \lambda w z_{ij} w'$ ($\lambda \in \mathrm{K}$, w et w' mots quelconques de degré $\geqq 0$).*

En effet, $\mathfrak{J}_1$ est un module ; les termes $\lambda w z_{ij} w'$ appartiennent à l'idéal bilatère $\mathfrak{J}$, donc $\mathfrak{J}_1 \subseteqq \mathfrak{J}$.

D'autre part $\mathfrak{J}_1$ est un idéal, car si $z \in \mathfrak{A}'$,

$$\begin{aligned} z(\lambda w z_{ij} w') &= z[(\lambda e)(w z_{ij} w')] = [z(\lambda e)](w z_{ij} w') \\ &= \left(\sum_k \mu_k w_k\right)(w z_{ij} w') = \sum_k \mu_k (w_k w) z_{ij} w' \in \mathfrak{J}_1 \end{aligned}$$

et

$$(\lambda w z_{ij} w') z = \lambda w z_{ij}(w' z) = \lambda w z_{ij}\left(\sum_q \nu_q w_q\right) = \sum_q \lambda w (\nu_q z_{ij} w_q)$$

(d'après le lemme 1)

$$= \sum_q \lambda w[(\nu_q e) z_{ij} w_q] = \sum_q \{[\lambda w(\nu_q e)] z_{ij} w_q\} = \sum_q \sum_r \xi_{qr} w_r z_{ij} w_q \in \mathfrak{J}_1.$$

3. Éléments canoniques de $\mathfrak{A}'$. — L'ensemble d'indices I α été supposé totalement ordonné. Parmi les mots $w_j = e_{j_1} e_{j_2} \ldots e_{j_r}$, distinguons ceux où la suite des indices j_p est *non décroissante*. Soit $\overline{w}_j$ un tel mot, $\overline{z}$ un élément de $\mathfrak{A}'$ dont l'expression ne comporte que des $\overline{w}_j$ et e. Je dis que dans toute classe de $\mathfrak{A}'$ modulo $\mathfrak{J}$ existe un $\overline{z}$ et un seul. Nous appellerons $\overline{z}$ *élément canonique*.

a. Existence de la forme canonique. — Pour montrer l'existence d'un $\overline{z}$ congru à un z donné, il suffit de montrer l'existence d'un $\overline{z}$ congru à un mot w donné. Nous procéderons par récurrence sur le degré de w et sur le nombre d'inver-

sions de sa suite d'indices. La proposition est évidente pour w de degré 1 et pour w sans inversions. Supposons que dans w deux indices consécutifs présentent une inversion :

$$w = e_{j_1} \dots e_{j_{p-1}} e_{j_p} e_{j_{p+1}} e_{j_{p+2}} \dots e_{j_r} \qquad (j_p > j_{p+1}).$$

Nous avons modulo $\mathfrak{J}$,

$$w \equiv e_{j_1} \dots e_{j_{p-1}} e_{j_{p+1}} e_{j_p} e_{j_{p+2}} \dots e_{j_r} + e_{j_1} \dots e_{j_{p-1}} \{e_{j_p}, e_{j_{p+1}}\} e_{j_{p+2}} \dots e_{j_r}.$$

L'expression du second terme développé suivant les règles (1), (2), (3) ne comporte que des mots de degré inférieur à r, et le premier présente une inversion de moins que w ; la proposition est donc démontrée.

b. Univocité du procédé de construction. — La démonstration ci-dessus contient le processus de réduction d'un élément quelconque z à une forme canonique $\bar{z}$: chacun des monômes non canoniques w composant z est remplacé par une somme de monômes dont le degré est inférieur à celui de w, ou de même degré et présentant moins d'inversions ; on recommence sur chacun des monômes non canoniques, et l'on aboutit ainsi, au moyen d'un nombre fini d'opérations, à un ensemble de monômes canoniques dont la somme est la forme canonique cherchée $\bar{z}$.

Si l'on interrompt le processus à un stade quelconque, on obtient un élément z_0 intermédiaire entre z et $\bar{z}$. Nous écrirons symboliquement $z \to z_0 \to \bar{z}$, et nous énoncerons : « z *donne* z_0 (qui donne $\bar{z}$) ».

Ce processus n'est pas unique. Nous allons montrer cependant que la forme canonique $\bar{z}$ obtenue est indépendante de la suite d'opérations employée. Il suffit évidemment de le montrer pour tout mot w.

La proposition est vraie pour tout mot de degré 1, ainsi que pour tout mot sans inversion d'indices ; nous la supposerons vraie pour tout mot de degré $< r$ ainsi que pour tout mot de degré r présentant moins de q inversions, et nous le démontrerons pour un mot w de degré r présentant q inversions.

La première opération du processus mène de w à un élément z somme de monômes vérifiant les conditions de l'hypothèse de récurrence ; on aboutit donc de z à une forme canonique unique $\bar{z}$. Si donc deux processus différents coïncident quant à leur première opération, ils donnent de w la même forme canonique. En écartant ce cas, on a à examiner l'effet de deux processus $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ différant dès leur première opération. Il se présente alors deux cas :

(A) $\qquad w = w_1 e_i e_j w_2 e_{i'} e_{j'} w_3 \qquad (i > j,\ i' > j'$; w_1, w_2, w_3 sont des mots).

La première opération de $\mathfrak{P}$ supprime l'inversion i, j.
La première opération de $\mathfrak{P}'$ supprime l'inversion i', j'.

(B) $\qquad w = w_1 e_i e_j e_k w_2 \qquad (i > j > k).$

La première opération de $\mathfrak{P}$ supprime l'inversion i, j.
La première opération de $\mathfrak{P}'$ supprime l'inversion j, k.

LEMME 2. — *Tout élément de $\mathfrak{I}$ admet une forme canonique nulle.*

Un tel élément est, d'après la proposition 1, une somme de termes $\lambda w z_{ij} w'$, w et w' étant des mots. Chacun d'eux est de la forme

$$\lambda w z_{ij} w' = \lambda w e_i e_j w' - \lambda w e_j e_i w' - \lambda w \{e_i, e_j\} w'.$$

Supposons, pour fixer les idées, $i > j$; le premier terme $\lambda w e_i e_j w'$ donne alors $\lambda w e_j e_i w' + \lambda w \{e_i, e_j\} w'$, donc $\lambda w z_{ij} w'$ donne zéro, d'où le lemme.

LEMME 3. — *Si $i > j$, si $\lambda \in K$ et si z_1 et z_2 sont deux éléments quelconques de $\mathfrak{A}'$, on peut passer de $z_1(\lambda e_i e_j) z_2$ à $z_1(\lambda e_j e_i) z_2 + z_1(\lambda \{e_i, e_j\}) z_2$.*

En effet, posons $z_1(\lambda e) = z_3$. Nous aurons

$$z_1(\lambda e_i e_j) z_2 = z_3 e_i e_j z_2 = z_3 e_j e_i z_2 + z_3 \{e_i, e_j\} z_2 + z_3 z_{ij} z_2.$$

Le dernier terme, d'après le lemme 2, donne zéro, d'où le résultat.

(A)
$$\begin{cases} w \to z = w_1 e_j e_i w_2 e_{i'} e_{j'} w_3 + w_1 \{e_i, e_j\} w_2 e_{i'} e_{j'} w_3 = w_4 + z_1, \\ w \to z' = w_1 e_i e_j w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 + w_1 e_i e_j w_2 \{e_{i'}, e_{j'}\} w_3 = w' + z'_1. \end{cases}$$

z et z' donnent, d'après l'hypothèse de récurrence, des formes canoniques uniques z et z'.

Or

$$w_4 \to z_2 = w_1 e_j e_i w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 + w_1 e_j e_i w_2 \{e_{i'}, e_{j'}\} w_3 = w_5 + z_2$$

et, d'après le lemme 3,

$$z_1 \to w_1 \{e_i, e_j\} w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 + w_1 \{e_i, e_j\} w_2 \{e_{i'}, e_{j'}\} w_3 = z_4 + z_5.$$

D'où

$$z \to w_5 + z_3 + z_4 + z_5 = z_0.$$

D'autre part,

$$w' \to w_1 e_j e_i w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 + w_1 \{e_i, e_j\} w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 = w_5 + z_4,$$

et, d'après le lemme 3,

$$z'_1 \to z_3 + z_5,$$

d'où

$$z' \to w_5 + z_4 + z_3 + z_5 = z_0.$$

Nous voyons que l'on peut passer de z et de z' au même élément z_0. Il s'ensuit que les éléments canoniques z et z' sont égaux, et par suite que deux suites d'opérations différentes du type envisagé mènent du mot w au même élément canonique z.

(B)
$$\begin{cases} w \to z = w_1 e_j e_i e_k w_2 + w_1 \{e_i, e_j\} e_k w_2; \\ w \to z' = w_1 e_i e_k e_j w_2 + w_1 e_i \{e_j, e_k\} w_2. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, tous les procédés de réduction mènent de z et z' à des éléments canoniques uniques $\overline{z}$ et $\overline{z'}$.

Or, on peut passer de z à

$$z_1 = w_1 e_j e_k e_i w_2 + w_1 e_j \{e_i, e_k\} w_2 + w_1 \{e_i, e_j\} e_k w_2,$$

puis à

$$\begin{aligned} z_2 &= w_1 e_k e_j e_i w_2 + w_1 \{e_j, e_k\} e_i w_2 + w_1 e_j \{e_i, e_k\} w_2 + w_1 \{e_i, e_j\} e_k w_2 \\ &= w' + z_3 + z_4 + z_5. \end{aligned}$$

D'autre part, on peut passer de z' à

$$z'_1 = w_1 e_k e_i e_j w_2 + w_1 \{e_i, e_k\} e_j w_2 + w_1 e_i \{e_j, e_k\} w_2,$$

puis à

$$\begin{aligned} z'_2 &= w_1 e_k e_j e_i w_2 + w_1 e_k \{e_i, e_j\} w_2 + w_1 \{e_i, e_k\} e_j w_2 + w_1 e_i \{e_j, e_k\} w_2 \\ &= w' + z'_3 + z'_4 + z'_5. \end{aligned}$$

Comparons z_3 et z'_5. Soit

$$\{e_j, e_k\} = \sum_m \gamma_m e_m. \tag{4}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} z_3 &= w_1 \left(\sum_{m \leq i} \gamma_m e_m \right) e_i w_2 + w_1 \left(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} e_{m'} \right) e_i w_2 \\ &\rightarrow w_1 \left(\sum_{m \leq i} \gamma_m e_m \right) e_i w_2 + w_1 \left(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} e_i e_{m'} \right) w_2 + w_1 \left(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} \{e_{m'}, e_i\} \right) w_2 = z_6 \end{aligned}$$

d'après le lemme 3, et

$$\begin{aligned} z'_5 &= w_1 e_i \left(\sum_m \gamma_m e_m \right) w_2 \\ &= w_1 \left[\sum_m (e_i \gamma_m) e_m \right] w_2 + w_1 \left(\sum_{m \leq i} \gamma_m e_i e_m \right) w_2 + w_1 \left(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} e_i e_{m'} \right) w_2 \\ &\rightarrow w_1 \left[\sum_m (e_i \gamma_m) e_m \right] w_2 + w_1 \left(\sum_{m \leq i} \gamma_m e_m e_i \right) w_2 \\ &\qquad + w_1 \left(\sum_{m \leq i} \gamma_m \{e_i, e_m\} \right) w_2 + w_1 \left(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} e_i e_{m'} \right) w_2 \\ &= z_6 + w_1 \left[\sum_m (e_i \gamma_m) e_m + \sum_{m \leq i} \gamma_m \{e_i, e_m\} - \sum_{m' > i} \gamma_{m'} \{e_{m'}, e_i\} \right] w_2. \end{aligned}$$

Or, d'après (4), le crochet n'est autre que $\{e_i, \{e_j, e_k\}\}$, donc

$$z_3 \rightarrow z_6 \qquad \text{et} \qquad z'_5 \rightarrow z_6 + w_1 \{e_i, \{e_j, e_k\}\} w_2.$$

Deux calculs analogues donneront

$$z_3 \Im z_7, \qquad z'_3 \Im z_7 + w_1\{e_k, \{e_i, e_j\}\}w_2,$$

et

$$z'_4 \Im z_8, \qquad z_4 \Im z_8 + w_1\{e_j, \{e_i, e_k\}\}w_2,$$

donc

$$z \Im w' + z_6 + z_7 + z_8 + w_1\{e_j, \{e_i, e_k\}\}w_2 = z_0,$$

et

$$z' \Im w' + z_6 + z_7 + z_8 + w_1[\{e_i, \{e_j, e_k\}\} + \{e_k, \{e_i, e_j\}\}]w_2 = z'_0.$$

En vertu de l'identité de Jacobi, ces deux éléments sont égaux.

Nous avons donc montré l'univocité du procédé de construction.

c. Unicité de la forme canonique. — Cette univocité va nous servir pour montrer qu'il existe au plus un élément canonique congru modulo $\mathfrak{I}$ à un élément z donné.

Désignons en effet par $\overline{z}$ l'élément canonique obtenu à partir de z par le procédé de construction ci-dessus. Supposons que deux éléments *canoniques* z_1 et z_2 soient congrus à un même élément z. Nous avons $\overline{z}_1 = z_1$, $\overline{z}_2 = z_2$ et $z_1 - z_2 \in \mathfrak{I}$. D'après le lemme 2, $\overline{\overline{z_1 - z_2}} = 0$. Or, pour deux éléments quelconques y_1 et y_2 de $\mathfrak{A}'$, on a $\overline{\overline{y_1 - y_2}} = \overline{y}_1 - \overline{y}_2$. Il s'ensuit que $z_1 = z_2$.

C. Q. F. D.

Si nous remarquons enfin que l'ensemble des éléments canoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{A}'$, nous pouvons énoncer :

Proposition 2. — *L'ensemble $\mathfrak{C}$ des éléments canoniques de $\mathfrak{A}'$ est isomorphe à* l'espace *quotient* $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'/\mathfrak{I}$.

4, Le théorème d'immersion. — En introduisant dans $\mathfrak{C}$ l'opération $z_1 \star z_2 = \overline{\overline{z_1 z_2}}$, on en fait une pseudo-algèbre associative $\mathfrak{C}^*$ isomorphe à la *pseudo-algèbre* quotient $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'/\mathfrak{I}$.

E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{C}^*$, et pour deux quelconques u et v de ses éléments, on a dans $\mathfrak{C}^*$:

$$\{u, v\} = u \star v - v \star u.$$

Nous avons donc réalisé l'immersion de E dans une pseudo-algèbre associative. Nous énoncerons :

Théorème. — *Toute pseudo-algèbre de Lie de dimension > 1 sur un corps commutatif* K *de caractéristique $\neq 2$ peut être plongée dans un espace vectoriel sur* K *muni d'une opération associative, distributive pour l'addition, telle que, si on la note par le signe $\star$, $\{u, v\} = u \star v - v \star u$ pour tout couple u, v d'éléments de* E.

CHAPITRE V.

SYSTÈMES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A UNE INCONNUE.

1. La pseudo-algèbre de Lie fondamentale. — On considère, dans la théorie algébrique des équations aux dérivées partielles ([19]) un corps commutatif K muni de n dérivations (« partielles ») *permutables*. Nous allons étudier systématiquement l'espace engendré par ces dérivations sur K [qui est un sous-espace de la pseudo-algèbre de Lie $\mathfrak{D}(K)$ de toutes les dérivations de K].

Soit donc E un sous-espace de $\mathfrak{D}(K)$, de dimension finie, et engendré par un système d'éléments $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tels que $\{d_i, d_j\} = 0$ pour tout couple d'indices i, j. En vertu de la proposition 1 (I, 4), E est une *sous-pseudo-algèbre de Lie* de $\mathfrak{D}(K)$. Nous supposerons de plus qu'il existe des éléments $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de K tels que $d_i \xi_j = \delta_{ij}$. Il s'ensuit que $d_1, \ldots, d_n$ est une base de E; car si $\sum_i \alpha_i d_i = 0$, $\left(\sum_i \alpha_i d_i\right)\xi_h = \alpha_h = 0$ quel que soit h.

E sera appelée pseudo-algèbre de Lie *fondamentale*.

Définition 1. — Un système $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments d'une pseudo-algèbre de Lie E est dit *jacobien* si $\{u_i, u_j\} = 0$ pour tout $i, j \in I$.

Proposition 1. — *Si un sous-espace vectoriel* V *d'une pseudo-algèbre de Lie quelconque* E *a une base jacobienne, c'est une sous-pseudo-algèbre de Lie de* E.

C'est, comme plus haut, une conséquence immédiate de la proposition 1 (I, 4).

Proposition 2. — *Toute sous-pseudo-algèbre de Lie* V *de la pseudo-algèbre de Lie fondamentale* E *possède une base jacobienne.*

Soit en effet $u_1, \ldots, u_p$ une base de V. On peut compléter cette base, au moyen des d_i, en une base de E, par exemple $u_1, \ldots, u_p, d_{p+1}, \ldots, d_n$. E est somme directe de V et du sous-espace F de base $d_{p+1}, \ldots, d_n$ (qui est, d'après la proposition 1, une sous-pseudo-algèbre de Lie). E est aussi somme directe de F et de la sous-pseudo-algèbre de Lie G de base $d_1, \ldots, d_p$.

On a, d'une seule manière, $d_i = v_i + w_i$ avec $v_i \in V$, $w_i \in F$. Les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont *linéairement indépendants*, car $\sum \alpha_i v_i = 0$ entraîne, puisque $E = F \dotplus G$, $\sum \alpha_i d_i = 0$, d'où $\alpha_i = 0$ pour tout $i \leq p$. Ils forment donc une base de V.

([19]) Ritt, *Differential Algebra*, chap. IX.

Je dis que le système $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_p$ est *jacobien*. En effet,

$$\{\varpi_i, \varpi_j\} = \{w_i, w_j\} - \{d_i, w_j\} + \{d_j, w_i\};$$

w_j est de la forme $\sum_{p+1}^{n} \beta_k d_k$, et par conséquent

$$\{d_i, w_j\} = \sum_{p+1}^{n} (d_i \beta_k)\, d_k \in \mathrm{F}; \qquad \text{de même} \quad \{d_j, w_i\} \in \mathrm{F}.$$

Enfin $\{w_i, w_j\} \in \mathrm{F}$. Donc $\{\varpi_i, \varpi_j\} \in \mathrm{F}$.

D'autre part, V étant une sous-pseudo-algèbre de Lie de E, $\{\varpi_i, \varpi_j\} \in \mathrm{V}$. Donc $\{\varpi_i, \varpi_j\} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{V}$, ce qui exige $\{\varpi_i, \varpi_j\} = 0$.

La proposition est démontrée.

2. La pseudo-algèbre associative enveloppante. — E est un ensemble de dérivations, donc de transformations de K. Relativement à l'opération de composition de ces transformations, le plus petit demi-groupe contenant E est l'ensemble $\mathcal{G}$ des produits finis d'éléments de E.

Étant donnés deux transformations T_1, T_2 et un élément λ de K, nous notons selon l'usage $\lambda \mathrm{T}_1$ la transformation T′ définie par $\mathrm{T}'\alpha = \lambda(\mathrm{T}_1 \alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{K}$, $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$ la transformation T″ définie par $\mathrm{T}''\alpha = \mathrm{T}_1\alpha + \mathrm{T}_2\alpha$. $\mathcal{G}$ engendre ainsi sur K un espace vectoriel de transformations $\mathfrak{A}$.

Proposition 3. — *$\mathfrak{A}$ est fermé pour l'opération de composition.*

Il nous suffit de montrer que $(\lambda u_1 u_2 \ldots u_p)(\mu \varpi_1 \varpi_2 \ldots \varpi_q)$ appartient à $\mathfrak{A}$ ($\lambda, \mu \in \mathrm{K}$; $u_i, \varpi_j \in \mathrm{E}$). Si $p = 1$,

$$(\lambda u_1)(\mu \varpi_1 \ldots \varpi_q) = \lambda(u_1 \mu)\varpi_1 \ldots \varpi_q + \lambda\mu u_1 \varpi_1 \ldots \varpi_q.$$

Par récurrence, nous voyons que $(\lambda u_1 \ldots u_p)(\mu \varpi_1 \ldots \varpi_q)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{G}$.

Cette opération est *distributive* pour l'addition, donc $\mathfrak{A}$ sera un anneau. Elle n'est pas linéaire, et $\mathfrak{A}$ ne sera pas une algèbre sur K. On a cependant, si w et w' sont deux éléments de $\mathfrak{A}$,

$$(1) \qquad (\lambda w) w' = \lambda (w w'),$$

$$(2) \qquad w(\lambda w') = (w\lambda) w' + w_1 w' \qquad (w_1 \in \mathfrak{A}).$$

[En effet, si $u \in \mathrm{E}$,

$$u(\lambda w') = (u\lambda) w' + \lambda u w'.$$

Supposons démontré que

$$(u_2 \ldots u_p)(\lambda w') = (u_2 \ldots u_p \lambda) w' + w_2 w',$$

on aura

$$\begin{aligned}(u_1 u_2 \dots u_p)(\lambda w') &= u_1[(u_2 \dots u_p \lambda) w' + w_2 w'] \\ &= [(u_1 \dots u_p)\lambda] w' + [(u_2 \dots u_p)\lambda u_1 + u_1 w_2] w' \\ &= [(u_1 \dots u_p)\lambda] w' + w_1 w',\end{aligned}$$

et par distributivité, la relation cherchée].

Nous sommes donc amenés à l'appeler *pseudo-algèbre* associative. Ses éléments seront appelés *dérivations supérieures* de K.

PROPOSITION 4. — *Si* K *est de caractéristique nulle, les vecteurs* $d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}$ *de* $\mathfrak{A}$ (α_i *entiers* ≥ 0, *non tous nuls*) *sont linéairement indépendants sur* K.

Supposons en effet qu'il existe une relation

$$\sum_{\alpha} \lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n} = 0 \qquad (\text{tous les } \lambda_\alpha \text{ étant} \neq 0), \tag{3}$$

et soit $\lambda d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}$ un terme où la somme $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ soit minimum. Dans tout autre terme $\mu d_1^{\beta_1} d_2^{\beta_2} \dots d_n^{\beta_n}$, il existe un indice i tel que $\beta_i > \alpha_i$. Le premier membre de (3) transforme donc l'élément $\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ de K en l'élément $\alpha_1 ! \alpha_2 ! \dots \alpha_n ! \lambda$, qui n'est pas nul puisque K est de caractéristique nulle : d'où la proposition.

PROPOSITION 5. — *Ce système* S *d'éléments de* $\mathfrak{A}$ *engendre* $\mathfrak{A}$.

Il nous suffit de montrer qu'un élément de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire une dérivation supérieure de la forme $u_1 u_2 \dots u_q$ avec $u_i \in$ E, est égal à une combinaison linéaire d'éléments de S.

La proposition est vraie pour $q = 1$; supposons que $u_2 u_3 \dots u_q$ soit une combinaison linéaire d'éléments de S, $\sum \lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}$, et soit $u_1 = \sum \theta_i d_i$. On a

$$\begin{aligned}(\theta_i d_i)(\lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}) &= \theta_i[d_i(\lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n})] \\ &= \theta_i[(d_i \lambda_\alpha) d_1^{\alpha_1} \dots d_n^{\alpha_n} + \lambda_\alpha d_i d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}] \\ &= \theta_i (d_i \lambda_\alpha) d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_i^{\alpha_i} \dots d_n^{\alpha_n} + \theta_i \lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_i^{\alpha_i + 1} \dots d_n^{\alpha_n},\end{aligned}$$

d'où la proposition (vraie quelle que soit la caractéristique de K).

COROLLAIRE 1. — *Si* K *est de* caractéristique nulle, S *est une base de l'espace* $\mathfrak{A}$.

Nous nous placerons *désormais dans ce cas.*

DÉFINITION 2. — Nous appellerons *ordre* d'un élément $d_1^{\alpha_1} \dots d_n^{\alpha_n}$ de S la somme des entiers α_i. L'ordre d'un élément de $\mathfrak{A}$ sera l'ordre maximum de ses termes dans son expression au moyen de S. E apparaît donc comme l'ensemble des éléments du premier ordre de $\mathfrak{A}$ (mis à part l'élément zéro)

PROPOSITION 6. — *Si w et w' sont deux dérivations supérieures, les termes de plus haut ordre de ww' s'obtiennent en faisant le produit des termes de plus haut ordre de w et w', comme s'il s'agissait de polynomes en $d_1, d_2, \ldots, d_n$.*

En effet $d_i(\mu d_1^{\beta_1} d_2^{\beta_2} \ldots d_n^{\beta_n})$ a pour terme de plus haut ordre $\mu d_1^{\beta_1} \ldots d_i^{\beta_{i+1}} \ldots d_n^{\beta_n}$, et, par récurrence, $(\lambda d_1^{\alpha_1} \ldots d_n^{\alpha_n})(\mu d_1^{\beta_1} \ldots d_n^{\beta_n})$ a pour terme de plus haut ordre $\lambda\mu d_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots d_n^{\alpha_n+\beta_n}$. La proposition 6 résulte alors immédiatement de la distributivité.

COROLLAIRE 2. — *Ordre $(ww') =$ ordre $w +$ ordre w'.*

COROLLAIRE 3. — $w(\lambda w') = \lambda(ww') + z$ *avec ordre* $z <$ *ordre* ww'.

PROPOSITION 7. — *Si p éléments de* E, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ *sont linéairement indépendants, les éléments de* $\mathfrak{A}$ *de la forme* $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$ (α_i *non tous nuls*) *sont linéairement indépendants.*

Nous utiliserons le *lemme* d'algèbre suivant :

Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ *sont p formes linéaires indépendantes à n variables* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sur un corps* K, *et h un entier positif, les polynomes*

$$Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \ldots Y_p^{\alpha_p} \left(\sum \alpha_i = h \right)$$

homogènes en $X_1, \ldots, X_n$ *sont linéairement indépendants sur* K (20).

Nous en déduisons, en vertu de la proposition 6, qu'une combinaison linéaire (à coefficients non tous nuls) de « monômes » $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$ tous d'ordre h ne peut être nulle. Il en est de même pour des monômes d'ordre quelconque, puisque seuls les monômes de plus haut ordre h interviennent dans le calcul des termes d'ordre h du développement suivant la base S. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION 8. — *Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n éléments linéairement indépendants de* E, *les éléments de* $\mathfrak{A}$ *de la forme* $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_n^{\alpha_n}$ (α_i *non tous nuls*) *forment une base de* $\mathfrak{A}$.

On vient de montrer que ces éléments sont linéairement indépendants. Il reste à prouver qu'ils engendrent $\mathfrak{A}$. Or, par un raisonnement analogue à celui

(20) N'ayant pas trouvé ce résultat dans la littérature algébrique, j'indique brièvement une démonstration : si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont n formes linéaires (indépendantes ou non) en $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de déterminant δ, les coefficients des polynomes homogènes de degré h, $Y_1^{\alpha_1}, Y_2^{\alpha_2}, \ldots, Y_n^{\alpha_n}$ ont pour déterminant $\Delta = \delta^{\omega}$, ω étant le nombre Γ_{n+1}^{h-1} de combinaisons avec répétitions de $n+1$ objets pris $h-1$ à $h-1$. Cette égalité se démontre aisément au moyen du calcul extérieur, par récurrence sur n et h, en se ramenant par une transformation simple au cas où $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ ne dépendent pas de X_n. En particulier, $\delta \neq 0$ entraîne $\Delta \neq 0$, d'où le lemme.

utilisé dans la démonstration de la proposition 5, on voit facilement que les éléments de $\mathfrak{A}$ de la forme $u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_q}$, où q est un entier positif quelconque, i_k un entier positif quelconque $\leq n$, engendrent $\mathfrak{A}$.

Soit r le nombre des inversions présentées par la suite $i_1, \dots, i_q$. Montrons que $w = u_{i_1}\dots u_{i_q}$ s'exprime comme combinaison linéaire des seuls éléments $u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\dots u_n^{\alpha_n}$. C'est vrai pour $q=1$, ainsi que pour $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_q$. Supposons-le démontré pour tout élément d'ordre $\leq q-1$, et pour tout élément d'ordre q dans lequel la suite $i_1, i_2, \dots, i_q$ présente $r-1$ inversions.

Il y a dans w deux indices consécutifs i_k, i_{k+1} tels que $i_k > i_{k+1}$. Or nous avons

$$u_{i_k}u_{i_{k+1}} = u_{i_{k+1}}u_{i_k} - \{u_{i_k}, u_{i_{k+1}}\} = u_{i_{k+1}}u_{i_k} - \sum_l \alpha_l u_l,$$

d'où

$$w = u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_q} - \sum_l u_{i_1}\dots u_{i_{k-1}}(\alpha_l u_l)u_{i_{k+2}}\dots u_{i_q}.$$

Le premier terme du second membre présente $r-1$ inversions, le reste est une somme de termes $\lambda u_{j_1}\dots u_{j_s}$ avec $s \leq q-1$. La proposition est donc démontrée.

Définition 3. — Une telle base sera dite *base spéciale* de $\mathfrak{A}$.

Proposition 9. — *L'ordre est une propriété intrinsèque des éléments de* $\mathfrak{A}$.

Cet énoncé doit être précisé dans le sens suivant : *l'ordre* d'un élément w de $\mathfrak{A}$ *relatif* à une base $u_1, \dots, u_n$ de E sera le maximum de la somme $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ dans son expression comme combinaison linéaire des monômes $u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\dots u_n^{\alpha_n}$. L'invariance de l'ordre relatif découle alors du lemme de la proposition 7, ou encore du fait évident que cet ordre ne peut augmenter lorsqu'on exprime les u_i au moyen d'une autre base (v_j) de E.

Définition 4. — Une partie de $\mathfrak{A}$ qui est à la fois sous-espace vectoriel de $\mathfrak{A}$ et sous-anneau de $\mathfrak{A}$ sera appelée *sous-pseudo-algèbre* de $\mathfrak{A}$.

Proposition 10. — *L'intersection de toutes les sous-pseudo-algèbres de* $\mathfrak{A}$ *contenant une partie* $\mathfrak{B}$ *de* $\mathfrak{A}$ *est une sous-pseudo-algèbre de* $\mathfrak{A}$. *C'est l'espace vectoriel engendré par les produits finis des éléments de* $\mathfrak{B}$.

Définition 5. — Cette sous-pseudo-algèbre sera appelée sous-pseudo-algèbre *engendrée par* $\mathfrak{B}$, et notée $(\mathfrak{B})_{\mathfrak{A}}$.

Proposition 11. — *Si* $F \subset E$, $(F)_{\mathfrak{A}}$ *contient la sous-pseudo-algèbre de Lie* $(F)_E$ *engendrée par* F.

En effet, si u et v appartiennent à $(F)_{\mathcal{A}} \cap E$, $u+v$, λu et $\{u, v\} = uv - vu$ appartiennent à $(F)_{\mathcal{A}} \cap E$, et par conséquent $(F)_{\mathcal{A}} \cap E$ est une sous-pseudo-algèbre de Lie de E contenant F.

THÉORÈME 1. — *Si* $F \subset E$, $(F)_{\mathcal{A}} \cap E = (F)_E$.

Soit en effet $u_1, \ldots, u_p$ une base jacobienne de $(F)_E$. $(F)_{\mathcal{A}}$ est engendrée (proposition 10) par les produits $u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_q}$ des u_i, qui se réduisent, en raison de la propriété $u_i u_j = u_j u_i$, aux produits $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$. En vertu de la proposition 7, ces produits constituent une base de $(F)_{\mathcal{A}}$, qui peut être complétée en une base spéciale de $\mathcal{A}$. Un élément du premier ordre de $(F)_{\mathcal{A}}$ a une seule expression relativement à cette base, et est donc nécessairement de la forme

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p.$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 12. — *Une partie de* $\mathcal{A}$ *qui est à la fois sous-espace vectoriel de* $\mathcal{A}$ *et idéal à gauche de l'anneau* $\mathcal{A}$ *est une sous-pseudo-algèbre de* $\mathcal{A}$.

DÉFINITION 6. — Une telle sous-pseudo-algèbre de $\mathcal{A}$ sera dite *invariante à gauche*.

PROPOSITION 13. — *L'intersection de toutes les sous-pseudo-algèbres invariantes à gauche contenant une partie* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{A}$ *est une sous-pseudo-algèbre invariante à gauche. C'est le sous-espace engendré par les éléments de la forme* z *et* wz *avec* $z \in \mathcal{B}$, $w \in \mathcal{A}$.

Cela résulte des relations (1) et (2) du début de ce paragraphe.

DÉFINITION 7. — Cette sous-pseudo-algèbre invariante à gauche sera appelée sous-pseudo-algèbre invariante à gauche *engendrée par* $\mathcal{B}$ et notée $(\mathcal{B})_{g\mathcal{A}}$.

THÉORÈME 2. — *Si* $F \subset E$, $(F)_{g\mathcal{A}} \cap E = (F)_E$.

Soit encore $u_1, \ldots, u_p$ une base jacobienne de $(F)_E$, qu'on peut compléter en une base $u_1, \ldots, u_p, v_{p+1} \ldots v_n$ de E. $(F)_{g\mathcal{A}} = (u_1, \ldots, u_p)_{g\mathcal{A}}$ est engendrée par les monômes $v_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \ldots v_n^{\alpha_n} u_1^{\beta_1} \ldots u_p^{\beta_p} u_i$, les α et les β étant des entiers $\geqq 0$, donc, en vertu de la commutativité des u_i, par les monômes $v_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \ldots v_n^{\alpha_n} u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} \ldots u_p^{\beta_p}$, où les β ne sont pas tous nuls. Un élément du premier ordre de $(F)_{g\mathcal{A}}$ a une seule expression au moyen de cette base spéciale, et est donc nécessairement de la forme $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 4. — *Moyennant les hypothèses énoncées au début de ce chapitre, les seules combinaisons* $\sum \lambda u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_q}$ *qui soient des dérivations sont de la forme* $\sum \lambda u_{(q)}$, *où* $u_{(q)}$ *est une accolade multiple.*

En effet (I, 4, proposition 2), c'est ainsi qu'est engendrée la sous-pseudo-algèbre de Lie $(F)_E$. On a ainsi obtenu une réciproque de cette proposition : l'accolade de deux dérivations est une dérivation.

3. Pseudo-algèbre enveloppante complète. — Adjoignons à $\mathfrak{A}$ la transformation identique e : nous obtenons un espace $\mathfrak{A}'$ ayant pour base les monômes $d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}$ où, cette fois-ci, les α_i peuvent être simultanément nuls. Nous appellerons cette base *canonique*. $\mathfrak{A}'$ sera une nouvelle pseudo-algèbre associative, que nous appellerons la *pseudo-algèbre enveloppante complète*. Nous attribuerons évidemment à e l'ordre zéro, moyennant quoi les diverses propriétés de $\mathfrak{A}$ s'étendent à $\mathfrak{A}'$, leur expression s'en trouvant d'ailleurs souvent simplifiée.

4. Anneau de polynomes différentiels enveloppant. — A tout élément $w_\alpha = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}$ de la base canonique de $\mathfrak{A}'$, associons une indéterminée, que nous noterons $w_\alpha Y$. L'anneau $K\{Y\}$ des polynomes aux indéterminées $w_\alpha Y$ sur K peut être muni de n dérivations prolongeant les dérivations $d_1, d_2, \dots, d_n$ de K, au moyen des relations $d_i(w_\alpha Y) = (d_i w_\alpha) Y$ et des axiomes de dérivation d'un anneau. Cet anneau a été introduit par Ritt ([21]). Ses éléments sont les *polynomes différentiels*. $\mathfrak{A}'$ apparaît donc comme isomorphe à l'ensemble $\overline{\mathfrak{A}'}$ des polynomes linéaires homogènes de $K\{Y\}$, E comme isomorphe à l'ensemble E des polynomes linéaires homogènes du premier ordre de $K\{Y\}$. Si $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}'$, nous noterons $\overline{\mathfrak{B}}$ l'image de $\mathfrak{B}$ dans l'isomorphisme $\mathfrak{A}' \prec\!\!\!\!\!\!\ominus\!\!\!\!\!\!\succ \overline{\mathfrak{A}'}$.

Proposition 14. — *Si $(z_i)_{i \in I}$ est une base de $\mathfrak{A}'$, tout élément de $K\{Y\}$ s'exprime, et d'une seule manière, comme polynome en $z_i Y$.*

En effet, les indéterminées $w_\alpha Y$ s'expriment en fonction (linéaire et homogène) des polynomes différentiels $z_i Y$ comme les dérivations supérieures w_α en fonction des z_i. Reste à montrer que les $z_i Y$ sont algébriquement indépendants sur K. Or, dans une combinaison algébrique

$$G(z_1 Y, z_2 Y, \dots, z_q Y) = H(w_1 Y, \dots, w_r Y)$$

des $z_i Y$, les termes de plus haut degré de H sont donnés par les termes de plus haut degré de G. Donc, si H est nul, le polynome $G_h(z_1 Y, \dots z_q Y)$ formé par les termes de plus haut degré de G est nul. D'après le lemme de la proposition 7, le polynome G_h a tous ses coefficients nuls. Donc G a tous ses coefficients nuls,

C. Q. F. D.

Un *idéal différentiel* ([22]) de $K\{Y\}$ est un idéal contenant, en même temps

([21]) *Cf.* note ([19]) du paragraphe 1.
([22]) *Cf.* note ([19]) du paragraphe 1.

que le polynome différentiel A, tout polynome dérivé $d_i A$. L'intersection de tous les idéaux différentiels contenant une partie $\mathcal{B}$ de $K\{Y\}$ est un idéal différentiel, noté $[\mathcal{B}]$, dont les éléments sont de la forme $\sum A(\omega B)$ avec $A \in K\{Y\}$, $\omega \in \mathfrak{A}'$, $B \in \mathcal{B}$.

Théorème 3. — *Si* $F \subset E$, $[\overline{F}] \cap \overline{\mathfrak{A}'} = (F)_{g\mathfrak{A}}$

En effet, dans la somme $\sum A(\omega B)$, B est de la forme zY avec $z \in F$. Séparons dans le polynome A le terme de degré zéro : $A = A_1 + \lambda$ ($\lambda \in K$). A_1 est une somme de monômes de degré > 0. La somme $\sum A(\omega B)$ n'a pas de terme constant et a comme termes du premier degré $\sum(\omega z Y)$. Si elle appartient à $\overline{\mathfrak{A}'}$, elle se réduit à ces termes du premier degré, et appartient donc, d'après la proposition 13, à la sous-pseudo-algèbre invariante à gauche $(\overline{F})_{g\mathfrak{A}'}$,

C. Q. F. D.

Théorème 4. — *Si* $F \subset E$, $[\overline{F}] \cap \overline{E} = (\overline{F})_E$.

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 3.

Théorème 5. — *Si* $F \subset E$, *l'idéal* $[\overline{F}]$ *est premier.*

Soit $u_1, \ldots, u_p$ une base jacobienne de $(F)_E$. On a

$$[\overline{F}] = [\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p}] = [u_1 Y, u_2 Y, \ldots, u_p Y].$$

Complétons $u_1, \ldots, u_p$ en une base $u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n$ de E, à laquelle correspondent une base spéciale de $\mathfrak{A}'$, formée des dérivations supérieures $z = v_{p+1}^{\beta_{p+1}} \ldots v_n^{\beta_n} u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}$, et des générateurs algébriquement indépendants zY de l'anneau $K\{Y\}$. Si $A \in [\overline{F}]$, c'est une somme de termes $B(zu_i Y)$ où B est un monôme en zY. Chacun de ces termes a un facteur

$$zu_i Y = v_{p+1}^{\beta_{p+1}} \ldots v_n^{\beta_n} u_1^{\alpha_1} \ldots u_i^{\alpha_i + 1} \ldots u_p^{\alpha_p} Y = v_{p+1}^{\beta_{p+1}} \ldots v_n^{\beta_n} u_1^{\gamma_1} \ldots u_i^{\gamma_i} \ldots u_p^{\gamma_p} Y,$$

où un des γ au moins n'est pas nul. Réciproquement, une somme de monômes en zY où un facteur au moins possède au moins un γ non nul est un élément de $[F]$. Si maintenant $A = A_1 A_2$, l'un des polynomes différentiels A_1 et A_2 au moins possède cette propriété, et par suite appartient à $[F]$. $[F]$ est donc un idéal premier.

5. Le théorème fondamental. — La théorie de Ritt nous permet alors d'énoncer le

Théorème 6. — *Pour que deux systèmes d'équations aux dérivés partielles linéaires et homogènes du premier ordre sur le corps différentiel* K *précédemment défini*

admettent les mêmes solutions, il faut et il suffit que les sous-pseudo-algèbres de Lie engendrées par les premiers membres soient identiques.

Soient

$$u_i Y = 0 \qquad (i \in I,\ u_i \in E), \tag{4}$$

$$v_j Y = 0 \qquad (j \in J,\ v_j \in E), \tag{5}$$

ces deux systèmes.

La condition est suffisante : soit η une solution de (4), c'est-à-dire un élément d'un surcorps différentiel de K tel que $u_i \eta = 0$ pour tout $i \in I$. Par hypothèse, et d'après la proposition 2 (I, 4), v_j est une combinaison linéaire d'éléments $u_{(q)}$, $u_{(q)}$ étant une accolade multiple d'ordre q d'éléments u_i. On voit, par récurrence sur q, que $u_{(q)} \eta = 0$. En effet ([23]),

$$u_{(q)} \eta = \{ u_i,\ u_{(q-1)} \} \eta = u_i [u_{(q-1)} \eta] - u_{(q-1)} (u_i \eta) = u_i 0 - u_{(q-1)} 0 = 0.$$

Donc $v_j \eta = 0$ pour tout $j \in J$.

La condition est nécessaire : d'après le théorème des zéros ([24]), les systèmes $(u_i Y)_{i \in I}$ et $(v_j)_{j \in J}$ engendrent le même idéal parfait $\mathfrak{J}$. Or, l'idéal différentiel engendré par $(u_i Y)_{i \in I}$ est premier (théorème 5), il est donc *a fortiori* parfait; d'autre part, la sous-pseudo-algèbre de Lie engendrée par $(u_i)_{i \in I}$ est $\mathfrak{J} \cap E$ (théorème 4). D'où le théorème.

6. Méthode classique d'intégration. — Le théorème général ci-dessus est remplacé par un énoncé plus précis dans le cas où K est un corps de fonctions réelles. Nous allons reprendre ici l'exposé classique des méthodes d'intégration des systèmes linéaires et homogènes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, que nous simplifierons grâce à la théorie des pseudo-algèbres de Lie.

a. Définitions. — Un système S linéaire et homogène d'équations aux dérivées partielles du premier ordre est constitué par p équations

$$X_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

où f est une fonction inconnue de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les X_i des symboles de transformation infinitésimale à n variables :

$$X_i = \sum \alpha_{ih} \frac{\partial}{\partial x_h}.$$

Les coefficients α_{ih} sont des fonctions données des n variables x_h définies

([23]) Nous utilisons ici la relation $\{ u, v \} \lambda = u(v\lambda) - v(u\lambda)$ dans le cas où λ appartient, non plus à K, mais à un surcorps de K. Mais elle résulte immédiatement de la définition de l'opération $\{ , \}$: $\{ u, v \} = uov - vou$.

([24]) Ritt, *Diff. Alg.*, II. 6 et IX. 8.

dans un domaine D. Nous supposerons qu'ils appartiennent à un corps à dérivées partielles K (c'est-à-dire un corps contenant, en même temps qu'une fonction λ, toutes ses dérivées partielles par rapport aux x_h).

Les symboles X_i appartiennent donc à la *pseudo-algèbre de Lie* sur K qui a pour base le système $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Désignons-la par E. Si

$$X = \sum \alpha_h \frac{\partial}{\partial x_h} \quad \text{et} \quad Y = \sum \beta_h \frac{\partial}{\partial x_h},$$

on a

$$\{X, Y\} = \sum_h (X\beta_h - Y\alpha_h) \frac{\partial}{\partial x_h}. \tag{6}$$

Un système S admet toujours la *solution banale* $f = \text{const}$.

Un système S sera dit *libre* si les X_i sont linéairement indépendants sur K. Il sera dit *complet* ([25]) s'il est libre et si le sous-espace vectoriel $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ est une sous-pseudo-algèbre de Lie. Il sera dit *jacobien* ([26]) s'il est libre et si $\{X_i, X_j\} = 0$ quels que soient i et j. Deux systèmes S et S' seront dits *linéairement équivalents* si les sous-espaces vectoriels $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ et $(X'_1, \ldots, X'_q)$ sont identiques, *équivalents* s'ils ont les mêmes solutions.

Les propositions suivantes sont immédiates :

— Tout système jacobien est complet.

— Deux systèmes linéairement équivalents sont équivalents.

— Un sytème libre comporte au plus n équations

— Un système libre de n équations est *complet* et n'admet que la solution banale.

— Un système libre linéairement équivalent à un système complet est lui-même complet.

b. Changement de variables. — Un changement de variables est défini par une transformation biunivoque T du domaine D, qui fait passer du point $M = (x_1, \ldots, x_n)$ au point $M' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, ce que nous noterons $M' = TM$. T est donné par les n fonctions $x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(M)$. La transformation inverse sera notée T^{-1}.

La *transformée* par T d'une *fonction* f sera notée Tf et définie par

$$Tf(TM) = f(M) \quad \text{pour tout M.}$$

On a les propriétés suivantes :

$$T(f+g) = Tf + Tg,$$
$$T(fg) = Tf.Tg,$$
$$T^{-1}(Tf) = T(T^{-1}f) = f.$$

([25]) Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 65, 1866, p. 258.

([26]) *Ibid.* p. 259.

En outre, la formule de dérivation d'une fonction composée s'écrit

$$\mathrm{T}\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_h \frac{\partial(\mathrm{T}f)}{\partial x_h}\mathrm{T}\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Le *transformé* par T d'un *symbole* X sera noté TX et défini par

$$\mathrm{TX}=\sum_h \mathrm{T}(\mathrm{X}\varphi_h)\frac{\partial}{\partial x_h}.$$

Les fonctions $\mathrm{T}(\mathrm{X}\varphi_h)$ seront supposées *appartenir à* K.

On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathrm{TX}+\mathrm{TY},\\
&\mathrm{T}(f\mathrm{X})=\mathrm{T}f.\mathrm{TX}\\
&\mathrm{T}(\mathrm{X}f)=\mathrm{TX}.\mathrm{T}f \quad \text{d'après la relation (7)},\\
&\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{TX})=\mathrm{T}(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{X})=\mathrm{X}.
\end{aligned} \tag{8}$$

En effet, si T^{-1} est définie par les n fonctions φ_i, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{TX})&=\sum_h \mathrm{T}^{-1}[(\mathrm{TX})\psi_h]\frac{\partial}{\partial x_h}=\sum_h \mathrm{T}^{-1}[(\mathrm{TX})\,\mathrm{T}(\mathrm{T}^{-1}\psi_h)]\frac{\partial}{\partial x_h}\\
&=\sum_h \mathrm{T}^{-1}[\mathrm{T}(\mathrm{X}.\mathrm{T}^{-1}\psi_h)]\frac{\partial}{\partial x_h}=\sum_h (\mathrm{X}.\mathrm{T}^{-1}\psi_h)\frac{\partial}{\partial x_h}\\
&=\sum_h (\mathrm{X}\zeta_h)\frac{\partial}{\partial x_h}=\mathrm{X},
\end{aligned}$$

si l'on désigne par ξ_h la $h^{\text{ième}}$ fonction coordonnée.

Enfin,

$$\mathrm{T}\{\mathrm{X},\mathrm{Y}\}=\{\mathrm{TX},\mathrm{TY}\}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{TX},\mathrm{TY}\}&=\sum_h[(\mathrm{TX})(\mathrm{T}.\mathrm{Y}\varphi_h)-(\mathrm{TY})(\mathrm{T}.\mathrm{X}\varphi_h)]\frac{\partial}{\partial x_h} \quad \text{d'après (6)}\\
&=\sum_h \mathrm{T}[\mathrm{X}(\mathrm{Y}\varphi_h)-\mathrm{Y}(\mathrm{X}\varphi_h)]\frac{\partial}{\partial x_h} \quad \text{d'après (8)}\\
&=\sum_h \mathrm{T}[\{\mathrm{X},\mathrm{Y}\}\varphi_h]\frac{\partial}{\partial x_h}=\mathrm{T}\{\mathrm{X},\mathrm{Y}\}.
\end{aligned}$$

Le *transformé* par T d'un *système* S sera par définition le système TS des équations $(\mathrm{TX}_i)f=0$ $(i=1,2,\ldots,p)$.

L'intérêt des considérations précédentes réside dans le fait que :

1° les solutions du système TS sont les transformées par T des solutions de S; cela résulte de la relation (8);

2° le transformé d'un système libre est un système libre; en effet, $\sum \beta_k(TX_k) = 0$ entraîne $T^{-1}\left[\sum \beta_k(TX_k)\right] = 0$ ou $\sum (T^{-1}\beta_k)X_k = 0$, ce qui exige $T^{-1}\beta_k = 0$, donc $\beta_k = 0$;

3° le transformé d'un système complet est un système complet; en effet,

$$\{TX_i, TX_j\} = T\{X_i, X_j\} = T\left(\sum \alpha_k X_k\right) = \sum (T\alpha_k)\, TX_k$$

appartient bien au sous-espace vectoriel $(TX_1, \ldots, TX_p)$;

4° le transformé d'un système jacobien est un système jacobien; en effet, si $\{X_i, X_j\} = 0$,

$$\{TX_i, TX_j\} = T\{X_i, X_j\} = T.0 = 0.$$

c. Intégration des systèmes.

Théorème 7. — *L'intégration d'un système quelconque* S *se ramène immédiatement à celle d'un système jacobien.*

En effet, soit $Y_1, \ldots, Y_q$ une base jacobienne (proposition 2) de la sous-pseudo-algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_p$. Tout X_i est de la forme $\sum \lambda_{ij} Y_j$, donc toute solution du système S : $Y_j f = 0$ $(j = 1, \ldots, q)$ est solution du système S.

Théorème 8. — *L'intégrale générale d'un système jacobien de q équations à n variables est une fonction arbitraire de n — q fonctions indépendantes.*

Le théorème est vrai pour $q = 1$, d'après la théorie classique des équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes.

Supposons-le vrai pour tout système de $q - 1$ équations, et soit $X_i f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ un système jacobien. L'équation $X_i f = 0$ possède $n - 1$ intégrales indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Soit φ_n une fonction telle que $X_q \varphi_n \neq 0$. Les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ sont indépendantes et par suite définissent dans un certain domaine une transformation biunivoque $T : x_i' = \varphi_i(M)$. Considérons le système transformé TS. TX_q se réduit à $(T.\ X_q \varphi_n)\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, ce qui montre que toute intégrale de TS est indépendante de x_n.

D'après $b(4°)$, TS est jacobien. Si $TX_i = \sum_{h=1}^{n} \beta_{ih} \dfrac{\partial}{\partial x_h}$ $(i < q)$, $\{TX_i, TX_q\} = 0$ exige $\dfrac{\partial \beta_{ih}}{\partial x_n} = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n - 1)$, ce qui montre que les $n - 1$ premières coordonnées de tout TX_k $(k \leq q)$ sont indépendantes de x_n.

Posons

$$Z_i = TX_i - \beta_{in}\frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{h=1}^{n-1}\beta_{ih}\frac{\partial}{\partial x_h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q-1)$$

$$Z_q = TX_q = \beta_{qn}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Le système $S_2 : Z_k f = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ est linéairement équivalent à ST. Il est donc complet (a, fin). Ses $q-1$ premières équations constituent un système S′ de $q-1$ équations à $n-1$ variables.

Pour étudier ce système, appelons K_n l'ensemble des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ seules qui appartiennent à K. K_n est un sous-corps différentiel de K. Désignons respectivement par $(A_1, \ldots, A_r)_K$ et $(A_1, \ldots, A_r)_{K_n}$ les sous-espaces engendrés sur K et sur K_n par des éléments A_j de E, et posons

$$E_n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)_{K_n}, \qquad E'_n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)_K.$$

E_n est pseudo-algèbre de Lie sur K_n.

S′ est un système libre sur K, donc *a fortiori* sur K_n. On a de plus, pour $i, j \leq q-1$, $Z_i \in E_n$, $Z_j \in E_n$, donc $\{Z_i, Z_j\} \in E_n \subset E'_n$. D'autre part, S_2 étant complet,

$$\{Z_i, Z_j\} \in (Z_1, \ldots, Z_{q-1}, Z_q)_K = \left(Z_1, \ldots, Z_{q-1}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)_K.$$

$\{Z_i, Z_j\}$ a donc les deux expressions

$$\{Z_i, Z_j\} = \sum \theta_m \frac{\partial}{\partial x_m} \qquad (m \leq n-1;\ \theta_m \in K_n),$$

$$\{Z_i, Z_j\} = \sum_k \lambda_k Z_k + \mu\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (k \leq q-1;\ \lambda_k, \mu \in K).$$

En exprimant les Z_k en fonction de $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$, on voit que $\mu = 0$, donc

$$\{Z_i, Z_j\} \in (Z_1, \ldots, Z_{q-1})_K.$$

Je vais montrer que $\{Z_i, Z_j\} \in (Z_1, \ldots, Z_{q-1})_{K_n}$, et par suite que S′ est un système complet à $n-1$ variables.

On a en effet

$$\theta_m = \sum_{k=1}^{q-1}\lambda_k \beta_{km} \qquad (\text{avec } \theta_m, \beta_{km} \in K_n,\ m \leq n-1;\ \lambda_k \in K).$$

Ce système, définissant d'une manière unique les $q-1$ quantités λ_k, est nécessairement de rang $q-1$, et ces quantités s'expriment rationnellement en fonction des θ_m et β_{km} et par suite appartiennent à K_n,

C. Q. F. D.

S′, système complet de $q-1$ équations à $n-1$ variables est équivalent à un système jacobien de $q-1$ équations à $n-1$ variables [obtenu en prenant dans E_n une base jacobienne de la sous-pseudo-algèbre de Lie $(Z_1, \ldots Z_{q-1})_{K_n}$], et par suite son intégrale générale, d'après l'hypothèse de récurrence, est une fonction arbitraire de $n-q$ fonctions indépendantes des $n-1$ variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Elle vérifie l'équation $Z_q f = 0$, et par conséquent le système S, et réciproquement. C'est donc l'intégrale générale du système TS, linéairement équivalent à S_2. Il s'ensuit que le système S a pour intégrale générale une fonction arbitraire de $n-q$ fonctions indépendantes.

La théorie ci-dessus fait immédiatement apparaître le procédé pratique classique d'intégration.

APPENDICE.

QUESTIONS A ÉTUDIER.

Tout au long de la théorie des pseudo-algèbres de Lie qui vient d'être exposée se présentent diverses questions dont l'étude serait intéressante.

1. Étude de la structure obtenue en remplaçant l'axiome IV par l'axiome IV *bis* : $\{u, v\}\lambda = u(v\lambda) - v(u\lambda)$.

2. Détermination de toutes les pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 sur un corps gauche. Exemples non triviaux.

3. Étant donné un corps commutatif K, une algèbre de Lie N et une sous-pseudo-algèbre de Lie $\overline{E}$ de la pseudo-algèbre de Lie $\mathfrak{D}(K)$ des dérivations de K, existe-t-il une pseudo-algèbre de Lie E sur K telle que $E/N \prec\!\ominus\!\succ \overline{E}$?

Réponse affirmative pour N de dimension 0 ou 1.

4. Détermination des pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 dans le cas inséparable; sur un corps commutatif quelconque.

5. Étude du cas où la caractéristique de K est 2.

6. Étude de la pseudo-algèbre de Lie des transformations différentielles d'un espace vectoriel. Représentation d'une pseudo-algèbre de Lie par des transformations différentielles.

SUR

L'EXTENSION AUX RELATIONS DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ORDRES [1]

PAR M. ROLAND FRAÏSSÉ.

1. — But du travail; définitions préliminaires et introduction des classes Γ et γ.

1.1. Cet article est une étude élémentaire de certaines classes de relations, Γ et γ, définies ci après (1.4), qui généralisent la classe des ordres et celle des ordres finis.

Les résultats essentiels concernant ces classes sont énoncés au paragraphe 1.5. Après avoir donné quelques précisions sur leur ensemble (théorème I), nous caractérisons ces classes par trois conditions (théorèmes II et III).

Le théorème III (1°) généralise le fait que tout ensemble peut être ordonné; l'une des conclusions du théorème III (2°) et le théorème IV généralisent les deux propositions suivantes : étant donnés deux ordres totaux A, B, il existe un ordre (A + B par exemple) prolongement commun à A et B ou à leurs isomorphes; étant donné un ensemble d'ordres A, il existe un ordre R prolongement commun aux A (ou à leurs isomorphes).

Les démonstrations de ces théorèmes sont obtenues aux paragraphes 2, 3, 4; elles utilisent l'axiome du choix et font intervenir les notions de filtre et ultrafiltre de projection, introduites précédemment [2] et exposées ici d'une façon différente.

Nous définissons ensuite la relation *homogène* (5.1) qui généralise l'ordre η des nombres rationnels; notre théorème V (5.1) et l'une des conclusions du théorème VI (8.1) généralisent les deux propositions suivantes : tout ordre dénombrable est isomorphe à une restriction de η; l'ordre η est le seul ordre

---

(1) Les principaux résultats de cet article ont fait l'objet de deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 237, 1953, p. 508-510 et 540-542). Un premier résumé avait paru au *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* (t 59, 1953, p. 341).

(2) *Sur quelques classifications des systèmes de relations*, *Thèse*, Paris, 1953 et *Alger-Mathématiques*, t. 1, 1954, p. 35–182.

dénombrable dense sans premier ni dernier élément. Par ailleurs, notre théorème VI précise les rapports entre relations homogènes et classes Γ.

Nous appliquons enfin (10.1) les théorèmes III et IV à la solution d'une question de logique mathématique.

1.2. Définitions générales. — Une relation à n arguments $A(x_1, \ldots, x_n)$ est pour nous une fonction définie lorsque $x_i \in E$ (E étant un ensemble appelé *base* de A) et susceptible de prendre deux valeurs, que nous désignons par $+$ et $-$.

Par exemple, une relation d'ordre, total ou partiel, généralement notée $\leq$, est la fonction $A(x_1, x_2)$ égale à $+$ si $x_1 \leq x_2$, à $-$ si $x_1 > x_2$ ou si x_1 est incomparable à x_2.

Si D est une partie de E, la *restriction* ([3]) de A à D sera la relation à n arguments définie lorsque $x_i \in D$ et prenant les mêmes valeurs que A : nous la noterons $B = A \mid D$; A sera dite un *prolongement* ([3]) de B à E.

Soit un ensemble de relations dont les bases sont totalement ordonnées par inclusion, de sorte que, lorsque la base de la relation A contient celle de B, A est un prolongement de B. Nous dirons alors que ces relations forment une *chaîne*.

Il existe un prolongement R et un seul commun à ces relations et défini sur la réunion E de leurs bases. En effet, si la suite $a_1, \ldots, a_n$ est extraite de E, il existe des relations A de la chaîne dont les bases contiennent tous les $a_i (1 \leq i \leq n)$; toutes ces A prennent la même valeur $A(a_1, \ldots, a_n)$; on prend $R(a_1, \ldots, a_n)$ égal à cette valeur commune.

Soit φ une application biunivoque de E, base de A, sur E'. La relation A' de base E' telle que

$$A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = A(a_1, \ldots, a_n) \tag{1}$$

quels que soient $a_1, \ldots, a_n$ extraits de E, est dite une *isomorphe* ([3]) de A, et φ est un *isomorphisme* de A sur A' (ou φ *transforme* A en A'). Si $A' = A$, φ est un *automorphisme* de A.

La classe des relations isomorphes à une relation A sera appelée le *type* de A.

1.2.1. Pour que l'application biunivoque φ de E sur E' transforme A en A', il suffit qu'elle transforme chaque restriction de A à n éléments au plus, en une restriction de A'. En effet, dans ce cas, pour toute suite $a_1, \ldots, a_n$ de E, désignons par F l'ensemble des valeurs des $a_i (1 \leq i \leq n)$; φ transforme $A \mid F$ en $A' \mid \varphi(F)$: on en déduit bien l'égalité (1) ci-dessus.

1.3. Nous écrirons $A > B$ (ou $B < A$) si B est isomorphe à une restriction de A, et $A \succ B$ (ou $B \prec A$) si toute restriction de B à une partie finie de sa base est isomorphe à une restriction de A.

([3]) N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, *Théorie des Ensembles*, Paris, 1939, p. 12 et 44.

Les relations $<$ et $\prec$ sont réflexives et transitives; autrement dit, chacune d'elles est un pré-ordre défini sur les relations à n arguments.

Lorsqu'on a $B < A$, ou $B \prec A$, cette condition subsiste si l'on transforme A ou B par isomorphie : les relations $<$ et $\prec$ définissent chacune un pré-ordre sur les types (1.2).

Si l'on a $B < A$ on en déduit $B \prec A$, mais l'inverse n'est pas vrai; par exemple, si A et B sont deux ordres de types ω et ω^* (ω^* désigne le symétrique de ω), on a $B \prec A$ et $A \prec B$ sans avoir $B < A$ ni $A < B$.

On peut avoir $B < A$ et $A < B$ sans que A et B soient isomorphes; par exemple, en utilisant les symboles de somme et de produit d'ordres ([4]) et en désignant par $\hat{1}$ l'ordre ayant un seul élément, alors $A = \omega.\omega^*$ et $B = \hat{1} + \omega.\omega^*$ ont des types distincts et vérifient $B < A$ et $A < B$.

1.4. Classes Γ et γ. — Étant donnée une relation R, nous désignerons par γ_R la classe des restrictions de R aux parties finies de sa base, et de leurs isomorphes. Autrement dit, $A \in \gamma_R$ équivaut à « $A < R$ et A est de base finie ».

Nous désignerons par Γ_R la classe des relations dont toutes les restrictions de bases finies appartiennent à γ_R. Autrement dit, $A \in \Gamma_R$ équivaut à $A \prec R$. On a évidemment $R \in \Gamma_R$.

Notons que γ_R n'est autre que la classe des relations de Γ_R dont la base est finie.

Par exemple, si R est un ordre (total) infini, Γ_R est la classe des ordres, γ_R celle des ordres finis.

Une classe K de relations sera dite une Γ, ou une γ, s'il existe une relation R telle que $K = \Gamma_R$, ou telle que $K = \gamma_R$.

De ce qui précède résultent les conséquences suivantes :

1° *Si une* Γ *ou une* γ *contient une relation* A, *elle contient toute isomorphe et toute restriction de* A.

2° *On a une correspondance biunivoque entre les* Γ *et les* γ, *en associant deux de ces classes* K *et* L *lorsqu'il existe une relation* R *telle que* $K = \Gamma_R$ *et* $L = \gamma_R$.

3° *Soient* K *une* Γ, R *une relation de* K; *pour que* $K = \Gamma_R$, *il faut et suffit que toute relation de base finie, extraite de* K, *soit isomorphe à une restriction de* R.

Les énoncés 1° et 2° s'obtiennent immédiatement; l'énoncé 3° se démontre ainsi : pour que $K = \Gamma_R$, il faut et suffit qu'en désignant par L la classe des relations de bases finies appartenant à K, on ait $L = \gamma_R$. Cette condition revient à celle de l'énoncé du fait que, R appartenant à K, toute restriction de R de base finie appartient à L.

([4]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, réimpr., New-York, 1949, p. 75. Notre notation, pour le produit, est celle de Hausdorff inversée.

Comme exemples de classes Γ, outre *la classe des ordres totaux*, citons celle de *toutes les relations à n arguments*, celle des *ordres partiels*, celle des *ordres ramifiés* (ordres partiels tels que les éléments antérieurs à un élément donné soient totalement ordonnés). Nous prouverons au paragraphe 2.7 que ces classes sont des Γ.

1.5. Énoncé des principaux résultats relatifs aux classes Γ et γ. — Nous considérerons dans la suite des classes K de relations vérifiant certaines des conditions suivantes :

$\mathcal{C}_1$. *Si* $A \in K$ *et* $B < A$, *alors* $B \in K$.

$\mathcal{C}_2$. *Si* $A, B \in K$, *il existe une relation* C *de* K *telle que* $C > A$ *et* $C > B$.

$\mathcal{C}_3$. *Pour toute chaîne* (1.2) *de relations* A *de* K, *le prolongement des* A *à la réunion de leurs bases appartient à* K.

Nous pouvons dès lors énoncer les théorèmes qui vont être démontrés aux paragraphes 2, 3, 4 :

Théorème I. — *Les classes* Γ *ou* γ *de relations à n arguments sont en infinité dénombrable pour* $n = 1$, *en nombre égal à* $2^{\aleph_0}$ *pour* $n \geq 2$.

Théorème II. — *Pour qu'une classe de relations de bases finies soit une* γ, *il faut et suffit qu'elle vérifie* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$.

Théorème III. — 1° *Étant donnée une* Γ, *ou bien elle est formée d'une relation de base finie et de ses restrictions* (avec leurs isomorphes) *ou bien elle contient des relations définies sur tout ensemble.*

2° *Pour qu'une classe de relations soit une* Γ, *il faut et suffit qu'elle vérifie* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *et* $\mathcal{C}_3$.

Théorème IV. — *Étant donnée une* Γ, *soit* K, *et un ensemble de relations* A *de* K, *il existe dans* K *une relation* R *telle que* $R > A$ *pour toute* A.

2. — Démonstrations des théorèmes I et II.

2.1. 1° *Les types* (1.2) *des relations à n arguments définies sur p éléments* (*p étant un entier fini*) *sont en nombre fini; les types de relations de bases finies sont en infinité dénombrable.*

2° *Les* γ *sont au plus au nombre de* $2^{\aleph_0}$.

Preuve. — Étant donné un ensemble F de p éléments, les relations à n arguments définies sur F sont au nombre de $\nu = 2^{(p^n)}$. Donc il existe au plus ν types de relations à n arguments définies sur les ensembles de p éléments. L'énoncé 1° est démontré.

L'énoncé 2° résulte du fait qu'une γ est une réunion de types de relations de bases finies.

2.2. *Démontrons comme suit le théorème* I :

Cas de $n=1$. — Soit $A(x)$ une relation ; elle prend la valeur $+$ pour r éléments x, et la valeur $-$ pour s éléments (r, s finis ou cardinaux transfinis). La classe γ_A ne dépend que du couple (r, s) et elle reste inchangée si r ou s passe d'une valeur transfinie à une autre. Les γ_A distinctes sont donc en infinité dénombrable.

Cas de $n \geqq 2$. — Nous savons déjà que les γ, donc les Γ, sont au plus au nombre de $2^{\aleph_0}$ (2.1, 2°). Il nous suffit de montrer qu'il existe $2^{\aleph_0}$ classes γ pour $n \geqq 2$.

Supposons $n=2$: A chaque entier positif r, associons un ensemble E_r de r éléments $a_r^1, \ldots, a_r^r$, les différents E_r étant disjoints. Considérons la relation $A_r(x_1, x_2)$ égale à $+$ si, et seulement si x_2 suit x_1 dans le cycle $a_r^1 a_r^2 \ldots a_r^r a_r^1$. Pour chaque ensemble $\mathcal{E}$ formé d'entiers, définissons comme suit $A_{\mathcal{E}}(x_1, x_2)$ sur la réunion des $E_r (r \in \mathcal{E})$: si x_1 et x_2 appartiennent à un même E_r, on pose $A_{\mathcal{E}}(x_1, x_2) = A_r(x_1, x_2)$; sinon, on pose $A_{\mathcal{E}}(x_1, x_2) = -$.

Pour deux $\mathcal{E}$ distincts, soient $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$, les classes $\gamma_{A_{\mathcal{E}'}}$ et $\gamma_{A_{\mathcal{E}''}}$ sont distinctes : en effet, si par exemple l'entier r appartient à $\mathcal{E}'$ mais non à $\mathcal{E}''$, alors A_r est une restriction de $A_{\mathcal{E}'}$ mais n'est isomorphe à aucune restriction de $A_{\mathcal{E}''}$. Le nombre des γ distinctes atteint bien $2^{\aleph_0}$.

Supposons $n > 2$: A toute relation $A(x_1, x_2)$ associons $A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie sur la même base et telle qu'on ait $A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A(x_1, x_2)$ quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si, étant données $A(x_1, x_2)$ et $B(x_1, x_2)$, on a $\gamma_A \neq \gamma_B$, il existe par exemple une restriction $A|F$ (F fini) qui n'est isomorphe à aucune restriction de B. Alors $A^*|F$ n'est isomorphe à aucune restriction $B^*|G$, car il en résulterait évidemment l'isomorphie de $A|F$ et de $B|G$. Nous en déduisons $\gamma_{A^*} \neq \gamma_{B^*}$. Le nombre des γ_A distinctes, lorsque A n'a que deux arguments, atteignant $2^{\aleph_0}$, il en est de même du nombre des γ_{A^*} distinctes : le théorème s'en déduit pour $n > 2$.

2.3. *Toute* γ *vérifie les conditions* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ (1.5).

$\mathcal{C}_1$ est évidemment vérifiée (cela a été dit sous une autre forme au paragraphe 1.4, 1°).

Montrons que $\mathcal{C}_2$ est vérifiée : une γ est formée des restrictions $R|F$ d'une certaine relation R aux parties finies F de sa base, et de leurs isomorphes. Si l'on considère A et B, isomorphes à $R|F$ et à $R|G$, alors en posant $C = R|F \cup G$, on a bien $C > A$ et $C > B$.

2.4 *Soit* K *une classe qui, lorsqu'elle contient une relation, contient aussi ses isomorphes.*

1° *Si* K *vérifie* $\mathcal{C}_2$, *à tout ensemble fini ou dénombrable de relations* A *de* K *on peut associer des relations* B *de* K *constituant une chaîne* (1.2) *de sorte que, pour chaque* A, *il existe une* B *vérifiant* $B > A$;

2° *Si* K *vérifie* $\mathcal{C}_2$ *et* $\mathcal{C}_3$, *la conclusion précédente est valable pour tout ensemble de relations* A *de* K.

Preuve. — 1° Numérotons les A; nous obtenons une suite finie ou infinie $A_1, \ldots, A_p, \ldots$ et nous définissons comme suit $B_1, \ldots, B_p, \ldots$:

$$B_1 = A_1 ;$$

les B_q étant supposés définis jusqu'à B_{p-1} et tous étant extraits de K, on choisit dans K un prolongement B_p de B_{p-1}, tel que $B_p > A_p$ (cela est possible en raison de $\mathcal{C}_2$).

Les B_p ainsi obtenus vérifient l'énoncé 1°.

2° Rangeons les A en une suite bien ordonnée $A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots$ (α fini ou transfini) et définissons comme suit les B_α :

Si α est un ordinal de première espèce, les B_β étant supposés définis jusqu'à $B_{\alpha-1}$ et étant extraits de K, on opère comme au 1°.

Si α est de deuxième espèce, les $B_\beta (\beta < \alpha)$ étant supposés extraits de K et $B_{\beta'}$ étant un prolongement de $B_{\beta''}$ lorsque $\beta'' < \beta' < \alpha$, soit R le prolongement des B_β à la réunion de leurs bases (1.2); R appartient à K en raison de $\mathcal{C}_3$; on choisit dans K un prolongement B_α de R, tel que $B_\alpha > A_\alpha$ (c'est possible en raison de $\mathcal{C}_2$).

Les B_α ainsi obtenus vérifient l'énoncé 2°.

2.5. *Toute classe* K *de relations de bases finies vérifiant* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *est une* γ.

Preuve. — K vérifiant $\mathcal{C}_1$ contient, avec chacune de ses relations, toute relation isomorphe : c'est donc une réunion de types (1.2) qui sont au plus en infinité dénombrable (2.1, 1°).

Considérons une représentante A de chaque type contenu dans K, et appliquons aux A l'énoncé 2.4 (1°). Si R est le prolongement des B à la réunion de leurs bases, nous avons $K = \gamma_R$. En effet, toute restriction de R à une partie finie de sa base est restriction d'une B, donc appartient à K en raison de $\mathcal{C}_1$; inversement toute relation de K est isomorphe à une A, donc à une restriction d'une B et par conséquent de R.

2.6. *Les énoncés* 2.3 *et* 2.5 *démontrent le théorème* II.

De ce théorème, on déduit facilement le résultat suivant, que nous n'utiliserons d'ailleurs pas ici.

Étant donné un ensemble de classes γ *totalement ordonné par inclusion, la réunion et l'intersection de ces* γ *sont des* γ.

2.7. Exemples de classes Γ et γ. — La classe K_1 de toutes les relations à n arguments, la classe K_2 des ordres partiels, la classe K_3 des ordres ramifiés (1.4) sont des Γ. Montrons que c'est une conséquence du théorème II.

Une relation A appartient à K_1, K_2 ou K_3 si, et seulement si les restrictions de A aux parties finies de sa base appartiennent à K_1, K_2 ou K_3. Il suffit donc de montrer que ces classes, restreintes à leurs relations de bases finies, sont des γ. Elles vérifient évidemment $\mathcal{C}_1$; elles vérifient aussi $\mathcal{C}_2$. En effet, si A et B, que nous pouvons supposer de bases disjointes F, G, appartiennent à K_1, désignons par C un prolongement arbitraire commun à A et B, défini sur $F \cup G$; si A et B appartiennent à K_2 ou à K_3, désignons par C l'ordre partiel qui se réduit à A sur F, à B sur G et pour lequel tout élément de F est incomparable à tout élément de G. On a $C > A$, $C > B$ et, selon le cas, $C \in K_1$, K_2 ou K_3, ce qui achève notre démonstration.

3. — Filtre de projection ([5]).

3.1. Considérons deux relations à n arguments, A de base E, A′ de base E′ et une application φ de E *dans* $E'(\varphi(E) \subset E')$. Nous dirons que A est *projection réciproque de* A′ *selon* φ si, quels que soient $a_1, \ldots, a_n$ de E, on a

$$A(a_1, \ldots, a_n) = A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)). \tag{1}$$

Il est évident que, si E, E′, φ et A′ sont donnés, il existe une projection réciproque de A′ selon φ et une seule; nous la noterons $A = \varphi^{-1}(A')$.

Si φ est une application de E *sur* $E'(\varphi(E) = E')$ nous dirons que A est une *polymorphe* de A′. Si de plus φ est biunivoque, nous retrouvons la notion d'isomorphisme de A sur A′ (1.2).

Soit D une partie de E; l'application de D dans E′ qui se confond avec φ pour tout élément de D sera dite la *restriction* de φ à D, et sera notée φ_D; φ sera dite un *prolongement* de φ_D à E (on dira encore que φ *prolonge* φ_D).

3.1.1. *Si* $A = \varphi^{-1}(A')$, *on a évidemment* $A|D = \varphi_D^{-1}(A')$.

3.2. E, E′ étant fixes, désignons par φ toute application de E dans E′; un filtre $\mathcal{F}$ défini sur les φ sera dit *filtre de projection* de E sur E′. Nous dirons que A est *projection réciproque de* A′ *selon* $\mathcal{F}$ si, quels que soient $a_1, \ldots, a_n$

([5]) Pour les propriétés des filtres et ultrafiltres *voir* N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Topologie générale*, chap. I, Paris, 1943, p. 20 et suivantes. Le filtre de projection a été introduit dans notre Thèse, § 13.

extraits de E, l'ensemble des φ qui vérifient l'égalité (1) du paragraphe 3.1 est un élément de $\mathcal{F}$.

Par exemple, soient Φ une application de E dans E', $\mathcal{F}$ le filtre trivial formé des ensembles de φ qui contiennent Φ; $\mathcal{F}$ est un filtre de projection de E sur E' et, une relation A' étant donnée, il existe une projection réciproque et une seule de A' selon $\mathcal{F}$, à savoir $\Phi^{-1}(A')$.

3.3. Revenons au cas d'un filtre $\mathcal{F}$ quelconque défini sur les φ.

Si E, E', $\mathcal{F}$ *et* A' *sont donnés, il existe au plus une projection réciproque de* A' *selon* $\mathcal{F}$. *Nous la noterons* $\mathcal{F}^{-1}(A')$.

Preuve. — Supposons qu'il existe deux projections réciproques : leur valeur diffère pour une suite $a_1, \ldots, a_n$ extraite de E. Il existe donc un élément U de $\mathcal{F}$ formé des φ donnant la valeur + à l'expression $A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ et un autre V formé des φ donnant à cette expression la valeur —. L'intersection $U \cap V$ est un élément de $\mathcal{F}$; or elle est évidemment vide, ce qui est contraire à la définition du filtre.

3.4. *Si* $\mathcal{G}$ *est un filtre plus fin que* $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire ayant pour éléments tous ceux de $\mathcal{F}$ au moins) *et si la projection réciproque* $\mathcal{F}^{-1}(A')$ *existe, alors*

$$\mathcal{G}^{-1}(A') = \mathcal{F}^{-1}(A').$$

3.5 *Si* $\mathcal{F}$ *est un ultrafiltre, il existe une projection réciproque* $\mathcal{F}^{-1}(A')$ *et une seule.*

Preuve. — Compte tenu de l'énoncé 3.3, il suffit de démontrer l'existence de $\mathcal{F}^{-1}(A')$. Soit $a_1, \ldots, a_n$ une suite extraite de E. Désignons par V^+ et V^- les ensembles des φ qui donnent respectivement la valeur + et la valeur — à l'expression $A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$. Toutes les φ se répartissent entre ces deux ensembles disjoints : l'un d'eux, et un seul, est donc un élément de l'ultrafiltre $\mathcal{F}$ ([6]).

Posons $A(a_1, \ldots, a_n) = +$ ou — selon qu'il s'agit de V^+ ou de V^-. La relation A ainsi définie lorsque la suite $a_1, \ldots, a_n$ varie est la projection réciproque $\mathcal{F}^{-1}(A')$.

3.6. Soit D une partie de E. A tout élément U de $\mathcal{F}$, associons l'ensemble des φ de U restreintes à D (3.1), soit U_D. Les U_D (où D est fixe et U variable) constituent un filtre de projection de D sur E' qui sera dit la *restriction de* $\mathcal{F}$ *à* D, et noté $\mathcal{F}_D$. $\mathcal{F}$ sera dit un *prolongement* de $\mathcal{F}_D$ à E.

3.6.1. *Si* $A = \mathcal{F}^{-1}(A')$, *on a évidemment* $A \mid D = \mathcal{F}_D^{-1}(A')$.

([6]) N. Bourbaki, *loc. cit.*, p. 26.

3.6.2. *Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre, il en est de même de toute restriction $\mathfrak{F}_D$.*

En effet, si $\mathfrak{F}_D$ n'est pas un ultrafiltre, il existe un ensemble V formé de φ restreintes à D, tel que ni V ni son complémentaire W ne sont des éléments de $\mathfrak{F}_D$. Considérons les ensembles formés des φ dont les restrictions à D appartiennent à V ou à W : ces deux ensembles sont complémentaires par rapport à l'ensemble des φ, et aucun d'eux n'est un élément de $\mathfrak{F}$: ce filtre n'est pas un ultrafiltre.

3.7. Filtre normal. — Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de projection de E sur E'. Supposons que, pour toute partie finie F de E, l'ensemble $U_{[F]}$ des applications φ qui sont biunivoques sur F [c'est-à-dire appliquent de façon biunivoque F sur $\varphi(F)$] soit un élément de $\mathfrak{F}$. En ce cas, $\mathfrak{F}$ sera dit un *filtre normal*.

3.7.1. *Tout filtre plus fin qu'un filtre normal est évidemment normal.*

3.7.2. *Si* E' *est infini, il existre un filtre normal de projection de* E *sur* E'.

En effet, en utilisant les notations du paragraphe 3.7, un $U_{[F]}$ n'est jamais vide car toute partie finie F de E peut être appliquée de façon biunivoque sur des parties de E'. De plus l'intersection de deux $U_{[F]}$, soient $U_{[F]}$ et $U_{[G]}$, contient $U_{[F\cup G]}$: les $U_{[F]}$ engendrent un filtre normal.

3.8. *Étant données les relations* A, A' *de bases* E, E' :

1° *Pour qu'il existe un filtre $\mathfrak{F}$ de projection de* E *sur* E' *tel que* $A = \mathfrak{F}^{-1}(A')$, *il faut et il suffit que toute restriction de* A *à une partie finie de* E *soit polymorphe* (3.1) *d'une restriction de* A'.

2° *Pour qu'en outre $\mathfrak{F}$ soit normal* (3.7) *il faut et suffit que toute restriction de* A *à une partie finie de* E *soit isomorphe d'une restriction de* A', *autrement dit qu'on ait* $A \prec A'$.

Preuve de l'énoncé 1°. — Supposons qu'on ait $A = \mathfrak{F}^{-1}(A')$, et soit F une partie finie de E. Pour chaque suite $a_1, \ldots, a_n$, extraite de F, il existe un élément U de $\mathfrak{F}$ formé des φ vérifiant l'égalité

$$A(a_1, \ldots, a_n) = A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)). \tag{1}$$

Ces suites sont en nombre fini : l'intersection des éléments U de $\mathfrak{F}$ correspondants est un élément de $\mathfrak{F}$: n'étant pas vide, il contient une φ qui vérifie (1) quels que soient $a_1, \ldots, a_n$ extraits de F. Cela signifie que $A|F$ est la projection réciproque de $A'|\varphi(F)$ selon cette φ; il s'ensuit que $A|F$ est polymorphe de $A'|\varphi(F)$: la condition du 1° est nécessaire.

Réciproquement, supposons que toute restriction $A|F$ (où F est fini) soit polymorphe d'une restriction de A' : il existe une application ψ de F sur une

partie $\psi(F)$ de E', telle que $\psi^{-1}(A' \mid \psi(F)) = A \mid F$; en considérant ψ comme une application de F dans E', on a $\psi^{-1}(A') = A \mid F$.

Désignons par $U_{[F]}$ l'ensemble des applications φ de E dans E' qui, une fois restreintes à F et désignées alors par φ_F (3.1) vérifient l'égalité $\varphi_F^{-1}(A') = A \mid F$:

un $U_{[F]}$ n'est jamais vide d'après ce qui précède;

l'intersection de deux $U_{[F]}$, soient $U_{[F]}$ et $U_{[G]}$, contient $U_{[F \cup G]}$; en effet, si $\varphi \in U_{[F \cup G]}$, alors on a $A \mid F \cup G = \varphi_{F \cup G}^{-1}(A')$ et par conséquent $A \mid F = \varphi_F^{-1}(A')$ (*voir* l'énoncé 3.1.1 où l'on remplace A par $A \mid F \cup G$, φ par $\varphi_{F \cup G}$ et D par F); il s'ensuit qu'on a $\varphi \in U_{[F]}$ et de même $\varphi \in U_{[G]}$.

Les $U_{[F]}$ engendrent un filtre que nous désignerons par $\mathcal{F}$.

Montrons qu'on a $A = \mathcal{F}^{-1}(A')$. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont extraits de E, soit F l'ensemble de leurs valeurs. $U_{[F]}$ est un élément de $\mathcal{F}$ formé de φ qui satisfont à l'égalité $A \mid F = \varphi_F^{-1}(A')$, donc *a fortiori* à l'égalité (1) ci-dessus. L'ensemble des φ qui vérifient (1) est lui-même un élément de $\mathcal{F}$, ce qui prouve notre assertion.

Il est ainsi établi que la condition de l'énoncé 1° est suffisante.

La preuve de l'énoncé 2° se déduit de la précédente en y supposant ce qui suit :

lorsqu'on prouve que la condition est nécessaire, $\mathcal{F}$ est normal et U est formé de φ qui sont biunivoques sur F; le mot « polymorphe » peut alors être remplacé par « isomorphe »;

lorsqu'on prouve que la condition est suffisante, l'application ψ est biunivoque, $U_{[F]}$ est l'ensemble des φ qui vérifient l'égalité $\varphi_F^{-1}(A') = A \mid F$ et qui en outre sont biunivoques sur F; il en résulte que le filtre $\mathcal{F}$ est normal.

3.9. Éléments φ-équivalents ou $\mathcal{F}$-équivalents (φ étant une application de E dans E', $\mathcal{F}$ un filtre de projection de E sur E'). — Deux éléments a, b de E seront dits *φ-équivalents* si l'on a

$$\varphi(a) = \varphi(b). \tag{1}$$

Ils seront dits *$\mathcal{F}$-équivalents* si l'ensemble des φ qui vérifient (1) constituent un élément de $\mathcal{F}$.

Deux éléments a, b qui sont chacun $\mathcal{F}$-équivalent à c, sont $\mathcal{F}$-équivalents entre eux : il suffit de considérer l'ensemble des φ qui vérifient $\varphi(a) = \varphi(c)$, celui des φ qui vérifient $\varphi(b) = \varphi(c)$, et de remarquer que leur intersection est un élément de $\mathcal{F}$.

Si, Φ étant une application de E dans E', $\mathcal{F}$ est formé des ensembles de φ contenant Φ, alors la $\mathcal{F}$-équivalence se confond avec la Φ-équivalence.

3.9.1. *Si $\mathcal{F}$ est normal, il n'existe pas d'éléments de* E *distincts et $\mathcal{F}$-équivalents.*

En effet, soient a, b de tels éléments; l'ensemble des φ qui sont biunivoques

sur $\{a, b\}$, autrement dit qui vérifient l'inégalité $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, est un élément de $\mathfrak{F}$: il ne peut en être de même de l'ensemble complémentaire des φ telles que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

3.9.2. *Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre et s'il n'existe pas d'éléments de* E *distincts et $\mathfrak{F}$-équivalents, alors $\mathfrak{F}$ est normal.*

En effet, pour toute paire $\{a, b\}$ d'éléments de E, l'ensemble U des φ telles que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ est un élément de l'ultrafiltre $\mathfrak{F}$: sinon ce serait l'ensemble complémentaire qui appartiendrait à $\mathfrak{F}$, contrairement à nos hypothèses. Étant donnée une partie finie F de E, l'intersection des ensembles U relatifs aux paires $\{a, b\}$ extraites de F est un élément de $\mathfrak{F}$, constitué par les φ qui sont biunivoques sur F.

3.9.3. *Soient* D *une partie de* E, *a, b deux éléments de* D. *Si a et b sont $\mathfrak{F}$-équivalents, ils sont $\mathfrak{F}_D$-équivalents et inversement* ($\mathfrak{F}_D$ a été défini au paragraphe 3.6).

En effet, si $\mathfrak{F}$ a pour élément l'ensemble U des φ telles que $\varphi(a) = \varphi(b)$, alors $\mathfrak{F}_D$ a pour élément l'ensemble V des restrictions à D de ces φ, c'est-à-dire l'ensemble des applications ψ de D dans E′ qui vérifient $\psi(a) = \psi(b)$. Inversement, si $\mathfrak{F}_D$ a pour élément V, $\mathfrak{F}$ a pour élément un ensemble $\overline{V}$ contenant, pour chaque ψ extraite de V, une φ prolongement de ψ; on a donc $\overline{V} \subset U$, et par suite U est un élément de $\mathfrak{F}$.

3.9.4. *Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre normal, il en est de même de toute restriction $\mathfrak{F}_D$.*

En effet, $\mathfrak{F}_D$ est un ultrafiltre (3.6.2) et il n'existe pas d'éléments distincts de D qui soient $\mathfrak{F}$-équivalents (3.9.1) donc qui soient $\mathfrak{F}_D$-équivalents (3.9.3). D'après l'énoncé 3.9.2, $\mathfrak{F}_D$ est normal.

3.10. *Soient* A, A′ *deux relations à n arguments, de bases* E, E′, *et $\mathfrak{F}$ un filtre tel que* $A = \mathfrak{F}^{-1}(A')$. *Soit ψ une application biunivoque transformant une partie* D *de* E *en une autre partie* $\psi(D)$. *Si, pour tout élément a de* D, *le transformé $\psi(a)$ est $\mathfrak{F}$-équivalent à a, alors ψ est un isomorphisme de* $A \mid D$ *sur* $A \mid \psi(D)$.

Preuve. — Il suffit de montrer qu'étant donnée la suite $a_1, \ldots, a_n$ de D, on a

$$A(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)) = A(a_1, \ldots, a_n). \tag{1}$$

Par hypothèse, a_i et $\psi(a_i)$ sont $\mathfrak{F}$-équivalents ($1 \leq i \leq n$); soit U_i l'élément de $\mathfrak{F}$ formé des φ telles que

$$\varphi(a_i) = \varphi\psi(a_i). \tag{2}$$

En raison de l'hypothèse $A = \mathfrak{F}^{-1}(A')$, il existe un élément V de $\mathfrak{F}$ formé

des φ telles que

$$A(a_1, \ldots, a_n) = A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \tag{3}$$

et un élément W formé des φ telles que

$$A(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)) = A'(\varphi\psi(a_1), \ldots, \varphi\psi(a_n)). \tag{4}$$

L'intersection de V, W et des U_i ($1 \leq i \leq n$) est un élément de $\mathcal{F}$, donc n'est pas vide : une φ de cette intersection vérifie à la fois les égalités (2), (3) et (4), d'où l'on déduit immédiatement l'égalité (1).

4. — Démonstrations des théorèmes III et IV. Condition $\mathcal{C}$.

4.1. *Démontrons le théorème* III (1°) énoncé en 1.5.

Considérons la classe Γ_R (1.4) où R est une relation de base E :

ou bien E est fini; alors Γ_R est formée des restrictions de R et de leurs isomorphes;

ou bien E est infini; en ce cas, si D est un ensemble quelconque, il existe, d'après l'énoncé 3.7.2, un filtre normal $\mathcal{F}$ de projection de D sur E. Soit $\mathcal{G}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}$, donc normal (3.7.1). La projection réciproque $\mathcal{G}^{-1}(R)$ (3.5) est définie sur D et vérifie, d'après l'énoncé 3.8 (2°), la condition $\mathcal{G}^{-1}(R) \prec R$, autrement dit $\mathcal{G}^{-1}(R) \in \Gamma_R$. Notre énoncé est démontré.

Dans le cas où Γ_R est la classe des ordres (totaux), on retrouve le fait que tout ensemble peut être ordonné.

4.2. *Toute* Γ *vérifie* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_3$.

Cela est évident pour $\mathcal{C}_1$ (1.4, 1°); montrons-le pour $\mathcal{C}_3$.

Considérons la classe Γ_R, et soient A des relations de Γ_R constituant une chaîne (1.2); désignons par E la réunion de leurs bases, par S leur prolongement commun défini sur E.

Toute partie finie F de E est entièrement contenue dans la base d'une A, donc toute restriction de S à une telle F est une restriction d'une A : on en déduit $S|F < R$. Par suite, on a $S \prec R$ ou $S \in \Gamma_R$: l'énoncé est démontré.

4.3. *Toute* Γ *vérifie* $\mathcal{C}_2$.

Considérons deux relations A, B de la classe Γ_R (où R est une relation de base E). On a $A \prec R$, $B \prec R$ et l'on peut supposer que A et B ont des bases disjointes F et G. *Il suffit de définir une relation* C *telle que* $C > A$, $C > B$ et $C \in \Gamma_R$ (ou $C \prec R$).

Définissons comme suit l'ultrafiltre $\mathscr{H}$ *et la relation* $P = \mathscr{H}^{-1}(R)$.

Désignons par φ (ou par ψ) toute application de F (ou de G) dans E. D'après l'énoncé 3.8 (2°) il existe deux filtres normaux $\mathscr{F}$ défini sur les φ, $\mathscr{G}$ sur les ψ, tels que $A = \mathscr{F}^{-1}(R)$ et $B = \mathscr{G}^{-1}(R)$.

Désignons par ξ toute application de $F \cup G$ dans E, par U tout ensemble de ξ tel que U_F (3.6) soit un élément de $\mathscr{F}$ et U_G un élément de $\mathscr{G}$. Un U n'est jamais vide, et l'intersection de deux U est évidemment un U : les U engendrent un filtre sur les ξ. Nous appellerons $\mathscr{H}$ un ultrafiltre arbitraire, plus fin que ce filtre et défini sur les ξ; nous désignerons par P la projection réciproque $\mathscr{H}^{-1}(R)$ (3.5).

Montrons que A *et* B *ne sont autres que* $P|F$ *et* $P|G$. Les filtres $\mathscr{H}_F$ et $\mathscr{H}_G$ (3.6) sont respectivement plus fins que $\mathscr{F}$ et que $\mathscr{G}$. On en déduit, d'après l'énoncé 3.4, les égalités $\mathscr{H}_F^{-1}(R) = \mathscr{F}^{-1}(R) = A$ et $\mathscr{H}_G^{-1}(R) = \mathscr{G}^{-1}(R) = B$. D'après l'énoncé 3.6.1, A et B ne sont autres que les restrictions à F et à G de $P = \mathscr{H}^{-1}(R)$.

Définissons comme suit les ensembles K, L *et l'application biunivoque* ψ. Deux éléments a, b de $F \cup G$, distincts et $\mathscr{H}$-équivalents (3.9) ne peuvent appartenir tous deux à F ni tous deux à G. Si par exemple ils appartiennent à F, ils sont $\mathscr{H}_F$-équivalents (3.9.3); or $\mathscr{H}_F$ étant plus fin que $\mathscr{F}$, est normal (3.7.1). Les deux conclusions précédentes sont contradictoires (3.9.1).

Il ne peut donc exister plus de deux éléments de $F \cup G$ qui soient $\mathscr{H}$-équivalents, et deux de ces éléments, s'ils sont distincts, appartiennent l'un à F, l'autre à G.

Nous désignerons par K l'ensemble des éléments de F pour lesquels il existe un élément $\mathscr{H}$-équivalent dans G, par L l'ensemble défini de même en échangeant F et G, enfin par ψ l'application biunivoque de $F \cup (G - L)$ sur $G \cup (F - K)$ qui, à chaque élément de K, associe l'élément $\mathscr{H}$-équivalent de L, et qui se réduit à l'identité sur $(F - K) \cup (G - L)$.

La relation $C = P|F \cup (G - L)$ *vérifie les conditions* $C > A$, $C > B$ *et* $C \prec R$.

Deux éléments, distincts ou non, transformés l'un de l'autre par ψ, sont $\mathscr{H}$-équivalents : d'après l'énoncé 3.10, ψ est un isomorphisme de $C = P|F \cup (G - L)$ sur $P|G \cup (F - K)$. Nous en déduisons $C > P|F = A$ et $C > P|G = B$.

Deux éléments distincts de $D = F \cup (G - L)$ ne sont pas $\mathscr{H}$-équivalents, donc ne sont pas $\mathscr{H}_D$-équivalents (3.9.3). Or $\mathscr{H}_D$ est un ultrafiltre (3.6.2) et il est normal d'après l'énoncé 3.9.2. Appliquons la proposition 3.8 (2°) : on a $\mathscr{H}_D^{-1}(R) \prec R$; or $\mathscr{H}_D^{-1}(R)$ n'est autre que $\mathscr{H}^{-1}(R)|D$ (3.6.1), c'est-à-dire C.

La proposition 4.3 est démontrée.

4.4. *Soit* K *une classe de relations vérifiant* $\mathscr{C}_3$. *Si toute restriction d'une relation* R *aux parties finies de sa base appartient à* K, *alors* R *appartient à* K.

Preuve. — L'énoncé est évident si la base E de R est finie. Supposons E de puissance infinie $\mathfrak{T}$.

Il suffit de supposer l'énoncé vrai pour toute relation définie sur un ensemble de puissance inférieure à $\mathfrak{T}$, *et de montrer qu'alors il est vrai pour* R.

Ordonnons les éléments de E suivant le plus petit ordinal de puissance $\mathfrak{T}$ et désignons par H tout ensemble formé des éléments antérieurs à un élément donné. Les restrictions R|H constituent une chaîne (1.2) et les H ont des puissances inférieures à $\mathfrak{T}$. Les restrictions d'une R|H aux parties finies de H sont des restrictions de R : elles appartiennent par hypothèse à K. Il s'ensuit, d'après ce que nous avons supposé plus haut, que R|H appartient à K quel que soit H. Appliquons $\mathcal{C}_3$: la relation R, prolongement des R|H à la réunion E des H, appartient à K.

4.5. *Toute classe* K *de relations qui vérifie* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *et* $\mathcal{C}_3$ *est une* Γ.

Preuve.— Les relations de bases finies appartenant à K vérifient évidemment $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. D'après le théorème II (1.5), elles constituent une γ, soit L. D'après le paragraphe 1.4, il suffit de montrer qu'une relation A appartient à K si, et seulement si ses restrictions aux parties finies F de sa base appartiennent à L.

K vérifiant $\mathcal{C}_1$, si A appartient à K, toute restriction de A à une F appartient à K, donc à L. Inversement, si toute restriction de A à une F appartient à L, donc à K, alors A appartient à K d'après l'énoncé 4.4. La proposition est établie.

Le théorème III (2°) *résulte immédiatement des propositions* 4.2, 4.3 *et* 4.5.

4.6. *Démontrons le théorème* IV (1.5).

Soit K une Γ; considérons un ensemble de relations A de K. La classe K vérifiant $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, appliquons l'énoncé 2.4 (2°) : il existe une chaîne de relations B de K telles que, pour chaque A, il existe une B telle que $B > A$. Soit R le prolongement des B à la réunion de leurs bases. On a évidemment $R > A$ pour chaque A. De plus, K vérifiant $\mathcal{C}_3$, contient R : le théorème IV est établi.

4.7. Condition $\mathcal{C}$. — Supposons que les relations A du théorème IV soient de bases finies ou dénombrables; *nous ignorons si* R *peut être choisie de base finie ou dénombrable.*

Si la réponse est affirmative, toute Γ satisfait à la condition suivante :

$\mathcal{C}$. *Soit* K *la classe considérée, restreinte à ses relations de bases finies et dénombrables; il existe une relation* R *de* K *telle que* $R > A$ *pour toute* A *de* K.

La classe des ordres totaux vérifie $\mathcal{C}$, la relation R étant alors l'ordre η des nombres rationnels ou tout ordre dénombrable prolongement de η.

Nous montrerons (8.5) que, plus généralement, les classes vérifiant une cer-

taine condition $\mathcal{D}$ donnée au paragraphe 7.1, vérifient aussi $\mathcal{C}$: il en résultera que la classe des ordres partiels et celle de toutes les relations à n arguments vérifient $\mathcal{C}$. Pour cette dernière classe, l'existence d'une R de base dénombrable a été annoncée par A. Lindenbaum qui l'a appelée « relation universelle » (7) et par nous-même qui l'avons appelée « relation riche » (8).

5. — Relation homogène et condition $\mathcal{H}$. Énoncé et démonstration du théorème V.

5.1. Une relation R de base E sera dite *homogène* si, quelle que soit la partie finie F de E, tout isomorphisme de $R|F$ sur une restriction de R peut être prolongé en un automorphisme de R.

Théorème V. — *Si* R *est une relation homogène, on a* $R > A$ *pour toute relation* A *de* Γ_R (1.4) *ayant une base finie ou dénombrable.*

Ce théorème généralise bien la proposition relative aux ordres totaux signalée au paragraphe 1.1 ; en effet, nous montrerons au paragraphe 6.3 que le seul ordre dénombrable homogène est l'ordre η des nombres rationnels, et que tout ordre infini homogène est un prolongement de η ; nous rappelons par ailleurs que, si R est un ordre infini, Γ_R n'est autre que la classe des ordres.

5.2. Nous dirons qu'une relation R vérifie la *condition* $\mathcal{H}$ si, *quelles que soient la relation* A *et son prolongement* $\overline{A}$ *extraits de* γ_R (autrement dit, isomorphes à deux restrictions de R, de bases finies) *tout isomorphisme de* A *sur une restriction de* R *peut être prolongé en un isomorphisme de* $\overline{A}$ *sur une restriction de* R.

5.2.1. On n'affaiblit évidemment pas la condition $\mathcal{H}$ en y supposant que la base de $\overline{A}$ se déduit de celle de A par addition d'un seul élément.

5.3. *Toute relation homogène vérifie* $\mathcal{H}$.

Preuve. — Soit R une relation homogène; considérons une relation A de base F et un prolongement $\overline{A}$ de A, de base $\overline{F}$ $(A, \overline{A} \in \gamma_R)$; enfin soit φ un isomorphisme de A sur une restriction $R|\varphi(F)$. Il suffit de montrer que φ peut être prolongé en un isomorphisme $\overline{\varphi}$ de $\overline{A}$ sur une restriction de R.

$\overline{A}$ appartenant à γ_R, il existe un isomorphisme ψ de $\overline{A}$ sur une restriction $R|\psi(\overline{F})$; ψ transforme A en $R|\psi(F)$, donc $\varphi\psi^{-1}$ transforme $R|\psi(F)$ en $R|\varphi(F)$. Par hypothèse, ce dernier isomorphisme se prolonge en un automorphisme de R, donc *a fortiori* en un isomorphisme ξ de $R|\psi(\overline{F})$ sur une restriction de R.

(7) A. Lindenbaum, *Ann. Soc. Pol. de Math.*, t. 17, 1938, p. 124-126.
(8) *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 987-988.

L'application $\bar{\varphi} = \xi\psi$, définie sur $\bar{F}$, transforme $\bar{A}$ en $\xi\,(R\,|\,\psi(\bar{F}))$ qui est, on vient de le voir, une restriction de R; de plus $\bar{\varphi}$ se confond, sur F, avec $\varphi\psi^{-1}\psi = \varphi$: la proposition est démontrée.

5.4. *Soient* R, S *deux relations de bases* D, E.

1° *Si* R *vérifie* $\mathcal{H}$, *si* $S \prec R$ *et si* E *est finie ou dénombrable, alors* $S < R$.

2° *Si* R *et* S *vérifient* $\mathcal{H}$, $R \prec S$, $S \prec R$ *et si* D *et* E *sont finies ou dénombrables, alors* R *et* S *sont isomorphes, et en outre tout isomorphisme d'une restriction de* R *à une partie finie de sa base, sur une restriction de* S, *peut être prolongé en un isomorphisme de* R *sur* S.

Preuve du 1°. — Numérotons les éléments de E, soient $e_1, \ldots, e_p, \ldots$ et posons $E_p = \{e_1, \ldots, e_p\}$, $S_p = S\,|\,E_p$. D'après l'hypothèse, les S_p appartiennent à γ_R.

Il existe un isomorphisme φ_1 de S_1 sur une restriction de R. Supposons qu'il existe une suite d'isomorphismes $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ de $S_1, \ldots, S_{p-1}$ sur des restrictions de R, chaque $\varphi_i\,(1 \leq i \leq p-1)$ prolongeant les précédents. R vérifiant $\mathcal{H}$, il existe un isomorphisme φ_p de S_p sur une restriction de R, prolongeant φ_{p-1} et les φ_i précédents.

Désignons par Φ l'application biunivoque définie sur E, qui se réduit à φ_p sur chaque E_p. On a $\Phi(E) \subset D$; toute partie finie de E étant contenue dans un E_p, toute restriction de S à une partie finie de E est une restriction d'une S_p, donc est transformée par Φ en une restriction de $R\,|\,\Phi(E)$. D'après l'énoncé 1.2.1, Φ transforme S en $R\,|\,\Phi(E)$, ce qui donne $S < R$.

Preuve du 2°. — Outre les éléments de E, numérotons ceux de D, soient $d_1, \ldots, d_p, \ldots$. En raison des hypothèses $R \prec S$ et $S \prec R$, les suites d_p et e_p ont le même nombre (fini ou dénombrable) d'éléments.

Soit φ un isomorphisme de $R\,|\,F$ sur $S\,|\,G$ (F, G parties finies de D, E).

Montrons que, si $d \in D - F$ *et* $e \in E - G$, *alors* φ *peut être prolongé en un isomorphisme* $\bar{\varphi}$ *de* $\bar{F}$ *sur* $\bar{G}$, *où* $\bar{F} \supset F \cup \{d\}$ *et* $\bar{G} \supset G \cup \{e\}$.

En effet, S vérifiant $\mathcal{H}$ et $R\,|\,F \cup \{d\}$ appartenant à $\gamma_R = \gamma_S$, φ peut être prolongé en un isomorphisme φ' de $R\,|\,F \cup \{d\}$ sur une restriction de S. En échangeant les rôles de R et de S, on montre que φ'^{-1} peut être prolongé en un isomorphisme φ'' de $S\,|\,\bar{G}\,[\text{où } \bar{G} = G \cup \{\varphi'(d), e\}]$ sur $R\,|\,F\,[\text{où } \bar{F} = F \cup \{d, \varphi''(e)\}]$. Notre assertion est établie en prenant $\bar{\varphi} = \varphi''^{-1}$.

D'après ce qui précède, partant de φ, nous en obtenons des prolongements successifs $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \ldots$ où φ_p applique F_p sur G_p, avec $F_p \supset F \cup \{d_1, \ldots, d_p\}$ et $G_p \supset G \cup \{e_1, \ldots, e_p\}$. Les ensembles D et E ayant le même nombre d'éléments, nous ne pouvons avoir $F_p = D$ sans avoir $G_p = E$ et inversement. Que la suite

des φ_p soit finie ou infinie, le prolongement Φ commun aux φ_p est une application biunivoque de D sur E, et c'est un prolongement de φ. Toute restriction de R à une partie finie de D est transformée par Φ en une restriction de S. D'après l'énoncé 1.2.1, on a $\Phi(R) = S$: l'énoncé est démontré.

Le théorème V *résulte immédiatement des propositions* 5.3 *et* 5.4 (1°), où l'on remplace $S \prec R$ par la condition équivalente $S \in \Gamma_R$.

5.5. *Toute relation de base finie ou dénombrable, vérifiant* $\mathfrak{H}$, *est homogène.*

En effet, soit R cette relation. Elle vérifie les hypothèses de l'énoncé 5.4 (2°) où l'on pose $S = R$: la conclusion exprime alors que R est homogène (5.1).

Nous verrons au paragraphe 6.3 que la condition $\mathfrak{H}$ n'implique pas l'homogénéité pour des relations de bases infinies non dénombrables.

Des énoncés 5.3 et 5.5, nous déduisons le résultat suivant :

5.5.1. *Pour qu'une relation de base finie ou dénombrable soit homogène, il faut et suffit qu'elle vérifie* $\mathfrak{H}$.

6. — Application aux ordres.

Examinons ce que deviennent l'homogénéité et la condition $\mathfrak{H}$ dans le cas des ordres (totaux).

6.1. *Pour qu'un ordre* I *soit homogène, il faut et suffit qu'il vérifie la condition suivante : le type de* I *restreint aux éléments antérieurs à un élément a, ou postérieurs à a, ou compris entre deux éléments a, b, ne dépend pas du choix de a et de b.*

Preuve. — Soient F et F′ deux ensembles formés chacun de p éléments de I désignés par $a_1, \ldots, a_p$ et $a'_1, \ldots, a'_p$ dans l'ordre induit par I. Désignons par E_0, $E_i (1 \leq i \leq p-1)$ et E_p les ensembles d'éléments de I antérieurs à a_1, compris entre a_i et a_{i+1}, postérieurs à a_p. Les E'_i $(0 \leq i \leq p)$ sont définis de même au moyen de $a'_1, \ldots, a'_p$.

Le seul isomorphisme φ de $I|F$ sur $I|F'$ est celui qui transforme a_i en a'_i $(1 \leq i \leq p)$. Pour que I soit homogène, il faut et suffit que φ puisse être prolongé en un automorphisme Φ de I. Cet automorphisme doit conserver l'ordre des éléments : il existe si et seulement si $I|E_i$ est isomorphe à $I|E'_i$ pour chaque $i (0 \leq i \leq p)$. Cela est vrai, quels que soient F et F′, si la condition de l'énoncé est réalisée et dans ce cas seulement.

6.2. *Pour qu'un ordre* I *ayant plus d'un élément vérifie la condition* $\mathfrak{H}$, *il faut et suffit qu'il soit dense, sans premier ni dernier élément.*

Preuve. — 1° Supposons que I vérifie $\mathcal{H}$ et qu'il y existe deux éléments consécutifs a, b. Montrons qu'il ne peut exister un troisième élément c, supposé par exemple postérieur à b. En effet, les restrictions $I|\{a, c\}$ et $I|\{a, b, c\}$ appartiennent à la classe $\gamma_1(1.4)$. Or l'isomorphisme φ de $I|\{a, c\}$ sur $I|\{a, b\}$ ne peut être prolongé en un isomorphisme $\bar{\varphi}$ de $I|\{a, b, c\}$ sur une restriction de I, car $\varphi(b)$ devrait être compris entre $\bar{\varphi}(a)=a$ et $\varphi(c)=b$, ce qui est impossible.

Supposons qu'il existe dans I un premier élément b. Appliquons le raisonnement précédent, en y supprimant partout a et en remplaçant les mots « compris entre a et $\bar{\varphi}(c)=b$ » par « antérieur à $\bar{\varphi}(c)=b$ ». On montre ainsi qu'il ne peut exister dans I un élément c distinct de b. On a le même résultat si I contient un dernier élément b.

En définitive, si I vérifie $\mathcal{H}$ et contient plus d'un élément, aucun d'eux ne peut être le premier, ni le dernier, ni être consécutif à un autre : la condition de l'énoncé est bien nécessaire.

2° Démontrons qu'elle est suffisante. D'après l'énoncé 5.2.1, il suffit de montrer que, si J est un ordre fini de p éléments, rangés dans l'ordre $a_1, \ldots, a_p$, et $\bar{J}$ un ordre prolongement de J à l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_p, b\}$, alors tout isomorphisme φ de J sur une restriction de I, soit $I|\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_p)\}$ peut être prolongé en un isomorphisme $\bar{\varphi}$ de $\bar{J}$ sur une restriction de I. Nous prenons $\bar{\varphi}(a_i)=\varphi(a_i)$ pour $1 \leqq i \leqq p$, et, selon que b est antérieur, dans $\bar{J}$, à a_1, compris entre a_i et a_{i+1} $(1 \leqq i \leqq p-1)$ ou postérieur à a_p, nous prenons $\bar{\varphi}(b)$ antérieur dans I à $\varphi(a_1)$, compris entre $\varphi(a_i)$ et $\varphi(a_{i+1})$ ou postérieur à a_p; cela est possible d'après l'hypothèse : la proposition est démontrée.

6.3. D'après l'énoncé 5.3, tout ordre homogène vérifie $\mathcal{H}$; donc, s'il contient plus d'un élément, il est dense, sans premier ni dernier élément (6.2); de plus, tout ordre dénombrable jouissant de cette dernière propriété est homogène (5.5 et 6.2); tout cela peut d'ailleurs être prouvé directement en utilisant l'énoncé 6.1. Il en résulte que le seul ordre dénombrable homogène est η et que tout ordre infini homogène est un prolongement de η (résultat annoncé au paragraphe 5.1).

Il existe plusieurs ordres homogènes infinis et non dénombrables; citons l'ordre $\Omega\eta$ (où Ω est le premier ordinal non dénombrable), l'ordre λ des nombres réels, l'ordre $\lambda+\Omega(\hat{1}+\lambda)$ (où $\hat{1}$ désigne l'ordre ayant un seul élément). On voit en effet aisément que ces ordres vérifient la condition de l'énoncé 6.1.

Il existe des ordres non homogènes vérifiant la condition $\mathcal{H}$. Ainsi l'ordre déduit de λ par suppression d'un élément e est dense, sans premier ni dernier élément : il vérifie $\mathcal{H}$ (6.2). Cependant il n'est pas homogène en raison de l'énoncé 6.1 : sa restriction aux éléments antérieurs à un élément donné a est de type différent selon que a est antérieur ou postérieur à e dans λ.

7. — Conditions $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, $\overline{\mathcal{O}}$.

7.1. Soit K une classe qui, lorsqu'elle contient une relation, contient aussi ses isomorphes, et soient A, B deux relations de K, de bases finies F, G.

Considérons les conditions suivantes :

$\mathcal{O}$. *Si* A, B *ont une restriction commune* D, *il existe une relation* C *de* K *et deux isomorphismes* φ *et* ψ *de* A *et de* B *sur deux restrictions de* C, *avec* $\varphi(x) = \psi(x)$ *lorsque* x *appartient à la base de* D.

$\mathcal{O}'$. *Tout isomorphisme* ξ *d'une restriction* $A \mid F'(F' \subset F)$ *sur une restriction de* B *peut être prolongé en une application biunivoque* $\overline{\xi}$ *définie sur* F, *de telle sorte qu'il existe dans* K *un prolongement* C *commun à* $\overline{\xi}(A)$ *et à* B.

$\overline{\mathcal{O}}$. *Si les restrictions de* A *et* B *à* $F \cap G$ *sont identiques, il existe dans* K *un prolongement* C *commun à* A *et* B.

Nous allons montrer que $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont équivalentes, et que $\overline{\mathcal{O}}$ est plus forte que $\mathcal{O}$. Nous donnerons au paragraphe 9 des exemples de classes vérifiant ou non $\mathcal{O}$ ou $\overline{\mathcal{O}}$.

7.2. *Les conditions* $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{O}'$ *sont équivalentes.*

Supposons que K *vérifie* $\mathcal{O}$, et soit ξ un isomorphisme de $A \mid F'(F' \subset F)$ sur une restriction $B \mid \xi(F')$. Désignons par ξ_1 l'application biunivoque qui se réduit à ξ sur F', à l'identité sur $F - F'$, et posons $A_1 = \xi_1(A)$.

A_1 et B ont une restriction commune D de base $\xi(F')$. Appliquons l'énoncé $\mathcal{O}$ en y remplaçant A par A_1 et en supposant que ψ soit la permutation identique de G (cela peut toujours être réalisé, en transformant au besoin C par un isomorphisme approprié). φ se réduit alors à l'identité sur $\xi(F')$. L'application $\overline{\xi} = \varphi\xi_1$ définie sur F, se réduit à ξ sur F', et la relation C introduite par l'application de $\mathcal{O}$ est un prolongement commun à $\psi(B) = B$ et à $\varphi(A_1) = \overline{\xi}(A)$: la classe K vérifie $\mathcal{O}'$.

Supposons que K *vérifie* $\mathcal{O}'$, et soit D une restriction commune à A et B, de base H (on a donc $H \subset F \cap G$). Appliquons $\mathcal{O}'$ en prenant pour ξ la permutation identique de H. Il existe une application biunivoque $\overline{\xi}$ définie sur F, se réduisant à l'identité sur H et telle que $\overline{\xi}(A)$ et B aient un prolongement commun C extrait de K. Cela n'est autre que la conclusion de $\mathcal{O}$ où l'on prend $\varphi = \overline{\xi}$ et où ψ est la permutation identique de G.

7.3. *La condition* $\overline{\mathcal{O}}$ *est plus forte que* $\mathcal{O}$, *même si l'on se borne au cas où* K *est une* Γ.

$\overline{\mathcal{D}}$ *entraîne* $\mathcal{D}$. En effet, si A et B ont une restriction commune D de base H, on peut toujours transformer A et B par deux isomorphismes φ et ψ qui se réduisent à l'identité sur H, de telle sorte que $\varphi(F)$ et $\psi(G)$ aient pour intersection H.

Par application de $\overline{\mathcal{D}}$, il existe dans K un prolongement C commun à $\varphi(A)$ et $\psi(B)$: la condition $\mathcal{D}$ est bien satisfaite.

$\overline{\mathcal{D}}$ *n'est pas équivalente à* $\mathcal{D}$. Prenons pour K la classe des relations à un argument prenant la valeur $+$ pour un élément de la base et un seul; on voit aisément que cette classe est une Γ, car elle vérifie les conditions $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ de 1.5.

K *ne vérifie pas* $\overline{\mathcal{D}}$. — Soient A et B deux relations de K, a et b les éléments tels que $A(a)=+$ et $B(b)=+$. Si les bases de A et B sont disjointes, ou n'ont en commun que des éléments autres que a et b, l'hypothèse de $\overline{\mathcal{D}}$ est vérifiée; or sa conclusion ne peut l'être, car un prolongement C commun à A et B prend nécessairement la valeur $+$ pour a et pour $b \neq a$; C n'appartient pas à K.

K *vérifie* $\mathcal{D}$. — Soit H une partie commune aux bases F, G de A et de B, et soit $D = A \mid H = B \mid H$. L'ensemble H ne peut contenir a, seul élément tel que $A(a)=+$, ni b, seul élément tel que $B(b)=+$, à moins que l'on ait $a=b$. Soient φ et ψ deux applications biunivoques définies sur F et sur G, se réduisant sur H à l'identité et telles que $\varphi(a)=\psi(b)$. Les relations $\varphi(A)$ et $\psi(B)$ sont toujours égales à —, sauf pour l'élément $\varphi(a)=\psi(b)$: leur prolongement commun défini sur $\varphi(F) \cup \psi(G)$ appartient à K. Notre assertion est établie.

7.4. *Soit* K *une classe vérifiant* $\mathcal{D}$ *et qui, lorsqu'elle contient une relation, contient aussi ses isomorphes. Considérons une relation* R, *une suite finie de relations* A_i(R, $A_i \in$ K *et de bases finies*) *et une suite d'isomorphismes* ξ_i *transformant chacun une certaine restriction de* A_i *en une restriction de* R. *Alors chaque* ξ_i *peut être prolongé en une application biunivoque* $\bar{\xi}_i$ *de sorte que* R *et les* $\bar{\xi}_i(A_i)$ *aient un prolongement commun* P *dans* K.

Pour le voir, appliquons $\mathcal{D}'$ en y remplaçant A et B par A_1 et R. Nous obtenons l'application $\bar{\xi}_1$ et un prolongement R_1 commun à $\xi_1(A_1)$ et à R (avec $R_1 \in$ K). Appliquons à nouveau $\mathcal{D}'$ en y remplaçant A et B par A_2 et R_1 ; nous obtenons $\bar{\xi}_2$ et un prolongement R_2 commun à $\bar{\xi}_2(A_2)$ et à R_1, donc commun à $\bar{\xi}_1(A_1)$, $\bar{\xi}_2(A_2)$ et R (avec $R_2 \in$ K). Par itération de ce procédé, nous obtenons les $\bar{\xi}_i$ et une suite de R_i dont le dernier n'est autre que la relation P de l'énoncé.

8. — Homogénéité et condition $\mathcal{O}$. Énoncé et démonstration du théorème VI.

8.1. Théorème VI. — *Soit* K *une classe* Γ; *désignons par* R *toute relation de* K (si elle existe) *qui est homogène et qui vérifie* $K = \Gamma_R$ [rappelons que, d'après l'énoncé 1.4 (3°), cette dernière condition équivaut au fait que toute relation de base finie appartenant à K est isomorphe à une restriction de R].

1° *Pour qu'il existe des relations* R, *il faut et suffit que* K *vérifie* $\mathcal{O}$ (7.1).

2° *En ce cas, l'une des* R *et une seule* (avec ses isomorphes) *est de base finie ou dénombrable.*

3° *Désignons cette dernière relation par* R_0; *on a* $R_0 < R$ *pour toute* R.

Nous verrons au paragraphe 9.2 que la classe des ordres (totaux) vérifie $\mathcal{O}$. La conclusion 2° ci-dessus généralise bien la propriété des ordres signalée au paragraphe 1.1 : en effet, un ordre dénombrable est homogène seulement s'il est dense, sans premier ni dernier élément (6.3).

8.2. *Si* R *est une relation homogène, la classe* Γ_R (1.4) *vérifie* $\mathcal{O}$.

Preuve. — Soient A, B deux relations de bases finies, appartenant à Γ_R. On peut les considérer comme étant deux restrictions $A = R|F$ et $B = R|G$ (où F et G sont finis). Soit ξ un isomorphisme de $A|F' = R|F'$ ($F' \subset F$) sur une restriction de B. Remplaçons $\mathcal{O}$ par la condition équivalente $\mathcal{O}'$ (7.1); il suffit de montrer que ξ peut être prolongé en une application biunivoque $\bar{\xi}$ telle que $\bar{\xi}(A)$ et B aient un prolongement commun C parmi les restrictions de R.

Par hypothèse, ξ peut être prolongé en un automorphisme Φ de R. Prenons pour $\bar{\xi}$ l'application Φ restreinte à F; la relation $\bar{\xi}(A)$ est une restriction de $\Phi(R) = R$; donc $\bar{\xi}(A)$ et B ont pour prolongement commun la relation $C = R|\bar{\xi}(F) \cup G$. L'énoncé est démontré.

8.3. *Si* K *est une classe* Γ *vérifiant* $\mathcal{O}$, *on peut en extraire une suite finie ou dénombrable de relations* $R_1, \ldots, R_p, \ldots$ *de bases finies, vérifiant les conditions suivantes :*

1° *Chaque* R_p *est un prolongement des précédentes.*

2° *Pour toute relation* A *de* K *définie sur* p *éléments au plus, on a* $A < R_p$.

3° *Étant donnée une relation* A *de* K *définie sur* p *éléments au plus et l'une de ses restrictions* A', *tout isomorphisme de* A' *sur une restriction de* R_{p-1} *peut etre prolongé en un isomorphisme de* A *sur une restriction de* R_p.

Preuve. — Démontrons d'abord qu'il existe une relation R_1 vérifiant la conclusion 2° pour $p = 1$.

Les types des relations de K définies sur un seul élément sont en nombre fini (2.1, 1°). Prenons, dans chacun de ces types, une représentante A. La classe K, restreinte à ses relations de bases finies, est une γ : elle vérifie $\mathcal{C}_2$ (théorème II). Par application itérée de $\mathcal{C}_2$, on voit qu'il existe dans K une relation R_1 telle qu'on ait $R_1 > A$ pour chaque A.

Supposons obtenues les relations $R_1, \ldots, R_{p-1}$ $(p > 1)$ vérifiant les conclusions 1° à 3° ci-dessus, et définissons comme suit leur prolongement R_p.

Les relations de K définies sur p éléments au plus appartiennent à un nombre fini de types. Soit $\{A_i\}$ une suite finie contenant une représentante de chacun de ces types. A chaque A_i associons tous les isomorphismes ξ_{ij}, en nombre fini, qui transforment une restriction de A_i définie sur $p-1$ éléments au plus en une restriction de R_{p-1}. Appliquons la proposition 7.4 en y remplaçant R par R_{p-1} et en répétant chaque A_i autant de fois qu'il lui correspond d'isomorphismes ξ_{ij}. Chaque ξ_{ij} peut être prolongé en $\bar{\xi}_{ij}$, de sorte que les relations $\bar{\xi}_{ij}(A_i)$ et R_{p-1} aient un prolongement commun extrait de K : ce sera la relation R_p.

R_p vérifie évidemment les conclusions 1° et 3° de l'énoncé. Elle vérifie aussi le 2°. En effet, étant donnée l'une des A_i, définie sur q éléments $(q \leq p)$, ou bien $q \leq p-1$: la conclusion 2°, supposée vraie pour $p-1$, donne alors $A_i < R_{p-1} < R_p$; ou bien $q = p > 1$; il existe alors au moins une restriction A' de A_i définie sur $p-1$ éléments, donc vérifiant $A' < R_{p-1}$; par conséquent l'un au moins des isomorphismes ξ_{ij} transformant A' en une restriction de R_{p-1}, existe; la relation $\bar{\xi}_{ij}(A_i)$ existe et R_p en est un prolongement : on a bien $A_i < R_p$.

8.3.1. *La relation* R, *prolongement des* R_p *à la réunion de leurs bases, est homogène, et l'on a* $K = \Gamma_R$.

Preuve. — 1° K, *restreinte à ses relations de bases finies, n'est autre que* γ_R. En effet, toute restriction de R à une base finie est une restriction d'une R_p, donc appartient à K en raison de la condition $\mathcal{C}_1$ (1.5). Inversement, toute relation A de base finie, extraite de K, vérifie la condition $A < R_p$ pour un certain entier p (8.3, 2°) donc vérifie la condition $A < R$.

2° *On a* $K = \Gamma_R$. C'est une conséquence immédiate de l'assertion 1° et du fait que K est par hypothèse une Γ.

3° R *est homogène*. La base de R est finie ou dénombrable; *il suffit de montrer que cette relation vérifie* $\mathcal{H}$ (5.5). Soient A, $\bar{A}$ deux relations de γ_R ($\bar{A}$ étant un prolongement de A) définies respectivement sur r et sur $r+s$ éléments; soit ξ un isomorphisme de A sur une restriction de R. $\xi(A)$ est une restriction des R_p à partir d'une certaine valeur de p; on peut toujours supposer $p \geq r$. La relation $\bar{A}$ appartient à K d'après l'assertion 1° ci-dessus. Les hypothèses de l'énoncé 8.3 (3°) sont satisfaites en remplaçant A par $\bar{A}$, A' par A et p par $p+s+1$ [on a en

effet $p+s+1 > r+s$, et $\xi(A)$ est une restriction de $R_{p+s}]$; ξ peut donc être prolongé en un isomorphisme $\bar{\xi}$ de $\overline{A}$ sur une restriction de R_{p+s+1}, donc sur une restriction de R. Notre énoncé 8.3.1 est démontré.

8.4. *Démontrons le théorème* VI.

1° La condition du théorème VI, 1° est nécessaire d'après l'énoncé 8.2, suffisante d'après les énoncés 8.3 et 8.3.1.

2° La relation R dont parle l'énoncé 8.3.1 est de base finie ou dénombrable; désignons-la par R_0. S'il existe une autre relation R_1 homogène, de base finie ou dénombrable, telle que $K = \Gamma_{R_0} = \Gamma_{R_1}$, on a $R_0 \prec R_1$ et $R_1 \prec R_0$ (1.4); de plus R_0 et R_1 vérifient $\mathcal{H}$ (5.3). D'après l'énoncé 5.4 (2°), R_1 est isomorphe à R_0 : la conclusion 2° du théorème est établie.

3° Soit R une relation homogène telle que $K = \Gamma_R$; appliquons le théorème V (5.1) en remplaçant A par R_0 : la conclusion 3° du théorème VI est établie.

8.5. Des théorèmes V et VI, résulte notre affirmation du paragraphe 4.7 :

Si une Γ *vérifie la condition* $\mathcal{O}$ (7.1) *elle vérifie la condition* $\mathcal{C}$ (4.7).

En effet, soient K cette Γ, R la relation homogène de base finie ou dénombrable, telle que $K = \Gamma_R$ (théorème VI, 2°); toute relation A de K, définie sur une base finie ou dénombrable, vérifie $A < R$ d'après le théorème V.

9. — Sur quelques classes de relations vérifiant ou non les conditions $\mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ de 7.1.

Les classes considérées dans le présent paragraphe sont des Γ (2.7).

9.1. *La classe de toutes les relations à n arguments vérifie* $\overline{\mathcal{O}}$.

En effet, considérons deux de ces relations A, B de bases F, G ayant une restriction commune à $F \cap G$. Toute relation C de base $F \cup G$, prenant sur F les mêmes valeurs que A, et sur G les mêmes valeurs que B, satisfait à la condition $\overline{\mathcal{O}}$.

9.2. *La classe des ordres totaux vérifie* $\overline{\mathcal{O}}$.

Preuve. — Soient A, B deux ordres finis de bases F, G; désignons par $a_1, \ldots, a_p$ la suite des éléments de $F \cap G$ dans l'ordre, supposé commun, induit par A et par B. Ordonnons les éléments de $F \cup G$ en plaçant d'abord les éléments de F antérieurs à a_1, dans l'ordre induit par A, puis ceux de G antérieurs à a_1, dans l'ordre induit par B; ensuite nous plaçons a_1, puis les éléments de F et de G compris entre a_1 et a_2, dans les ordres induits par A et par B; on

continue ainsi jusqu'aux éléments de F et de G postérieurs à a_p. L'ordre obtenu C vérifie $\overline{\mathcal{O}}$.

9.3. *La classe des ordres partiels vérifie* $\overline{\mathcal{O}}$.

Preuve. — A et B sont ici deux ordres partiels. Désignons par H l'intersection de leurs bases F, G, et définissons comme suit la relation C sur $F \cup G$:

Si $a, b \in F \cup G$:

ou bien $a, b \in F$: on pose $C(a, b) = A(a, b)$;

ou bien $a, b \in G$: on pose $C(a, b) = B(a, b)$;

ou bien $a \in F - H$ et $b \in G - H$: on pose alors $C(a, b) = +$ si, et seulement s'il existe un x de H tel que

$$A(a, x) = B(x, b) = +;$$

de même $C(b, a) = +$ si et seulement s'il existe un y de H tel que

$$B(b, y) = A(y, a) = +.$$

La relation C *est évidemment réflexive. Elle est transitive,* ainsi qu'on le voit en considérant trois éléments a, b, c disposés de toutes les façons possibles dans H, $F - H$ et $G - H$ et en utilisant la transitivité de A et de B.

Étant donnés deux éléments distincts a, b *de* $F \cup G$, *on ne peut avoir*

$$C(a, b) = C(b, a) = +.$$

C'est évident si $a, b \in F$ ou si $a, b \in G$. Dans le cas où $a \in F - H$ et $b \in G - H$, il faut qu'il existe un x et un y de H tels que

$$A(a, x) = B(x, b) = B(b, y) = A(y, a) = +.$$

D'après la transitivité de A et de B, on a $A(y, x) = B(x, y) = +$ et,

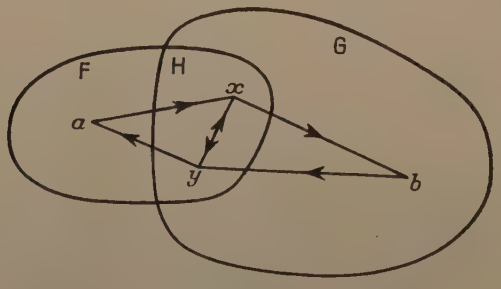

Fig. 1.

puisque A et B se confondent par hypothèse sur H, on a

$$A(y, x) = A(x, y) = + \quad (\textit{fig. 1}).$$

On en déduit $x=y$, $A(a, x)=A(x, a)=+$ et par conséquent $a=x$, ce qui est contradictoire.

C est bien un ordre partiel prolongement de A et de B, donc vérifiant $\overline{\mathcal{O}}$.

9.4. *La classe des ordres ramifiés* (1.4) *ne vérifie pas* $\mathcal{O}$.

Preuve. — Soient a, b, c, d, e cinq éléments; posons

$$F=\{a, b, c, d\}, \qquad G=\{a, b, c, e\}, \qquad H=\{a, b, c\}.$$

Soit A l'ordre ramifié défini sur F, dans lequel a, b, c sont incomparables, d étant antérieur à a et à b, mais incomparable à c; soit B l'ordre défini de même sur G, en échangeant a et c, d et e (*fig.* 2).

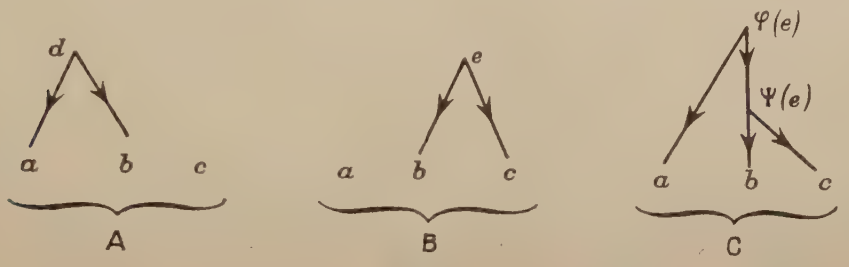

Fig. 2.

Supposons qu'il existe un ordre ramifié C et deux isomorphismes φ, ψ de A et de B sur deux restrictions de C, avec $\varphi(x)=\psi(x)$ pour $x \in H$. Nous pouvons toujours supposer que φ et ψ se réduisent à l'identité sur H. $\varphi(d)$ et $\psi(e)$ doivent être antérieurs, dans C, à $\varphi(b)=\psi(b)=b$. L'un des deux éléments $\varphi(d)$, $\psi(e)$ est donc antérieur ou confondu avec l'autre; supposons $\varphi(d) \leq \psi(e)$ dans C; nous avons $\psi(e) < \psi(c)=c$ donc $\varphi(d) < c=\varphi(c)$. Cela est impossible, puisque l'isomorphisme φ doit transformer les deux éléments incomparables c et d de A en deux éléments incomparables de C. La proposition est démontrée.

9.5. Désignons par K_1, K_2, K_3 et K_4 la classe des relations à n arguments, celle des ordres totaux, celle des ordres partiels et celle des ordres ramifiés. Compte tenu de ce que $\overline{\mathcal{O}}$ entraîne $\mathcal{O}$ (7.3), le théorème VI (8.1) démontre l'existence de relations homogènes R_i ($i=1, 2, 3$) de K_i, telles que $K_i=\Gamma_{R_i}$ (autrement dit, telles que toute relation de base finie, extraite de K_i, est isomorphe à une restriction de R_i). La conclusion 2° du théorème montre qu'une R_1, une R_2 (qui est l'ordre η) et une R_3 seulement sont de base dénombrable. Par contre, il n'existe aucun ordre ramifié homogène R vérifiant $K_4=\Gamma_R$ (c'est-à-dire ayant des restrictions isomorphes à tout ordre ramifié fini).

En raison de ce que nous avons dit au paragraphe 8.5, les classes K_1, K_2 et K_3 vérifient la condition $\mathcal{C}$ du paragraphe 4.7. Nous ignorons si la classe des ordres ramifiés vérifie $\mathcal{C}$.

10. — Application à la logique mathématique. Problèmes.

10.1. A l'aide d'un théorème dû à L. Henkin ([9]), on déduit immédiatement, des théorèmes III et IV (1.5), la conséquence suivante :

Tout type arithmétique K *au sens de* A. Tarski ([10]) (classe de relations vérifiant les mêmes formules du calcul logique du premier ordre) *satisfait à la condition* $\mathcal{C}_2$ *et plus généralement à l'énoncé du théorème* IV.

10.2. Les questions suivantes restent ouvertes :

1° Étant donnés une relation R et un entier p, soit K la classe des relations dont toute restriction à p éléments au plus est isomorphe à une restriction de R; la classe K est-elle une Γ ? ([11])

2° Quelle est la puissance de l'ensemble des Γ qui vérifient $\mathcal{D}$ (7.1) ? Même question pour $\overline{\mathcal{D}}$.

3° Dans la définition de la relation homogène à n arguments (5.1), supposons que F soit astreinte à avoir n éléments au plus; la définition obtenue équivaut-elle à la définition initiale ?

4° Étendons ainsi la définition de la relation homogène :

« Quelle que soit la partie finie F de E, il existe une partie finie G ($F \subset G \subset E$) telle que tout isomorphisme de $R \mid G$ sur une restriction de R peut être prolongé en un automorphisme de R ».

Étant donnée une Γ que nous désignons par K, existe-t-il une relation R de base finie ou dénombrable, et une seule (avec ses isomorphes), vérifiant $K = \Gamma_R$ et répondant à la définition ainsi modifiée ?

([9]) L. Henkin, *Some interconnections between modern algebra and mathematical logic* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, 1953, p. 414).

([10]) A. Tarski, *Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics* (*Proc. Intern. Congr. Math.*, 1950, p. 712).

([11]) Réponse négative obtenue depuis la rédaction de l'article.

GÉNÉRALISATION
DE LA FORMULE DE FEJER
POUR LES
SÉRIES DE POLYNOMES ORTHOGONAUX USUELS

PAR M. ROBERT CAMPBELL.

Il est bien connu que dans le développement

$$\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty A_m(x), \qquad \text{où} \quad A_m(x)=a_m\cos mx+b_m\sin mx$$

d'une fonction de variable réelle $f(x)$ en série de Fourier, on peut calculer explicitement toute somme partielle de rang n :

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^n A_m(x)$$

par la formule de Fourier. On sait qu'il est également possible de calculer d'une manière analogue les sommes partielles $\sigma_n(x)$ obtenues en appliquant à la série certains procédés de sommation, tels que ceux de Cesaro, par la formule de Fejer. On sait enfin les services qu'ont rendus les calculs effectifs de ces sommes pour la théorie de la convergence et de la sommabilité des séries de Fourier, et dans la théorie de l'approximation.

D'autres développements, généralisant ceux de Fourier, sont souvent utilisés, en Physique mathématique, en particulier ceux de la forme $\sum_0' A_m\varphi_m(x)$ où les φ_m désignent une suite de fonctions orthogonales. Dans ces cas, beaucoup plus généraux, le calcul explicite des sommes partielles analogues aux $S_n(x)$ ou aux $\sigma_n(x)$ n'est pas possible. Cependant, si l'élément $\varphi_m(x)$ est un polynome $\Pi_m(x)$, on dispose de la formule très commode, de « Darboux-Christoffel », qui

généralise directement celle de Fourier et permet de calculer immédiatement la somme partielle

$$S_n(x) = \sum_{0}^{n} A_m \Pi_m(x).$$

Il n'en est pas de même pour la somme de Fejer : il n'existe pas de formule fournissant, pour une série de la forme $\sum_{1}^{\infty} A_m \Pi_m(x)$ la valeur explicite de $\sigma_n^1(x)$ (première moyenne de Cesaro), *a fortiori* celle de $\sigma_n^p(x)$ (moyenne C, p) ($p > 1$).

Étant donné l'importance particulière du procédé de sommation de Cesaro, nous avons cherché à combler cette lacune ; et l'objet du présent Mémoire est de définir une classe de polynomes orthogonaux $\Pi_m(x)$ tels que, dans le développement $\sum_{0}^{\infty} A_m \Pi_m(x)$ d'une fonction, les sommes de Fejer soient *calculables explicitement* par une formule généralisant la formule classique de Fejer.

Cherchant à étendre le procédé introduit à un large champ de polynomes, nous avons tenté de traiter le même problème non plus pour la moyenne de Cesaro proprement dite, mais pour une moyenne de la forme $\frac{\sum_{1}^{n} \alpha_p S_p}{\sum_{1}^{n} \alpha_p}$ qui, pour certaines valeurs des α_p est équivalente à (C, 1) et peut rendre les mêmes services, soit pour l'étude de la sommabilité, soit pour celle de l'approximation.

Les polynomes $\Pi_m(x)$ ainsi obtenus se définissent par le seul fait qu'ils se *prêtent* à la réussite du calcul ; et l'intérêt de la méthode, en dehors de sa simplicité, réside, *a posteriori*, dans le fait que la classe de polynomes ainsi mise en évidence comprend tous les polynomes usuels ; ceux de Laguerre, de Legendre, de Tchebychef et de Gegenbauer. Il est à remarquer toutefois que les polynomes les plus généraux de Jacobi n'appartiennent pas à cette classe.

Généralisant enfin le calcul dans une autre direction, on a cherché si la méthode pourrait fournir aussi l'expression exacte d'une moyenne quelconque (C, p) de Cesaro pour le développement en série considéré $\sum_{1}^{\infty} A_m \Pi_m(x)$. On a de nouveau mis en évidence une famille de polynomes, naturellement plus restreinte que la précédente.

Il semble bien clair, d'après ce qui a été dit, que les conditions définissant cette classe de polynomes ne seront que des conditions suffisantes, puisqu'elles ne feront qu'exprimer le seul fait que ces polynomes *se prêtent* à la réussite de la méthode sans rien impliquer de la réussite possible d'autres procédés.

L'étude commence par l'exposé de la méthode de calcul pour le cas, parti-

culièrement simple, des séries de polynomes « de Weber-Hermite ». L'exposé dans le cas général s'en trouve allégé. Après avoir donné le principe du procédé et en avoir vérifié le fonctionnement sur des exemples, l'étude se termine par la recherche systématique de tous les polynomes répondant aux conditions requises pour que la méthode proposée soit applicable. Enfin, on montre, à titre de complément, que la méthode exposée ayant réussi pour la classe considérée de polynomes orthogonaux s'applique aussi à d'autres espèces de séries ; et l'on en donne pour exemple le développement d'une fonction de variable réelle en série de Neumann.

Le procédé ainsi introduit résout partiellement un problème dont la solution était peut-être considérée comme impossible. L'absence de cette solution n'avait pas empêché d'entreprendre l'étude de la sommabilité de ces séries, et de la pousser très loin. Il nous a semblé pourtant que l'obtention d'une formule *exacte* pourrait rendre les plus grands services et permettre en particulier de vérifier si certaines propriétés, démontrées pour les séries de Fourier, étaient spécifiques de celles-ci, ou appartenaient *aussi* à d'autres séries de fonctions orthogonales.

CHAPITRE I.

Moyennes de Cesaro d'une série de Weber-Hermite.

1. Sommation (C, 1) de la série de Weber-Hermite d'une fonction. — C'est en recherchant les sommes de Fejer relatives à une série de fonctions de Weber que la méthode nous est apparue (1) ; il est donc utile, avant de l'exposer dans le cas général, d'en montrer sur ce cas simple à la fois le principe et la pratique.

Soit $f(x)$ une fonction développée sous la forme $\sum_0^\infty A_n D_n(x)$ (2) ; la formule de récurrence relative aux fonctions D_n de Weber :

$$x D_n(x) = D_{n+1}(x) + n D_{n-1}(x) \tag{1}$$

permet de calculer immédiatement la somme partielle $S_n(x)$.

L'expression du coefficient A_n :

$$A_n = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D_n(t) f(t)\, dt$$

---

(1) *Cf.* R. Campbell, *Sur les sommations de Cesaro d'ordre entier des séries de Weber* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 596).

(2) $D_n(x)$ n'est pas exactement le polynome de Hermite, mais la fonction $e^{-\frac{x^2}{4}} He_n(x)$, pour laquelle les formules de récurrence sont plus commodes.

permet en effet d'écrire

$$(2)\quad S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G_n(x,t)}{x-t}f(t)\,dt,\qquad \text{où}\quad G_n(x,t)=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_{n+1}(x) & D_n(x)\\ D_{n+1}(t) & D_n(t)\end{vmatrix}.$$

Cette formule n'est du reste autre que celle de Darboux-Christoffel dans ce cas particulier. On peut en déduire la limite pour n infini de $S_n(x)$ grâce à la formule asymptotique d'Adamoff :

$$(3)\qquad D_n(x)=\sqrt{2}\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(x\sqrt{n}-\frac{n\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

On a ainsi, par un calcul simple et d'ailleurs classique

$$(3')\qquad S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u\sqrt{n}}{u}f(x-u)\,du$$

ou encore

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\left[f\left(x-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)+f\left(x+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right]du.$$

Cette somme $S(x)$ de la série sera justement égale à $f(x)$, dans certaines conditions qui ont été maintes fois étudiées. Une des meilleures qu'on connaisse est que la quantité $\dfrac{f(x\pm t)-f(x\pm 0)}{t}$ admette une intégrale de Lebesgue.

Remarquons que le noyau de la sommation, c'est-à-dire la quantité $\mathcal{K}(u)$ de l'expression $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{K}(u)f\left(x-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)du$ vaut ici $\dfrac{\sin u}{u}$; il est le même que pour les séries de Fourier. Comme pour celles-ci et pour la même raison, il entraîne l'existence d'un phénomène de Gibbs.

Soit à calculer la première somme de Fejer (ou la première moyenne de Cesaro)

$$\sigma_n^1(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k(x)=\frac{1}{n\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}G_k(x,t)}{x-t}f(t)\,dt.$$

La question se ramène uniquement au calcul de $\displaystyle\sum_1^{n-1}G_k(x,t)$, $\left(\text{ou de }\sum_1^{n}\right)$.

C'est ici que nous faisons intervenir une propriété des D_n qui n'a pas servi pour le calcul de S_n, à savoir que les D_n sont liés entre eux par une formule de récurrence autre que (2), et faisant intervenir leur dérivée première :

$$2D'_n(x)=nD_{n-1}(x)-D_{n+1}(x).$$

Or, la somme $\displaystyle\sum_1^n G_k(x,t)$ peut s'écrire de deux manières différentes, à savoir :

$$(4)\qquad -\frac{1}{n!}D_nD_{n+1}+\sum_0^n\frac{D_n}{n!}(D_{n+1}-nD_{n-1})+D_1D_0$$

d'une part, et

$$(4') \qquad + \frac{1}{n!}\overline{D}_n D_{n+1} - \sum_0^n \frac{D_n}{n!}(D_{n+1} - n D_{n-1}) - \overline{D}_1 D_0$$

d'autre part, en posant pour abréger

$$D_n = D_n(x), \qquad \overline{D}_n = D_n(t).$$

D'après (3), on peut écrire (4) sous la forme

$$(5) \qquad -\frac{1}{n!} D_n \overline{D}_{n+1} - \sum_1^n \frac{\overline{D}_n D'_n}{n!} + D_1 \overline{D}_0$$

et faire une transformation analogue sur (4').

Si l'on désigne alors par $\sum$ la somme $\sum_1^n G_k(x, t)$, on obtient, en ajoutant les deux expressions telles que (5) qui sont toutes deux égales à $\sum$:

$$(6) \qquad 2\sum = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_{n+1} & D_{n+1} \\ D_n & D_n \end{vmatrix} + 2\sum_1^n \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_n & D'_n \\ \overline{D}_n & \overline{D}'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_1 & \overline{D}_1 \\ D_0 & \overline{D}_0 \end{vmatrix}.$$

Le premier terme du second membre de (6) n'est autre que G_n, le problème revient donc au seul calcul du second. Pour l'effectuer, nous sommerons séparément :

$$\sum_1^n D_n \overline{D}'_n \quad \text{et} \quad \sum_1^n \overline{D}_n D'_n.$$

Pour cela, à la formule de récurrence (2) écrite avec la variable x, nous associons la formule qu'on en déduit en dérivant la même formule en t :

$$(7) \qquad \begin{cases} x D_n = D_{n+1} + n D_{n-1}, \\ t \overline{D}'_n = \overline{D}'_{n+1} + n \overline{D}'_{n-1} - D_n, \end{cases}$$

système d'où l'on déduit aussitôt, par combinaison linéaire, l'équation suivante :

$$(x - t)\frac{D_n D'_n}{n!} = H(n) - H(n-1) - \frac{D_n \overline{D}_n}{n!},$$

avec

$$H_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_{n+1} & D_n \\ \overline{D}'_{n+1} & \overline{D}'_n \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overline{H}_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \overline{D}_{n+1} & \overline{D}_n \\ D'_{n+1} & D'_n \end{vmatrix}.$$

La sommation $\sum_1^n \frac{D_n \overline{D}'_n}{n!}$ s'en déduit immédiatement puisque $\sum_1^n \frac{D_n \overline{D}_n}{n!}$ a déjà été effectuée (par la formule de Christoffel). Et de même pour la somme $\sum_1^n \frac{\overline{D}_n D'_n}{n!}$.

On obtient ainsi, pour la première somme de Fejer :

$$(8)\qquad S_n^1(x)=\sum=\sum^{n} G_k(x,t)=\frac{1}{2}G_n+\frac{H_n+\overline{H}_n-(H_0+\overline{H}_0)}{x-t}-\frac{2G_n}{(x-t)^2}.$$

On déduit immédiatement de cette expression le théorème analogue à celui de Fejer des séries de Fourier. En effet, la valeur asymptotique déjà employée de $D_n(x)$ permet de trouver immédiatement l'expression de la valeur asymptotique du noyau $\mathcal{K}_n^1(x,t)$ de la somme (C, 1), qui s'écrit :

$$(9)\quad \mathcal{K}_n^1(x,t)=\frac{1}{2}\sin\sqrt{n}(x-t)+2\sqrt{n}\frac{\cos\sqrt{n}(x-t)}{x-t}-\frac{2\sin\sqrt{n}(x-t)}{(x-t)^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

d'où l'on déduit, par un passage à la limite analogue à celui qu'on effectue pour la somme ordinaire S_n et par les mêmes changements de variables, que

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty}\sigma_n^1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u}\left[\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)\right]f\left(x-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)du.$$

Pour que cette limite soit $f(x)$, il faut et il suffit que, pour la valeur de x considérée et quel que soit ε positif :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\,\mathcal{K}_n^1(x,t)\,dt=0.$$

Telle est la condition de sommabilité (C, 1) de la série de Weber-Hermite de $f(x)$ (2).

Contrairement à ce qui se passe dans les séries de Fourier, la sommation (C, 1) ne *fait pas disparaître* le phénomène de Gibbs.

Il est d'ailleurs facile de trouver un procédé de sommation qui n'est pas celui de Fejer (mais qui a des propriétés équivalentes) et qui fait disparaître le phénomène de Gibbs.

En effet, d'après (3)′ le noyau de S_n est asymptotique à $\frac{\sin u\sqrt{n}}{u}$; donc, si l'on considère non plus la moyenne $\frac{1}{n}\sum_1^n S_k$ mais la moyenne $\tau_n=\frac{1}{n}\sum_1^n S_{k^2}$, comme $S_{k^2}\sim\frac{\sin ku}{u}$, on peut ici, pour avoir l'ordre de grandeur asymptotique de τ_n, appliquer la formule élémentaire

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

(2) *Cf.* CAMPBELL, *Sur la sommabilité et la dérivabilité de la série de Weber d'une fonction* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1951, p. 910-912).

Cette moyenne conduit donc directement à une intégrale dont le noyau $\frac{1}{u^2}\sin^2 nu$, toujours positif, ne donne plus le phénomène de Gibbs.

2. Calcul de la moyenne (C, k). — Il est maintenant facile de comprendre que l'on peut calculer de manière semblable toutes les moyennes de Cesaro de la série.

Si l'on pose en effet :

$$\begin{aligned} S_n^1 &= S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}, \\ S_n^2 &= S_0^1 + S_1^1 + \ldots + S_{n-1}^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ces moyennes ont pour numérateurs les S_n^k (les dénominateurs correspondants étant des facteurs numériques). Il suffit donc d'itérer le calcul précédent. Nous effectuons cette itération pour la sommation $(C, 2)$.

Pour calculer $\sigma_n^2 = \dfrac{\sum_1^n S_k^1}{\sum_1^n C_k^1}$, il suffit de sommer les trois termes de l'expression (8), d'où, si $x - t = u$:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (H_n + \overline{H}_n) + \frac{1}{2}\sum_1^n G_n\left(1 - \frac{4}{u^2}\right),$$

le calcul revient à la sommation $\sum_1^n (H_n + \overline{H}_n)$.

Posons pour la suite des opérations

$$H_n = H_n^1, \qquad \overline{H}_n = \overline{H}_n^1,$$

$$H_n^{(p)} = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_{n+1} & D_n \\ \overline{D}_{n+1}^{(p)} & \overline{D}_n^{(p)} \end{vmatrix}, \qquad \overline{H}_n^{(p)} = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \overline{D}_{n+1} & \overline{D}_n \\ D_{n+1}^{(p)} & D_n^{(p)} \end{vmatrix}.$$

$\sum H_n^1$ s'exprime alors sous deux formes dans le calcul de $S_n^2(x)$:

1°
$$\sum_1^n H_n^1 = \frac{1}{n!} D_{n+1}\overline{D}'_n - \sum_1^n \frac{D_n}{n!}\underbrace{(\overline{D}'_{n+1} - n\,\overline{D}'_{n-1})}_{-2\overline{D}''_n} - D_0\overline{D}'_1;$$

2°
$$\sum_1^n H_n^1 = -\frac{1}{n!} D_n\overline{D}'_{n+1} + \sum_1^n \frac{\overline{D}'_n}{n!}\underbrace{(D_{n+1} - n\,D_{n-1})}_{2D'_n} + D_1\overline{D}'_0.$$

On a ainsi à effectuer les deux espèces de sommes : $\sum D_n\overline{D}''_n$ et $\sum \overline{D}'_n D'_n$.

$\sum D_n D''_n$ se calcule en dérivant deux fois (1) comme dans l'opération (7)

$$x D_n = D_{n+1} + n D_{n-1},$$
$$t D''_n = \bar{D}''_{n+1} + n \bar{D}''_{n-1} - 2 \bar{D}'_n,$$

ce qui donne

$$(x-t)\frac{D_n D''_n}{n!} = H_n^{(2)} - H_{n-1}^{(2)} - 2\frac{D_n D'_n}{n!};$$

d'où, en n'écrivant pas les termes d'indice zéro (qui donneront, pour n grand, une contribution nulle dans la moyenne cherchée) :

$$(x-t)^3 \sum \frac{D_n \bar{D}''_n}{n!} = 2G_n - 2(x-t)H_n^{(1)} - (x-t)^2 H_n^{(2)}.$$

Quant à la somme $\sum \frac{D'_n \bar{D}'_n}{n!}$, elle s'obtient évidemment par la juxtaposition des deux formules dérivées de (2) :

$$x D'_n + D_n = D'_{n+1} + n D'_{n-1},$$
$$t \bar{D}'_n + \bar{D}_n = \bar{D}'_{n+1} + n \bar{D}'_{n-1},$$

qui donnent de la même manière, en posant $x - t = u$:

$$u^3 \sum \frac{D'_n \bar{D}'_n}{n!} = 2G_n - u(H_n^1 + \bar{H}_n^1) + 2uK_n,$$

où

$$K_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D'_{n+1} & \bar{D}'_{n+1} \\ D'_n & \bar{D}'_n \end{vmatrix},$$

il en résulte pour S_n^2 la valeur

$$S_n^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{u^2} + \frac{8}{u^4}\right)G_n + \left(\frac{1}{u} + \frac{4}{u^2}\right)(H_n^1 + \bar{H}_n^1) - \frac{1}{u^2}\left[2K_n - (H_n^{(2)} - \bar{H}_n^{(2)})\right].$$

Le noyau de la sommation (C, 2) est alors obtenu par les formules asymptotiques (9) et s'écrit

$$\mathcal{K}_n^2(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{8}{u^3}\left[\left(\frac{2}{u^2} - 1\right)\sin u - \frac{2}{u}\cos u\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{8}{u^2}\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\sin u}{u}\right).$$

La forme du noyau obtenu montre que le phénomène de Gibbs n'a pas disparu.

Remarques. — *a.* La forme asymptotique obtenue pour $\mathcal{K}_n^0$, $\mathcal{K}_n^1$, $\mathcal{K}_n^2$ incite à penser que les noyaux suivants s'expriment eux aussi très simplement à partir des dérivées successives de $\frac{\sin u}{u}$. Je ne l'ai pas démontré.

b. Il peut être avantageux d'exprimer S_n^2 en fonction de S_n^1 et de S_n^0 :

$$S_n^2 = \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{u^2}\right)S_n^0 + \left(1 - \frac{4}{u^2}\right)S_n^1 - \frac{1}{u^2}\left[2K_n - (H_n^{(2)} - \bar{H}_n^{(2)})\right].$$

Tous les $H_n^{(p)}$ et les $K_n^{(p)}$ qui figurent dans les sommes suivantes sont fonctions linéaires respectivement des $H_n^{(i)}$ et des $K_n^{(i)}$ $(i<p)$.

Les opérations auxquelles on est ramené pour effectuer les moyennes (C, p) sont toujours des sommations identiques ou analogues à celles effectuées précédemment. On peut donc expliciter chacune de ces moyennes et en déduire les noyaux $\mathcal{K}_n^{(p)}(u)$.

CHAPITRE II.

Calcul de la somme de Fejer d'un développement d'une fonction en série de polynomes orthogonaux.

Soit $\sum_0^{\infty} A_n P_n(x)$ le développement, dans un intervalle (a, b), de la fonction $f(x)$ en séries de polynomes $P_n(x)$, supposés orthogonaux et normés dans l'intervalle (a, b). Trois P_n successifs normés sont liés par la relation de récurrence

$$P_n = (A_n x + B_n) P_{n-1} - C_n P_{n-2}, \tag{1}$$

où

$$A_n > 0, \qquad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

La somme partielle du développement $S_n = \sum_0^n A_n P_n$ est obtenue sous forme explicite et quels que soient les P_n par la formule, déjà signalée de Darboux-Christoffel, qui s'écrit, dans le cas général [3] :

$$S_n(x) = \frac{1}{A_{n+1}} \int_a^b \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{x - t} f(t)\, dt. \tag{2}$$

Cherchons alors s'il existe une manière, analogue à celle employée dans (1), de calculer les premières moyennes de Cesaro. La somme $\sum_1^n S_r$, numérateur de la moyenne $(C, 1)$, s'écrit des deux façons suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &- \frac{1}{A_{n+1}} P_n \bar{P}_{n+1} + \sum_0^n \bar{P}_r \left[\frac{P_{r+1}}{A_{r+1}} - \frac{P_{r-1}}{A_r}\right] + \frac{1}{A_1} P_1 \bar{P}_0, \\ &+ \frac{1}{A_{n+1}} \bar{P}_n P_{n+1} - \sum_0^n P_r \left[\frac{\bar{P}_{r+1}}{A_{r+1}} - \frac{\bar{P}_{r-1}}{A_r}\right] - \frac{1}{A_1} P_1 P_0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[en posant, comme au chapitre I : $P_n(x) = P_n$, $P_n(t) = \bar{P}_n$].

([3]) *Cf.* Szegö, p. 41.

C'est ici, rappelons-le, que, dans le chapitre précédent, on avait fait intervenir une deuxième relation de récurrence entre les D_n. Si une telle seconde relation n'a pas lieu, les deux sommations précédentes ne s'effectuent pas, c'est-à-dire n'admettent pas d'expression plus simple que celle même sous laquelle elles sont écrites.

Or, dans le cas d'une série de polynomes $P_n(x)$ orthogonaux et normés *quelconques*, une telle « *seconde relation* » n'existe pas. Dans le cas général, la moyenne (C, 1) n'a donc pas d'expression « simple » analogue à celle trouvée pour les fonctions de Weber-Hermite; mais si l'on suppose, au contraire, que, comme dans le cas des D_n, les polynomes P_n sont liés à leurs dérivées par une relation telle que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x, n) \frac{d^k}{dx^k} P_{n-1}(x), \tag{4}$$

alors un calcul analogue à celui qu'on vient d'exposer dans (1) est possible, comme on va le voir, du moins pour certaines formes de $\varphi_k(x, n)$, ces formes ayant lieu pour presque tous les polynomes usuels, où il suffit d'ailleurs toujours de prendre $k=1$. C'est ce qu'on supposera dans la suite, pour se limiter aux polynomes orthogonaux habituellement employés.

La relation (4) sera alors prise sous la forme

$$P_n(x) = f_n(x) P_{n-1}(x) - g_n(x) P'_{n-1}(x). \tag{4'}$$

Nous rappelons sur le tableau ci-joint les expressions de $f_n(x)$ et $g_n(x)$ dans les cas usuels (*cf.* p. 410).

Une telle relation permet de réduire les quantités $\sum_0^n$ qui figurent dans (3) à ne porter que sur le *seul* indice r (les indices $r+1$ et $r-1$ n'y figurant pas). On n'a ainsi à sommer que les produits tels que

$$\sum_0^n P_r(x) P_r(t), \qquad \sum_0^n P_r(x) P'_r(t).$$

Or, on obtient grâce à (1) et (4') :

$$\begin{cases} \dfrac{P_{r+1}}{A_{r+1}} = \dfrac{1}{A_{r+1}} [A_{r+1} x + B_{r+1}] P_r - \dfrac{P_{r-1}}{A_r}, \\ \dfrac{P_{r-1}}{A_r} = \dfrac{1}{A_{r+1}} [(A_{r+1} x + B_{r+1} - f_{r+1}) P_r + g_{r+1} P'_r]. \end{cases} \tag{5}$$

En tenant compte de (4'), l'une des sommes $\sum_0^n$ qui figurent dans (3) devient

$$\sum_{r=0}^{n} P_r(t) [U_r(x) P_r(x) - V_r(x) P'_r(x)],$$

où l'on a posé

$$(6)\qquad \begin{cases} U_r(x) = 2\dfrac{f_r(x)}{A_r} - \left(x + \dfrac{B_r}{A_r}\right), \\ V_r(x) = 2\dfrac{\varphi_r(x)}{A_r}. \end{cases}$$

Ainsi le problème se ramène à effectuer les nouvelles sommes $\sum_0^n U_r P_r \overline{P}_r$ et $\sum_0^n V_r \overline{P}_r P'_r$ qui sont immédiatement calculables par le procédé employé dans (1), *chaque fois que* U_r *et* V_r *ne dépendent pas de* r.

Il est facile de vérifier que cette condition définit une classe de polynomes orthogonaux à laquelle appartiennent ceux de Laguerre (et évidemment ceux de Weber-Hermite).

La somme $\sum P_r \overline{P}_r$ déjà calculée est fournie par (2) et la somme $\sum \overline{P}_r P'_r$ $\left(\text{ou } \sum P_r \overline{P}'_r\right)$ se calcule en associant à (1) écrite en x la formule dérivée écrite en t :

$$(7)\qquad \begin{cases} (A_{r+1}x + B_{r+1})P_r = P_{r+1} + \dfrac{A_{r+1}}{A_r} P_{r-1}, \\ (A_{r+1}t + B_{r+1})\overline{P}'_r = \overline{P}'_{r+1} + \dfrac{A_{r+1}}{A_r}\overline{P}'_{r-1} - A_{r+1}\overline{P}_r, \end{cases}$$

système d'où l'on tire par combinaison linéaire :

$$(8)\qquad (x-t)P_r P'_r = \Delta_{r+1}(x, t) - \Delta_r(x, t),$$

où

$$(8')\qquad \Delta_r = \frac{1}{A_r}\begin{vmatrix} P_{r-1} & P'_{r-1} \\ P_r & \overline{P}'_r \end{vmatrix},$$

la somme $\sum_0^n P_r \overline{P}'_r$ s'en déduit aussitôt.

On en déduit la première moyenne de Cesaro $\sigma_n^1(x)$ grâce à la demi-somme effectuée des expressions (3) :

$$(9)\qquad \sigma_n^1(x) = \frac{1}{n+1}\sum_0^n S_r(x) = \frac{1}{n+1}\int_a^b \frac{\Sigma_n^1(x, t)}{x-t} f(t)\,dt,$$

U_r et V_r, $\overline{U}_r$ et $\overline{V}_r$ ne dépendant pas de r, on peut supprimer l'indice; en ce cas l'expression de Σ_n^1 s'écrit

$$(10)\qquad 2\Sigma_n^1 = \left[1 + \frac{U-\overline{U}}{x-t} - \frac{V+\overline{V}}{(x-t)^2}\right]\Sigma_n^0 - \frac{V[\Delta_{n+1} - \Delta_0] + \overline{V}[\overline{\Delta}_{n+1} - \overline{\Delta}_0]}{x-t} + \Sigma_1^0,$$

Σ_n^0 désigne lui-même $\frac{1}{A_{n+1}}\left(P_{n+1}\overline{P}_n - \overline{P}_{n+1}P_n\right)$, c'est-à-dire l'expression même

qu'on rencontre dans la formule donnant la somme ordinaire (Darboux-Christoffel), puisque

$$(11) \qquad S_n(x) = \sigma_n^0(x) = \sum_0^n A_r P_r(x) = \int_a^b \frac{\Sigma_n^0(x, t)}{x - t} f(t)\, dt.$$

Applications : Cas du développement d'une fonction en séries de polynomes de Hermite et de Laguerre. — A. *Polynomes de Hermite.* — Dans le chapitre I, on a traité le cas du développement d'une fonction en série de fonctions de Weber; ces fonctions sont liées très simplement aux polynomes de Hermite par la relation

$$(12) \qquad D_n(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \sqrt{n!}\, \mathcal{H}_n(x),$$

$\mathcal{H}_n$ étant le polynome normé de Hermite satisfaisant, par conséquent, aux deux relations (1) et (4') précédentes où

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad B_n = 0, \qquad f_n = \frac{x}{\sqrt{n}}, \qquad g_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On a alors $U = x$, $\overline{U} = t$, $V = \overline{V} = 1$, et le noyau Σ_n^1 de la moyenne (C, 1) s'écrit

$$(13) \qquad \Sigma_n^1 = \left[1 - \frac{1}{(x-t)^2}\right] \Sigma_n^0 - \frac{1}{2(x-t)} \left[\overline{\Delta}_{n+1} + \Delta_{n+1} - (\overline{\Delta}_0 + \Delta_0)\right].$$

Si l'on se reporte à la formule (8), on y constate que le coefficient de G_n n'est plus ici exactement le même, ce qui a pour effet de modifier le coefficient $\frac{1}{2} \sin \sqrt{n}(x-t)$ du premier terme de (10) (chap. I); mais ce terme ne donne aucune contribution, quand $n \to \infty$, dans la formule asymptotique (11), qui ainsi est encore valable telle quelle, et fournit le noyau de sommation d'une fonction $g(x)$ [fonction qui n'est pas soumise aux mêmes conditions qu'au chapitre I, à cause de la présence du facteur $e^{-\frac{x^2}{4}}$ de (12)]. Ainsi sous des conditions plus larges que celles données par Uspensky et Kowallik (4) et sur lesquelles nous n'insisterons pas ici, on a encore en remplaçant f par g, l'égalité asymptotique (11) (chap. I).

B. *Polynomes de Laguerre.* — Le polynome de Laguerre normé $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ satisfait à (1) et (4') où

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+\alpha)}}, \qquad B_n = (2n + \alpha - 1) A_n;$$

$$f_n = (-x + n + \alpha) A_n, \qquad g_n = -A_n x;$$

d'où

$$U = -3x + 1, \qquad V = -x.$$

(4) *Cf.* Szegö, p. 200 (th. 9.1.16).

La somme ordinaire partielle d'ordre n s'écrit [*cf.* formule (2)]

$$S_n(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha K_n^\alpha(x, t) f(t)\, dt, \tag{14}$$

K_n^α étant le noyau de Christoffel. En désignant par L_n^α le polynome de Laguerre habituel non normé et lié à $\mathcal{L}_n^\alpha$ par

$$\sqrt{\Gamma(n+\alpha+1)}\,\mathcal{L}_n^\alpha = \sqrt{n!}\,L_n^\alpha \qquad (\alpha > -1).$$

On a la formule asymptotique connue

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left[2\sqrt{nx} - \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \quad (5) \tag{15}$$

qui, en utilisant commodément la relation $L_n^\alpha = L_{n+1}^\alpha - L_{n-1}^{\alpha-1}$ permet d'écrire le noyau sous la forme

$$K_n^\alpha(x, t) = \frac{R(x, t)}{x-t}\left[\sqrt{x}\sin X\cos T - \sqrt{t}\sin T\cos X + O(1)\right].$$

où

$$R(x, t) = \frac{1}{\pi} n^{\alpha-\frac{1}{2}} (xt)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}(x+t)} \begin{cases} X = 2\sqrt{nx} - \left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{4}\right)\pi, \\ T = 2\sqrt{nt} - \left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{4}\right)\pi. \end{cases}$$

Le crochet se calcule facilement en transformant les produits trigonométriques en sommes, on obtient alors

$$K_n^\alpha(x, t) = R(x, t)\left[\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}+\sqrt{t}) - \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi}{\sqrt{x}+\sqrt{t}} - \frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{x}-\sqrt{t}} + O(1)\right].$$

Le premier terme dans le calcul de l'intégrale (14) donnera une contribution tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. L'autre fournira à lui seul le noyau de la sommation. Si l'on y pose $2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t}) = u$, et qu'on fasse rentrer les quantités de la forme $e^{-t}t^\alpha$ dans la fonction $f(t)$ à développer [qu'on écrira, ainsi modifiée, $g(t)$], on obtient alors le même noyau que pour les fonctions de Weber du chapitre I, à savoir $\frac{1}{u}\sin u$.

D'où l'égalité asymptotique

$$S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} g(t)\,\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{x}-\sqrt{t}}\,dt, \tag{16}$$

(5) *Cf.* Szegö, p. 231 (th. 8.8.3).

mais comme, alors

$$\sqrt{t} = \sqrt{x} - \frac{u}{2\sqrt{n}}, \qquad \text{où} \quad t = x + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right);$$

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \to \infty} \int_0^z g\left(x - u\sqrt{\frac{x}{n} + \frac{u^2}{4n}}\right) \sin u \frac{du}{u}.$$

On retrouve le théorème d'équiconvergence pour les séries de Laguerre ([6]).

Pour le calcul du noyau de la sommation (C, 1) on pratique de manière très analogue. Pour calculer Δ_r de (8'), on utilise encore la relation

$$L_n^\alpha = L_{n+1}^\alpha - L_{n+1}^{\alpha-1}$$

et l'équation dérivée de celle-ci. On utilise par ailleurs la formule asymptotique :

$$-\frac{dL_n^\alpha}{d(\sqrt{x})} = \frac{2}{\pi} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}} \sin X$$

qui permet d'écrire Δ_r sous la forme

$$\Delta_r = \frac{1}{\pi} (xt)^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}} e^{\frac{x+t}{2}} \sqrt{t} \left[\sqrt{t} \sin X \sin T + \sqrt{x} \cos X \cos T\right].$$

Le deuxième terme de (10) où interviennent les Δ_r se compose alors de deux parties qui sont (en omettant désormais la partie symétrique en x et t qui figure devant le crochet) :

1° $\frac{1}{2}\sqrt{tx}\,\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{t})^2 \cos(X-T)}{x-t}$; portée sous le signe intégral de (9) cette quantité, divisée une fois de plus par $(x-t)$ peut s'écrire

$$(17) \qquad \frac{1}{2}\sqrt{tx}\,\frac{\cos 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{(\sqrt{x}-\sqrt{t})^2};$$

2° $\frac{1}{2}\sqrt{tx}\,\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{t})^2 \cos(X+T)}{x-t}$ qui donnera dans l'intégrale de (9) une contribution nulle à la limite (Riemann-Lebesgue).

Le seul terme effectif qui reste est donc le terme (17); quant au premier terme de Σ_n^1 [*cf.* expression (10)] et qui comprend trois parties, les deux premières sont constantes puisque $U = -3x$ et fournissent dans (9) une contribution nulle à la limite, pour la même raison que dans le chapitre I [calcul du noyau (10) des séries de Weber]. Le terme $\frac{V+\bar{V}}{(x-t)^2}\,\Sigma_n^0$ s'écrit ici $\frac{x+t}{(x-t)^2}\,\Sigma_n^0$. Or, l'expression asymptotique de Σ_n^0 a été calculée ci-dessus et vaut

$$(x-t)\,\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{x}-\sqrt{t}}.$$

([6]) *Cf.* Szegö, p. 240.

Dans l'intégrale (9) la quantité est à diviser encore une fois par $(x-t)$ et fournit une contribution égale à

$$\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})\frac{x+t}{(x-t)^2(\sqrt{x}-\sqrt{t})} \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{t}}\frac{(x+t)\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{(\sqrt{x}+\sqrt{t})^2(\sqrt{x}-\sqrt{t})^2}.$$

En posant encore $2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})=u$ et en se rappelant que $t=x+0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ on réalise que si $n\to\infty$, le rapport $\frac{x+t}{(\sqrt{x}+\sqrt{t})^2}$ tend vers 1, et le noyau s'écrit encore asymptotiquement $\frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)$; il est, ainsi, encore le même que pour les séries de Weber-Hermite.

CHAPITRE III.

Généralisation du calcul précédent a une catégorie plus générale de polynomes et détermination de ceux-ci.

On peut généraliser de manière très simple le mode précédent de calcul à une famille plus générale de polynomes; si l'on ne s'impose plus de calculer précisément une moyenne de Cesaro ou une somme de Fejer, mais seulement une moyenne analogue de la forme $m_n=\frac{\sum_0^n \alpha_r S_r}{\sum_0^n \alpha_r}$ (pour les sommes de Fejer les $\alpha_r=1$).

Du point de vue de la convergence et de l'approximation, ces moyennes peuvent rendre les mêmes services, pour certaines formes des α_r, que les moyennes (C, 1).

Il est donc intéressant de chercher si, pour un choix convenable des coefficients α_r, un calcul analogue à celui qui a été effectué au chapitre II n'est pas possible. Tel est l'objet de ce nouveau chapitre qui sera conduit un peu autrement. Ici, en effet, non seulement nous avons à chercher une méthode de calcul qui nous fournisse explicitement les moyennes en question, mais il nous faut déterminer si, d'abord, ces nouveaux coefficients α_r existent, ensuite si leur calcul effectif est possible, et enfin, quels sont les polynomes orthogonaux correspondant aux cas d'existence de ces α_r.

Nous reprenons, tout d'abord, le calcul exposé au début du chapitre II; nous calculons m_n à partir de la formule (2) (chap. II); le numérateur de cette quan-

tité se met sous deux formes voisines, analogues à (3). On suppose toujours, bien entendu, que l'hypothèse (4) est satisfaite, les formules (5) sont valables telles quelles et conduisent pour $\sum_{0}^{n} \alpha_r S_r$ à une expression telle que (6). C'est ici que le calcul commence à se distinguer de l'autre [*cf.* chap. II, (10)] car les expressions des quantités U_r et V_r font intervenir les α_r; ces quantités s'écrivent ici :

$$(1)\qquad \begin{cases} U_r(x) = \dfrac{\beta_r}{A_r} f_r(x) - \alpha_{r-1}(x + u_r), \\ V_r(x) = \dfrac{\beta_r}{A_r} g_r(x), \end{cases}$$

où

$$\beta_r = \alpha_r + \alpha_{r-1}, \qquad u_r = \frac{B_r}{A_r}.$$

Pour que notre calcul soit possible, les deux nouvelles conditions [analogues aux conditions (6')] sont que U_r et V_r soient indépendantes de r. Notons que les α_r sont *essentiellement* fonctions de r sans quoi on serait dans le cas du chapitre II.

Étant donné une suite normée de polynomes orthogonaux, il s'agira donc de trouver des coefficients α_r tels que les conditions (1) soient satisfaites. Nous nous proposons de déterminer *toutes* les suites de polynomes orthonormés pour lesquels il pourra en être ainsi, c'est-à-dire pour lesquelles toute moyennne m_n sera explicitable. Cette recherche nous mènera également en même temps à la détermination de tous les polynomes se prêtant au calcul des sommes particulières de Fejer (ce seront tous ceux pour lesquels les α_r sont des constantes).

Désignons donc par $\Pi_n(x)$ un polynome orthogonal de la classe cherchée. Tout $\Pi_n(x)$ devra d'abord, selon notre hypothèse initiale, satisfaire à une relation de la forme (4') soit

$$(2)\qquad \Pi_n = f_n \Pi_{n-1} - g_n \Pi'_{n-1}$$

comme on a toujours par ailleurs

$$(3)\qquad \Pi_n = (A_n x + B_n)\,\Pi_{n-1} - C_n \Pi_{n-2},$$

on tire, en dérivant (3) et posant $A_n x + B_n = l_n$:

$$(3')\qquad \Pi'_n = l_{n-1}\Pi'_{n-1} - C_{n-1}\Pi'_{n-2} + A_{n-1}\Pi_{n-1},$$

d'où l'on peut grâce à (2) éliminer les dérivées. On aura alors une relation entre Π_{n+1}, Π_n, Π_{n-1}, Π_{n-2} d'où l'on pourra éliminer Π_{n+1} grâce à (3).

On obtient ainsi

$$(4)\qquad \Pi_n\left[\frac{f_{n+1} - l_{n+1}}{g_{n+1}} + \frac{l_n}{g_n}\right] = \Pi_{n-1}\left[\frac{l_n f_n}{g_n} + \frac{C_n}{g_{n-1}} - \frac{C_{n+1}}{g_{n+1}} + A_n\right] - C_n \frac{f_{n-1}}{g_{n-2}}\Pi_{n-2}.$$

Cette relation (4) ne doit pas être distincte de (3), relation générale des polynomes orthogonaux; il en résulte deux conditions

$$\frac{l_n}{g_n} - \frac{l_{n+1}}{g_{n+1}} = \frac{f_{n-1}}{g_{n-1}} - \frac{f_{n+1}}{g_{n+1}}; \tag{5}$$

$$\frac{l_n f_n}{g_n} + \frac{C_n}{g_{n-1}} - \frac{C_{n+1}}{g_{n+1}} + A_n = \frac{l_n^2}{g_n} + l_n\left[\frac{f_{n+1} - l_{n+1}}{g_{n+1}}\right]. \tag{6}$$

Pour le problème particulier que nous nous sommes proposé de résoudre, il est préférable de remplacer (5) et (6) par (5′) et (6′) qui en sont des combinaisons linéaires :

$$\frac{l_{n+1} - f_{n+1}}{g_{n+1}} - \frac{f_n}{g_n} = \frac{l_n - f_n}{g_n} - \frac{f_{n-1}}{g_{n-1}} = \ldots = \frac{l_1 - f_1}{g_1} - \frac{f_0}{g_0}, \tag{5′}$$

$$\frac{(l_{n+1} - f_{n+1}) f_n - C_{n+1}}{g_{n+1}} - \frac{(l_n - f_n) f_{n-1} - C_n}{g_{n-1}} + A_n = 0. \tag{6′}$$

Nous n'avons pas à résoudre ces équations fonctionnelles dans le cas général, mais seulement dans le cas où f_r et g_r ont les formes données par (1), qui sont nécessaires à l'application de notre méthode de sommation.

(5′) montre que la quantité $\frac{l_r - f_r}{g_r} - \frac{f_{r-1}}{g_{r-1}}$ ne dépend pas de r [soit $\varphi(x)$].

Quand on substitue à f_r et g_r leurs expressions (1), (5′) devient :

$$x[\alpha_r - \alpha_{r-2}] + \alpha_r u_r - \alpha_{r-2} u_{r-1} = \psi(x). \tag{7}$$

où $\psi(x)$, indépendant de r, signifie $V(x)\varphi(x) + 2U(x)$.

(7) montre aussitôt que $\psi(x)$ doit se réduire, dans notre cas, à une fonction linéaire dont les coefficients sont indépendants de r, d'où les deux équations fonctionnelles :

$$\alpha_r - \alpha_{r-2} = C_1, \tag{8}$$

$$\alpha_r u_r - \alpha_{r-2} u_{r-1} = C_2. \tag{9}$$

(8) exprime un fait remarquable, c'est que les coefficients α_r ne sont liés que de deux en deux et qu'ils sont des fonctions linéaires de r. On peut donc poser par exemple,

$$\alpha_r = \begin{cases} \lambda r + \mu & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \lambda r + \mu' & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, examinons le cas particulièrement simple où les α_r sont des constantes; on peut alors retomber sur le cas ou l'on explicite la moyenne (C, 1), mais on peut aussi avoir d'autres moyennes, puisque μ et μ' peuvent être différents; on pourra même envisager des cas où tous les α_r d'indices pairs par exemple, sont nuls.

Dans le cas, très important, où tous les α_r sont égaux, alors dans (8)

$C_1 = 0$; (9) montre que U_r est soit constant, soit linéaire en r; (1) donne alors pour f_r et g_r :

$$2\frac{f_r}{A_r} = U + x + u_r, \qquad 2\frac{g_r}{A_r} = V.$$

La relation (6′) qui n'a pas encore été utilisée s'écrit alors :

$$(10) \qquad U[(u_{r+1} - u_r) - (u_r - u_{r-1})] + \frac{1}{2}(x + u_r)(u_{r+1} - u_{r-1}) + \frac{2}{A_{r-1}^2} - \frac{2}{A_r^2} + V = 0.$$

a. Si u_r est constant, $U(x)$ est arbitraire en x, donc f_r aussi, $V(x)$ est constante ainsi que $g(x)$,

$$\frac{1}{A_{r-1}^2} - \frac{1}{A_r^2} = \text{const.},$$

$\frac{1}{A_r^2}$ est une fonction linéaire de r, ou une constante.

Exemple :

$$\frac{1}{A_r^2} = r \qquad \text{(Polynomes de Hermite)}.$$

b. Si u_r est effectivement linéaire en r, soit $u_r = hr + k$, U est encore quelconque, mais V est linéaire en x, comme g. $\frac{1}{A_{r-1}^2} - \frac{1}{A_r^2}$ est linéaire en r, $\frac{1}{A_r^2}$ est un trinome du second degré en r.

Exemple :

$$\frac{1}{A_r^2} = r(r+q) \qquad \text{(Polynomes de Laguerre)},$$

Ces deux exemples sont ceux pour lesquels on a déjà effectué en effet les sommes partielles de Fejer dans les chapitres I et II.

Cherchons maintenant à déterminer d'autres familles de Π_n pour lesquelles les α_r diffèrent. On sait que α_r est linéaire en r, soit $\alpha_r = \lambda r + \mu$ (μ pouvant varier avec la parité de r).

Pour commencer, supposons que μ soit invariant avec cette parité. Comme λ n'est pas nul, la relation (9) peut s'écrire ($r = 1, 2, \ldots$)

$$(9') \qquad (r+q)u_r - (r+q-2)u_{r-1} = Q.$$

Nous cherchons d'abord la solution de cette équation de récurrence dans le cas où $Q = 0$, elle est évidemment

$$u_r = \frac{\text{const.}}{(r+q)(r+q-1)}.$$

Pour avoir la solution de l'équation avec $Q \neq 0$, on pose

$$u_r = \frac{\Phi(r)}{(r+q)(r+q-1)}.$$

(9′) détermine $\Phi(r)$ par la relation

$$\Phi(r)-\Phi(r-1)=(r+q-1)\,Q,$$

d'où

$$\Phi(r)=\left[\frac{r^2}{2}+(q-1)\frac{r}{2}+C\right]Q,$$

u_r est donc le quotient, mais *non le quotient le plus général*, de deux trinomes du second degré. On vérifie aisément que les polynomes de Legendre, de Gegenbauer, de Tchebychef ont un u_r de la forme précédente. Ceux de Jacobi vérifient la condition si $\alpha+\beta=2$. Les polynomes introduits récemment par MM. Pollaczek et Szegö, pour lesquels u_r est le quotient de deux trinomes en r, ne répondent pas à cette définition.

Supposons maintenant que μ varie avec la parité de r. La solution de (9′), sans second membre est alors

$$u_r=\frac{\text{const.}}{(r+q)(r+q')}.$$

En éliminant u_{r-1} entre deux équations successives (9′) où le second membre n'est pas nul, on obtient

$$(r+q)(r+q')u_r-(r+q-2)(r+q'-2)u_{r-2}=(2r+q+q'-2)Q,$$

d'où

$$(10')\qquad (r+q)(r+q')u_r=\begin{cases}\dfrac{Q}{2}r[(r+2)+q+q'-2]+\text{const.} & \text{si } r \text{ est pair,}\\[2ex] \dfrac{Q}{2}(r+1)[r+1+q+q'-2]+\text{const.} & \text{si } r \text{ est impair.}\end{cases}$$

En particulier si les α_r sont une suite de nombres prenant alternativement deux valeurs μ et μ', u_r est une fonction linéaire de r.

Si l'une de ces valeurs est nulle, le calcul précédent n'est pas valable, mais il est clair qu'alors $u_r=(-1)^r$ à un facteur près. Aucun polynome usuel ne rentre dans cette classe.

Les conditions trouvées ne sont pas suffisantes puisque la relation (6′) n'a pas encore été alléguée. On va voir qu'elle fournit les fonctions f_r et g_r ainsi que la suite des A_r.

(6′) s'écrit, après avoir posé $\frac{\beta_r}{A_r}=p_r$, $\frac{\alpha_{r-1}}{A_r}=q_r$, et utilisé (1) :

$$(11)\qquad p_{r+1}\left[\left(l_{r+1}-\frac{U+q_{r+1}l_{r+1}}{p_{r+1}}\right)\frac{U+q_rl_r}{p_r}-\frac{A_{r+1}}{A_r}\right]$$
$$=p_{r-1}\left[\left(l_r-\frac{U+q_rl_r}{p_r}\right)\frac{U+q_{r-1}l_{r-1}}{p_{r-1}}-\frac{A_r}{A_{r-1}}\right]-A_rV,$$

soit, le terme en U^2 disparaissant :

$$U[p_{r+1}l_{r+1}-p_rl_r+q_{r-1}l_{r-1}-q_{r+1}l_{r+1}]+p_{r+1}l_{r+1}q_rl_r-p_rl_rq_{r+1}l_{-1r}$$
$$+q_rl_r(q_{r-1}l_{r-1}-q_{r+1}l_{r+1})+p_r\left(p_{r-1}\frac{A_r}{A_{r-1}}-p_{r+1}\frac{A_{r+1}}{A_r}\right)+A_rp_rV=0.$$

ou en revenant aux notations primitives :

$$(11') \quad \begin{aligned} &U\{x[\alpha_{r+1}-\alpha_{r-1})-(\alpha_r-\alpha_{r-2})]+(\alpha_{r+1}u_{r+1}-\alpha_{r-1}u_r)-(\alpha_r u_r-\alpha_{r-2}u_{r-1})\\ &+(x+u_r)[(x+u_{r+1})\alpha_{r+1}\alpha_{r-1}-(x+u_{r-1})\alpha_r\alpha_{r-2}]\\ &+\frac{\beta_r\beta_{r-1}}{A_{r-1}^2}-\frac{\beta_r\beta_{r+1}}{A_r^2}+\beta_r V=0. \end{aligned}$$

Le coefficient de U est nul et la relation précédente est de la forme

$$x^2 H_2(r)+xH_3(r)+H_4(r)=V(x).$$

Puisque la relation est vraie pour tout x, il est possible d'en trouver trois valeurs x_1, x_2, x_3, telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_i^2 & x_i & 1 \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul, c'est-à-dire qu'il est alors possible de résoudre le système des 3 équations ainsi obtenu, les inconnues étant les $H_j(r)$. Ces valeurs obtenues étant uniques, les H_j ne sont pas fonctions de r. Ainsi tous les coefficients précédents sont des constantes en r. Les coefficients H_1, H_2, H_3, constants en r, sont constants. Il en résulte que

$$(12) \qquad \alpha_{r+1}\alpha_{r-1}-\alpha_r\alpha_{r-2}=C_1\beta_r \qquad \text{(terme en } x^2),$$

$$(13) \qquad \alpha_{r+1}\alpha_{r-1}(u_r+u_{r+1})-\alpha_r\alpha_{r-2}(u_r+u_{r-1})=C_2\beta_r \qquad \text{(terme en } x);$$

$$(14) \qquad \frac{1}{\beta_r}(\alpha_{r+1}\alpha_{r-1}u_r u_{r+1}-\alpha_r\alpha_{r-2}u_r u_{r-1})+\frac{\beta_{r-1}}{A_{r-1}^2}-\frac{\beta_{r+1}}{A_r^2}=C_3 \qquad \text{(terme constant)}.$$

et $V(x)$ est un trinome du second degré en x.

(12) montre que $C_1=1$, (13) que $C_2=Q$.

(14) fournit la valeur de A_r et s'écrit :

$$\frac{\beta_{r-1}}{A_{r-1}^2}-\frac{\beta_{r+1}}{A_r^2}=C_3+(1-Q)u_r.$$

Les polynomes usuels satisfont à cette relation, sauf ceux de Jacobi, qui satisfaisaient à (10) quand $\alpha+\beta=2$, mais ne satisfont à (14) que si $\alpha=\beta$ (ils sont alors de Gegenbauer) (*cf.* tableau ci-joint). Connaissant A_r et B_r, on peut alors écrire, l'expression du polynome orthonormé sous forme de déterminant (1) :

$$P_n(x)=p_0(x)\begin{vmatrix} A_1x+B_1 & \sqrt{C_2} & 0 & \dots & 0\\ \sqrt{C_2} & A_2x+B_2 & \sqrt{C_3} & \dots & 0\\ 0 & \sqrt{C_3} & A_3x+B_3 & \dots & 0\\ \cdot & \cdots & \cdots\cdots & \dots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_nx+B_n \end{vmatrix}.$$

(1) *Cf.* Szegö, p. 368 (exemple 6).

Application. — On peut appliquer la méthode qui vient d'être exposée aux polynomes de Legendre, de Tchebychef et de Gegenbauer. Ces derniers, plus habituellement dénommés ultrasphériques contenant les deux autres comme cas particuliers, c'est à eux que nous appliquerons directement le procédé. Nous prenons la notation de Gegenbauer $C_n^\nu(x)$ liée à celle de Jacobi par

$$C_n^\nu(x) = P_n^{\nu-\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}}(x).$$

Les déterminants intervenant dans les calculs et dont certains contiennent les dérivées des C_n^ν seront simplifiées grâce à la formule

$$\frac{dC_n^\nu(x)}{dx} = 2\nu\, C_{n-1}^{\nu+1}(x),$$

leurs valeurs asymptotiques seront déterminées par la formule,

$$C_n^\nu(\cos\theta) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^\nu \sin^{-\nu}\theta}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos\left[(n+\nu)\theta - \frac{\nu\pi}{2}\right]}{\sqrt{n}}.$$

Rappelons que le polynome correspondant orthonormé vaut

$$G_n^\nu = \left[\frac{(n+\nu)\,n!}{\Gamma(n+2\nu)}\right]^{\frac{1}{2}} C_n^\nu$$

et que

$$B_n = 0 \qquad \text{et} \qquad A_n = 2\sqrt{\frac{(n+\nu)(n+\nu-1)}{n(n+2\nu-1)}}.$$

On retrouve facilement le noyau de la somme ordinaire, connu dans le cas le plus général des $P_n^{\alpha,\beta}$ (8) et qui est ici, à un facteur près, en posant

$$x = \cos\varphi, \qquad t = \cos\theta$$

et en faisant éventuellement entrer dans la fonction à développer des termes en x et t :

$$N_1(\theta,\varphi) = \frac{\sin\left[\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)(\varphi+\theta) - \nu\pi\right]}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}} + \frac{\sin\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\theta)}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}.$$

Asymptotiquement, le premier de ces termes tendant vers zéro, si

$$\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\theta) = u,$$

le noyau de la sommation est encore $\frac{\sin u}{u}$. Pour la « pseudo somme » de Fejer

(8) *Cf.* SZEGÖ, p. 247-248.

$\left(\text{avec } \alpha_r = r + \nu + \frac{1}{2}\right)$ la même méthode donne respectivement pour le premier des termes de la formule (10) du chapitre II :

$$2\left[\frac{3}{2} + \nu - \frac{\sin^2\theta + \sin^2\varphi}{(\cos\theta + \cos\varphi)^2}\right] \sin\frac{\theta+\varphi}{2} \sin\left(n + \nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\varphi - \theta}{2}$$

et pour le terme en $V\left(\Delta_{n+1} + \bar{\Delta}_{n+1}\right)$ de la même formule (10)

$$\nu \frac{\cos\left(n + \nu + \frac{1}{2}\right)(\varphi - \theta)}{\sin\frac{\varphi - \theta}{2}}.$$

En faisant tendre n vers l'infini et avec la même notation, le noyau de la moyenne m_n est encore, *pour les polynomes normés* : $\frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)$.

Ce noyau est donc valable pour toutes les sommes (ou « pseudo-sommes » de Fejer) des séries de polynomes usuels considérés.

	Hermite.	Laguerre.	Gegenbauer.	Legendre.	Tchebychef.
A_n.....	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n(n+\alpha)}}$	$2\sqrt{\frac{(n+\nu)(n+\nu-1)}{n(n+2\nu-1)}}$	$\frac{1}{n}\sqrt{4n^2-1}$	2
$\frac{B_n}{A_n}$.....	0	$2n+\alpha-1$	0	0	0
$\frac{f_n}{A_n}$.....	x	$-x+n+\alpha$	$\frac{(n+2\nu-1)x}{2(n+\nu-1)}$	$\frac{nx}{2n-1}$	$\frac{x}{2}$
$\frac{g_n}{A_n}$.....	1	$-x$	$\frac{1-x^2}{2(n+\nu-1)}$	$\frac{1-x^2}{2n-1}$	$\frac{1-x^2}{2(n-1)}$
α_n.....	1	1	$n+\nu-\frac{1}{2}$	n	$n-\frac{1}{2}$
U.....	x	$-3x+\alpha+1$	$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x$	x	$\frac{x}{2}$
V.....	2	$-2x$	$1-x^2$	$1-x^2$	$1-x^2$

CHAPITRE IV.

Moyennes d'ordre supérieur.

On a calculé explicitement dans le chapitre I la moyenne (C, 2) d'un développement en série de Weber-Hermite, et l'on a montré la possibilité de généraliser le procédé au calcul explicite d'une moyenne de Cesaro d'ordre quelconque. Il reste à examiner si le procédé employé se généralise pour d'autres séries de polynomes orthonormés et dans quels cas.

Pour le calcul plus général des moyennes m_n considérées au chapitre III, le problème est moins intéressant, car les moyennes successives, même en choisissant à chaque nouvelle opération de nouveaux α_r, sont toutes de la forme $\frac{\sum \lambda_r S_r}{\sum \lambda_r}$; on verra, du reste, que l'itération du calcul n'est praticable effectivement que dans le cas des véritables moyennes de Cesaro.

Soit à calculer la deuxième moyenne σ_n^2 de Cesaro; en se reportant à la formule (11) (chap. II), on voit qu'il s'agit de sommer :

1° Σ_n^0, ce qui a été déjà fait.

2° Les quantités Δ_{n+1} et $\Delta_{n+\frac{1}{2}}$: Pour Δ_{n+1} par exemple, il suffit d'appliquer deux fois la relation (4′) pour obtenir

$$(1)\qquad \sum_0^n \Delta_{r+1} = \sum_0^n \left[\frac{f'_{r+1}}{A_{r+1}} P_r \bar{P}_r + \frac{f_{r+1} - g'_{r+1}}{A_{r+1}} P'_r \bar{P}_r - \frac{f_{r+1}}{A_{r+1}} P_r \bar{P}'_r - \frac{g_{r+1}}{A_{r+1}} (P''_r \bar{P}_r - P'_r \bar{P}'_r) \right].$$

Les coefficients des quantités de la forme $P_r \bar{P}_r$, $P'_r \bar{P}_r$, $P'_r \bar{P}'_r$, $P_r \bar{P}''_r$ ne doivent pas dépendre de r, sans quoi notre méthode est inapplicable.

Or, les relations

$$(2)\qquad U'(x) = 2\frac{f'_r}{A_r} - 1 \qquad \text{et} \qquad V'(x) = 2\frac{g'_r}{A_r}$$

montrent que les coefficients des ces quantités sont tous indépendantes de r sauf celui de $P'_r P_r - P'_r P_r$ qui est $\frac{f_{r+1}}{A_{r+1}}$ et qui, lui, n'est indépendant de r que si $\frac{B_r}{A_r}$ l'est lui-même.

Cette dernière condition n'existait pas pour le calcul de la moyenne (C, 1). Il est clair que, combinée aux deux conditions (2), elle entraîne que $\frac{f_r}{A_r}$, $\frac{g_r}{A_r}$ et $\frac{B_r}{A_r}$ soient tous trois des constantes par rapport à r. On voit immédiatement déjà que, pour les polynomes de Laguerre, il n'en est pas ainsi. (Parmi les polynomes *usuels*, seuls ceux de Hermite y satisfont.)

Pour toute la classe des polynomes qui y satisfont, on peut expliciter la moyenne (C, 2) à partir de la formule précédente (1). Dans cette formule, les trois premières sommations $\sum P_r \bar{P}_r$, $\sum P_r \bar{P}'_r$, $\sum \bar{P}_r P'_r$ ont déjà été effectuées. Quant aux deux autres, elles se calculent comme il suit, en dérivant une fois de plus (1) (Ch. II) et en procédant comme pour $\sum P_r \bar{P}'_r$; on obtient, par combi-

naison linéaire :

$$(t-x)\sum_{0}^{n} P''_r \overline{P}_r = [\Delta_{n+1}^{(0,2)} - \Delta_1^{(0,2)}] - 2\sum_{0}^{n} P'_r \overline{P}_r,$$

où la dernière somme est déjà connue, et où

$$\Delta_r^{(0,2)} = \frac{1}{A_r}(\overline{P}_r P''_{r-1} - P''_r \overline{P}_{r-1}).$$

Enfin en dérivant (1) (Ch. II) en x et en t, on obtient aussi

$$(t-x)\sum_{0}^{n} P'_r \overline{P}'_r = (\Delta_{n+1}^{(1,1)} - \Delta_1^{(1,1)}) + \sum_{0}^{n} (P_r \overline{P}'_r - \overline{P}_r P'_r).$$

où la dernière somme est déjà connue et où

$$\Delta_r^{(1,1)} = \frac{1}{A_r}(P'_r P'_{r-1} - P'_r P'_{r-1}).$$

Nous n'effectuerons pas ce calcul ici.

Pour calculer σ_n^2 et les moyennes suivantes (C, k), il est évident qu'il suffira de répéter autant de fois que nécessaire des opérations identiques ou analogues aux précédentes; on aura à sommer des quantités dont la forme générale est

$$\Delta_r^{(p,q)} = \frac{1}{A_r}\left[\frac{d^p \overline{P}_r}{dt^p}\frac{d^q P_{r-1}}{dx^q} - \frac{d^q P_r}{dx^q}\frac{d^p \overline{P}_{r-1}}{dt^p}\right].$$

Quant aux coefficients qui apparaîtront devant ces quantités, on constate facilement, par un calcul analogue à celui qu'on a effectué pour σ_n^2 et qui consiste à appliquer autant de fois que possible la relation (4'), que ce sont tous des combinaisons linéaires des dérivées successives des quantités $\frac{f_r}{A_r}$ et $\frac{g_r}{A_r}$. Ils seront donc tous indépendants de r d'après les mêmes conditions déjà trouvées pour (C, 2). Ainsi donc, quand le calcul de (C, 2) est possible, celui de (C, k) pour k quelconque entier est possible aussi. Parmi les polynomes usuels, ceux de Hermite seuls se prêtent au calcul (effectué du reste pour eux au chapitre I).

Cette méthode permet le calcul exact des noyaux de toutes les moyennes (C, k) et permet ainsi de résoudre, pour les développements en séries de Weber-Hermite, les problèmes analogues à ceux traités pour les séries de Fourier (phénomènes de Gibbs, approximation, saturation).

Si l'on veut itérer le calcul déjà fait pour la moyenne m_n, c'est-à-dire calculer une nouvelle moyenne à partir de σ_n^1, avec des coefficients inégaux on aura calculer une somme de la forme

$$\sum \gamma_r S_r^1 \quad \text{ou} \quad \sum \frac{\gamma_r}{2}\left[1 + \frac{U - U'}{x-t} - \frac{V+\overline{V}}{(x-t)^2}\right]\Sigma_r^0 + \sum_r \gamma_r (V\Delta_r + \overline{V}\overline{\Delta}_r).$$

Le premier terme de cette sommation fait apparaître $\sum_r (\gamma_r \Sigma_r^0)$, c'est-à-dire qu'on est ramené à la moyenne précédente; il est donc nécessaire que $\gamma_r = \alpha_r$.

D'après les expressions (1) du chapitre III pour les U_r et V_r, le nouveau coefficient de Σ_r^0 s'écrira en remplaçant U_r et V_r respectivement par

$$U_r(x) = \frac{f_r}{\frac{A_r}{\alpha_r}} + \frac{f_r}{\frac{A_r}{\alpha_{r-1}}} - \alpha_{r-1} x - \frac{B_r}{\frac{A_r}{\alpha_{r-1}}},$$

$$V_r(x) = \frac{\varepsilon_r}{A_r}(\alpha_r + \alpha_{r-1});$$

U_r et V_r doivent être indépendants de r, l'expression de V montre que, comme $\frac{\varepsilon_r}{A_r}$ l'est déjà, α_r doit être une constante; on est alors dans le cas des *véritables* moyennes (C, k) : Cette tentative d'itération n'aboutit donc qu'à des résultats triviaux et déjà remarqués au début de ce paragraphe.

CHAPITRE V.

Autre application : Développements en série de Neumann.

La méthode précédente employée pour les séries de polynomes orthogonaux n'est pas exclusivement applicable à ces séries. Elle est, en effet, fondée sur le fait que, dans le développement en séries considéré $\sum a_n f_n(x)$, l'élément $f_n(x)$ satisfait à deux relations linéaires, l'une entre f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, l'autre entre, f_n, f_{n-1}, f_{n-1}. Le fait que les f_n soient des polynomes orthogonaux n'intervient nullement pour lui-même.

Comme exemple d'autres développements en séries usuelles, citons le développement de Neumann d'une fonction de variable réelle qui a la forme

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n J_n(x),$$

$J_n(x)$ étant la fonction d'ordre n de Bessel. Ces développements ont été étudiés par Neumann et Gegenbauer, puis par Webb et Kapteyn, et plus récemment d'une part par Bateman, et de l'autre par J. Pérès (9).

---

(9) Webb, *Messenger of Math.*, t. 33, 1904, p. 55; Kapteyn, *Ibid.*, t. 35, 1906, p. 122; Bateman, *Ibid.*, t. 36, 1907, p. 31; J. Pérès, *Reale Acad. dei Lincei*, vol. 27, fasc. 10 et 11, 1918.

Les coefficients a_n ont pour expression ([10])

$$(1)\qquad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{J}_1(|x|)\,dx, \\ a_n = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{J}_n(x)\,\frac{dx}{|x|}. \end{cases}$$

La somme partielle d'ordre n s'écrit donc

$$a_0\mathrm{J}_0(x) + \sum_{p=1}^{n} a_p\mathrm{J}_p(x) = a_0\mathrm{J}_0 + \sum_{p=1}^{n}\mathrm{J}_p\left[p\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{J}_p(t)\,\frac{dt}{|t|}\right]$$

ou encore

$$a_0\mathrm{J}_0 + \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{p=0}^{n} p\,\mathrm{J}_p(t)\,\mathrm{J}_p(x)\right] f(t)\,\frac{dt}{|t|}.$$

On a à effectuer la somme

$$\sum_{0}^{n} p\,\mathrm{J}_p(x)\,\mathrm{J}_p(t)$$

qu'on obtient facilement grâce à la formule usuelle de récurrence des J_p :

$$(2)\qquad \frac{2p}{x}\,\mathrm{J}_p(x) = \mathrm{J}_{p-1}(x) + \mathrm{J}_{p+1}(x).$$

En adjoignant à la formule (2) la même formule, soit (2'), écrite avec la variable t, et en effectuant la combinaison linéaire $\mathrm{J}_p(x)\times(2') - \bar{\mathrm{J}}_p(t)\times(2)$, on obtient immédiatement

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right)\sum_{1}^{n} 2p\,\mathrm{J}_p\bar{\mathrm{J}}_p = \Delta_1 - \Delta_{n+1},$$

en posant

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \mathrm{J}_p & \bar{\mathrm{J}}_p \\ \mathrm{J}_{p-1} & \bar{\mathrm{J}}_{p-1} \end{vmatrix} \qquad [\mathrm{J}_p = \mathrm{J}_p(x),\ \bar{\mathrm{J}}_p = \mathrm{J}_p(t)],$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xt}{x-t}(\Delta_1 - \Delta_{n+1})\,f(t)\,\frac{dt}{|t|} + \frac{1}{2}\,\mathrm{J}_0(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{J}_1(|t|)\,dt$$

ou en isolant la partie indépendante de n :

$$(4)\qquad \mathrm{S}_n(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{J}_0(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{J}_1(|t|)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{vmatrix} \mathrm{J}_1 & \bar{\mathrm{J}}_1 \\ \mathrm{J}_0 & \bar{\mathrm{J}}_0 \end{vmatrix}\frac{xt}{x-t} f(t)\,\frac{dt}{|t|}$$
$$- \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_{n+1}\frac{xt}{x-t} f(t)\,\frac{dt}{|t|}.$$

([10]) *Cf.* WATSON, *Bessel functions*, p. 535.

La somme ici effectuée se présente d'une manière différente de celle trouvée dans le cas des séries de polynomes orthogonaux. On l'obtient, si on suppose $f(x)$ par exemple bornée, sous la forme d'une somme de deux termes, dont le premier est indépendant de n et dont le second, qui seul en dépend, tend vers zéro, comme on va le montrer :

$$S_n(x) = R(x) + \lambda_n(x).$$

Quand $n \to \infty$, $S_n(x) \to R(x)$, c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ considérée n'admet un développement de Neumann que si $R(x) = f(x)$.

Cette dernière condition est extrêmement restrictive puisqu'elle s'écrit

$$(5)\quad f(x) = \frac{1}{2} J_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) J_1(|t|)\, dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [J_1(x) J_0(t) - J_1(t) J_0(x)] \frac{xt}{x-t} f(t) \frac{dt}{|t|}$$

et exprime que $f(x)$ n'est développable en série de Neumann que si elle est solution de cette équation intégrale dont la résolution est très difficile. Ces inconvénients ont déjà été signalés, en particulier pour les fonctions impaires, par Webb et Kapteyn, qui sont arrivés par une toute autre méthode à une condition analogue ([11]).

L'objet de cette étude n'étant pas d'approfondir les conditions de ce développement en série, mais de donner une méthode de calcul de sa moyenne (C, 1) ou d'une analogue, nous n'insisterons pas sur l'obstacle que constitue cette équation intégrale, et nous nous intéresserons au terme $\lambda_n(x)$ qui seul varie avec n; ce qui est le plus important, c'est de montrer qu'il tend vers une limite. Montrons par exemple, pour un ensemble assez général de fonctions, celles qui sont bornées sur $(-\infty, +\infty)$, que cette limite est nulle.

Le terme dépendant de n dans S_n s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{n+1} \frac{xt}{x-t} f(t) \frac{dt}{|t|},$$

et se ramène à l'étude de

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{n+1} \frac{xt}{x-t} \frac{dt}{|t|},$$

c'est-à-dire de

$$(7)\qquad x \left[\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{n+1}}{x-t} \frac{dt}{t} - \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{n+1}}{x+t} \frac{dt}{t} \right].$$

Le terme délicat est celui pour lequel le dénominateur s'annule. Supposons que, par exemple, x soit positif; dans ce cas, c'est le premier. Le premier terme de la quantité (7) s'écrit alors

$$(7')\qquad -x \left[J_n \int_0^{\infty} J_{n+1} \frac{dt}{x-t} - J_{n+1} \int_0^{\infty} J_n \frac{dt}{x-t} \right].$$

([11]) Articles cités; *cf.* aussi WATSON, *Bessel functions*, p. 534.

Ces deux nouvelles intégrales s'étudient toutes deux de la même façon, en découpant l'intervalle, de manière à pouvoir appliquer les formules asymptotiques relatives aux fonctions J_n. La seconde par exemple s'écrira :

$$\int_0^\infty \overline{J_n} \frac{dt}{x-t} = \int_0^n + \int_n^\infty . \tag{8}$$

1° Dans $\int_0^n$, on pose $t = nu$, elle devient

$$\int_0^1 \frac{J_n(nu)}{\frac{x}{n} - u} = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1 , \tag{9}$$

ε étant choisi pour que $0 < \frac{x}{n} < \varepsilon$.

De ces deux parties, la seconde peut être majorée grâce à la formule ([12])

$$\int_0^1 J_n(nu)\, du \sim \left[\frac{1}{3n} - \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\lambda n^{\frac{5}{2}}} \right] \tag{10}$$

qui montre que cette deuxième partie tend vers zéro avec n.

Quant à la première partie $\int_0^\varepsilon$, il restera à la comparer avec celle qui sera relative au même intervalle dans la deuxième intégrale $(7')$.

2° $\int_n^\infty \frac{J_n(t)}{x-t} dt$ est de même nature que $\int_n^\infty J_n(t) \frac{dt}{t}$.

Or,

$$|J_n(t)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} (t^2 - n^2)^{\frac{1}{4}},$$

d'où il résulte que $\int_n^\infty$ est borné par

$$\int_n^\infty \left\{ \frac{2}{\pi \sqrt{t^2 - n^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Étudions, pour terminer, la somme des deux termes singuliers provenant de chacune des intégrales de $(7')$.

Pour cela il suffit de chercher l'ordre de la racine $x = t$ dans l'expression Δ_{n+1}. Or, d'après la formule de Meissel-Carlini ([14]) on a, si $x < n$:

$$J_n(nx) \sim \frac{x^n e^{n\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{2\pi n}\,(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\,(1+\sqrt{1-x^2})^n}$$

([12]) *Cf.* WATSON, *Bessel functions*, p. 259 $\left[\lambda = 5\sqrt[3]{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]$.

([13]) *Ibid.*

([14]) *Cf.* WATSON, *Développements asymptotiques.*

ou

$$J_n(x) \sim \frac{(ex)^n}{2^n\sqrt{2\pi n}}(1+\varepsilon_n).$$

Soit en se limitant au premier terme et en appliquant la formule de Stirling :

$$\Delta_{n+1} \sim \frac{(xt)^n}{n!\,(n+1)!}(t-x)(1+\varepsilon'_n).$$

La somme des intégrales (7') est donc équivalente à l'intégrale, sur un intervalle arbitrairement petit, de la fonction $\frac{(xt)^n}{n!\,(n+1)!}$ prise par rapport à t. Elle est donc elle-même infiniment petite avec n. Dans le cas où f est une fonction bornée, le terme λ_n tend donc vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il nous importe d'ailleurs d'avantage de montrer comment on calcule pour un tel développement de Neumann, une moyenne de la forme $\frac{\sum_1^n \alpha_r S_r}{\sum_1^n \alpha_r}$,

La seule somme à effectuer est $\sum_1^n \alpha_r \Delta_r$, soit [*cf.* (4')]

$$\sum \alpha_r \left[J_r \bar{J}_{r-1} - J_{r-1}\bar{J}_r \right]$$

qui s'écrit indifféremment

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha_n J_n \bar{J}_{n-1} + \sum_1^n J_{r-1}(\alpha_{r-1}\bar{J}_{r-2} - \alpha_r \bar{J}_r) - \alpha_1 J_0 \bar{J}_1 \\ -\alpha_n \bar{J}_n J_{n-1} + \sum_1^n \bar{J}_{r-1}(\alpha_r J_r - \alpha_{r-1} J_{r-2}) + \alpha_1 \bar{J}_0 J_1. \end{cases}$$

Il s'agit donc encore d'exprimer les quantités entre crochets par exemple $\alpha_{r-1} J_{r-2} - \alpha_r J_r$ en fonction des seules quantités J_{r-1} et J'_{r-1} ou encore d'exprimer

$$(12)\qquad J_r\left[\alpha_{r+1}\bar{J}_{r+1} - \alpha_r \bar{J}_{r-1}\right]$$

en fonction de J_r et J'_r.

On applique les formules

$$\bar{J}_{r+1} = \frac{r}{t}\bar{J}_r - \bar{J}'_r,$$

$$\bar{J}_{r-1} = \frac{r}{t}\bar{J}_r + \bar{J}'_r.$$

Le terme (12) devient ainsi

$$\frac{r}{t}\bar{J}_r(\alpha_{r+1}-\alpha_r)-\bar{J}'_r(\alpha_{r+1}+\alpha_r),$$

c'est la formule (2) qui sera utilisée pour effectuer la sommation. Il en résulte aussitôt que les coefficients α_r doivent être choisis pour que, d'après (2) et (12)

$$\alpha_{r+1}-\alpha_r=\text{const.},$$
$$\alpha_{r+1}+\alpha_r=Cr \qquad (C=\text{const.}),$$

si l'on prend $C=1$, on obtient

$$\alpha_r=\frac{1}{2}(r-1).$$

Les sommations (11) se ramènent alors aux deux sommes $\sum\frac{r}{t}J_r\bar{J}'_r$, qui a déjà été effectuée pour la somme ordinaire, et $rJ_rJ'_r$ qui s'obtient en associant à la formule (2) écrite en x la formule dérivée écrite en t :

$$\frac{2r}{x}J_r=J_{r-1}+J_{r+1}, \tag{13}$$

$$\frac{2r}{t}\bar{J}'_r=\bar{J}'_{r-1}+J'_{r+1}+\frac{2r}{t^2}\bar{J}_r \tag{13'}$$

(de $r=1$ à $r=n-1$).

Il en résulte par combinaison linéaire :

$$2r\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)J_r\bar{J}'_r=H(r)-H(r-1)+\frac{2r}{t^2}rJ_r\bar{J}_r,$$

d'où

$$\sum_1^n rJ_r\bar{J}'_r=\frac{xt}{2(t-x)}[H(0)-H(n)]+\frac{x}{t(t-x)}\sum_1^n rJ_rJ_r,$$

où

$$H(n)=\begin{vmatrix}\bar{J}'_n & J_n\\ \bar{J}'_{n-1} & J_{n-1}\end{vmatrix},$$

le numérateur de la moyenne cherchée $\sum_1^n\alpha_rS_r$ s'écrit alors

$$\Sigma_n^1=\frac{1}{2}\frac{xt}{x-t}\left[(\Delta_1-\Delta_{n+1})\left(1+\frac{x}{t-x}\right)-\frac{1}{t}(H_1-H_{n+1})\right],$$

le dénominateur valant

$$\sum_1^n\alpha_r=\frac{1}{2}\sum_0^{n-1}r=\frac{n(n-1)}{4}.$$

Étant donné la forme trouvée déjà pour S_n qui se composait [*cf.* formule (4)] d'un terme indépendant de n et d'un autre tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, toutes les moyennes trouvées sont de cette forme, le terme indépendant est toujours le même, l'autre donne immédiatement l'approximation, et même l'erreur absolue, exactement.

Ainsi on a ici pour la moyenne m_n cherchée :

$$\sigma_n^1(x) = S(x) - \frac{4}{n(n-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_n^1 \frac{xt}{t-x} f(t) \frac{dt}{|t|}.$$

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-ET-ONZIÈME

Pages.

Itération des transformations analytiques dans le bicercle-unité, par M. *Michel Hervé*. 1

Les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication, par M. *Maurice Fréchet*. 29

Sur la convergence stochastique dans les espaces uniformes, par M. *Shafik Doss*. 87

Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie, par M. *Michel Lazard*. 101

Trisectrices des angles d'un triangle, par M. *M.-B. Gambier*. 191

Généralisation du théorème de Ikehara, par M. *Hubert Delange*. 213

Fonctions à singularités polaires sur des domaines compacts et des surfaces de Riemann ouvertes, par M. *Roger Bader*. 243

Influence des propriétés arithmétiques des exposants dans une série de Dirichlet, par M. *S. Mandelbrojt*. 301

Contribution à la théorie algébrique des équations aux dérivées partielles, par M. *Jean-Claude Herz*. 321

Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres, par M. *Roland Fraïssé*. 363

Généralisation de la formule de Fejer pour les séries de polynomes orthogonaux usuels, par M. *Robert Campbell*. 389

Table des Matières du tome soixante-et-onzième. 421

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, 55

146079-54

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΤΕΘΜΕΤΡΕΚΕ